



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

*Astrosismología de estrellas enanas blancas
variables ZZ Ceti*

Tesis presentada para optar por el título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas

Alejandra Daniela Romero

Director de Tesis: Dr. Alejandro H. Córscico

Consejero de Estudios: Dr. Pablo D. Mininni

Lugar de Trabajo: Instituto de Astrofísica de La Plata (IALP-CONICET)

Buenos Aires, Mayo 2012

Astrosismología de estrellas enanas blancas variables ZZ Ceti

Resumen

Las estrellas enanas blancas constituyen la etapa final más común de la evolución estelar en la Vía Láctea. Por lo tanto, la población actual de estos objetos contiene valiosa información acerca de la historia de nuestra Galaxia. A lo largo de su evolución, las estrellas enanas blancas atraviesan varias etapas de inestabilidad pulsacional. Esto permite estudiarlas usando la Astrosismología, que estudia las propiedades evolutivas y estructurales de las estrellas pulsantes a partir del espectro de períodos observado. En particular, la astrosismología de enanas blancas es la única herramienta conocida para estimar la masa de las envolturas de hidrógeno y helio, y determinar la masa estelar con gran precisión.

En esta Tesis realizamos un estudio astrosismológico aplicado a estrellas enanas blancas variables de tipo DA conocidas como ZZ Ceti. Para ello, calculamos una grilla de modelos evolutivos representativos de estrellas enanas blancas DA, caracterizados por una estructura química interna detallada. También, realizamos un estudio de las propiedades evolutivas y estructurales de estos modelos, en particular la relación masa inicial–masa final. Luego, calculamos el espectro de períodos adiabáticos de pulsación de los modelos evolutivos, en un rango de temperatura efectiva suficiente para cubrir ampliamente la banda de inestabilidad observada ($\sim 12\,500 - 10\,500$ K). Luego realizamos ajustes astrosismológicos período a período sobre una muestra de 45 estrellas ZZ Ceti. Comenzamos con un conjunto de 44 ZZ Ceti clásicas, que cuentan con determinaciones precisas de la temperatura y gravedad superficiales. En particular se realiza un análisis astrosismológico detallado del arquetipo de la clase, G117–B15A. También realizamos un estudio detallado de WD J1916+3938, la primera enana blanca DA variable descubierta en el campo de la misión *Kepler*. Finalmente, realizamos un análisis de las propiedades pulsacionales globales de la clase de ZZ Ceti. Estudiamos la distribución en masa, temperatura y masa de hidrógeno, para la muestra analizada. En particular, encontramos que el espesor de la envoltura de hidrógeno adopta diferentes valores con masas de hidrógeno en el rango $10^{-4} - 10^{-10} M_*$, con un valor medio más pequeño que aquel predicho por la teoría de evolución estándar. Este resultado implica la existencia de un escenario de formación que da lugar a envolturas de hidrógeno más delgadas. Aquí proponemos una posible escenario, relacionado con un episodio de un pulso térmico tardío (Althaus et al. 2005b).

palabras clave: estrellas: enanas blancas – interiores estelares – evolución estelar – astrosismología – pulsaciones estelares – estrellas ZZ Ceti.

Asteroseismology of variable white dwarf stars ZZ Ceti

Abstract

White dwarf stars are the most common evolutionary endpoint in the Milky Way. Therefore, the current population contains valuable information about the history of our Galaxy. During their evolution, white dwarf stars cross several phases known as pulsational instability strips. This allows us to study white dwarfs using Asteroseismology, which studies the evolutionary and structural properties of pulsating stars from the observed period spectrum. In fact, asteroseismology is the only tool known to estimate the mass of the hydrogen and helium envelopes, and to infer the stellar mass with great accuracy.

In this work we perform an asteroseismological study of variable DA white dwarf stars known as ZZ Ceti stars. We start by computing a grid of evolutionary models representative of DA white dwarfs, characterized by detailed chemical profiles from the center to the surface. We analyze the chemical structure and evolutionary properties of these models, with special attention on the initial–final mass relation. Then, we compute the adiabatic pulsation spectrum of these evolutionary models for a surface temperature range wide enough as to comfortably cover the DA instability strip ($\sim 12\,500 - 10\,500\text{K}$). We perform asteroseismological fits for a sample of 45 ZZ Ceti stars. We study the 44 classical ZZ Ceti stars, that have well determined values of surface temperature and gravity. In particular, we perform a detailed asteroseismological analysis on the archetypical star, G117–B15A. We also perform an asteroseismological analysis on the ZZ Ceti star WD J1916+3938, the first DA variable white dwarf observed in the field of the *Kepler* mission. Finally, we analyze the global pulsational properties of the class of ZZ Ceti variables. We study the distributions of stellar mass, temperature and hydrogen envelope thickness. In particular, we found that the hydrogen envelope can adopt different values with masses of hydrogen within the range $10^{-4} - 10^{-10}M_*$. The mean value of the hydrogen envelope mass, for the sample of 44 ZZ Ceti stars, is smaller than the one predicted by the standard evolution theory. Therefore, there should be an evolutionary scenario that leads to the formation of thin hydrogen envelopes. In this work we propose a Late Thermal Pulse scenario given by Althaus et al. (2005a).

Key words: stars: white dwarf – stellar interiors – stellar evolution – asteroseismology – stellar pulsation – ZZ Ceti stars.

Agradecimientos

Durante esta etapa de cinco años de doctorado tuve la oportunidad de conocer a mucha gente que rápidamente ha formado parte de mi vida cotidiana. Cada uno a su manera fue parte del día a día y me ayudó a crecer un poco más como profesional y también como persona.

Primero quisiera agradecer a mis directores, los doctores Alejandro Córscico y Leandro Althaus por su dedicación para con mi trabajo durante estos años y por haberme formado en este fascinante campo de la astrofísica. Gracias por su ayuda y sobre todo su paciencia durante estos años.

Por supuesto quisiera agradecer a mis compañeros de oficina, Nicolás Maffione, Luciano Darriba, Martín Mestre y Felipe Wachlin. Durante estos años compartimos charlas de temas muy diversos, compartimos los almuerzos más “dinámicos” y por sobre todas las cosas divertidos. Les agradezco la compañía y la paciencia.

También me gustaría agradecer a Marcelo Miller Bertolami y a Jorge Panei, quienes me ha prestado su tiempo y dedicación cuando las cuentas se ponían en mi contra. Y a Isabel Renedo, con quien además de compartir tema de trabajo, compartimos una gran amistad a la distancia.

Además he tenido el gusto de conocer a un grupo de gente maravillosa, que me recibieron como si nos conociéramos de siempre. Las chicas de la oficina de al lado, Florencia Teppa Pania, Noélia Jimenez, Lucila Kraiselburd y Mercedes Mosquera, los del ala occidental, Gonzalo de Elía, Florencia Vieyro, Ileana Andruchow, Anabella Araudo y Mariana Orellana. Y por supuesto, Guido Moyano Loyola, Fede Conte, Ale San Román, Lucas Barale, Yael Aidelman, Vicky Reynaldi, Flor Muratore, Cinthia Peri, Juan Pablo Caso, Juan Pablo Calderón, Anahí Granada, María Eugenia Gómez, Nicolás Duronea, Javier Vasquez, Yamila Miguel, Juani Sabbione, Andrés Cesanelli, Leonardo Monachesi, Julián Gómez, y muchos otros.

Saliendo del “Obser”, me gustaría agradecer a mis amigas, Carlina Iannone, Aldana Insaurrealde, Marcela Sosa y Eugenia Simurro, quienes cariñosamente me bautizaron “la ñoña”, por compartir buenos y malos momentos, por las salidas y las pizzas caseras!!

Quiero agradecer a las chicas de la UBA, Cecilia Bejarano y Laura Gonzalez Silva, con quienes tuve la suerte de seguir en contacto, y con las cuales compartí esta etapa de doctorado.

También quiero agradecer a Gabriela Vila, quien me acompañó en la licenciatura y también en el doctorado, con quién sobrevivimos compartir departamento, aunque casi nadie nos tenía fe. Te agradezco tu amistad e infinita paciencia durante estos años.

A Vanesa Raffaelli, gracias por estar firme hace ya casi 12 años. Gracias por acompañarme en todos los proyectos, los malos y los buenos, por las charlas telefónicas de horas y por toda la terapia gratuita. Gracias por tu amistad incondicional.

En especial quiero agradecer a mi prima Anabella Romero. Anita, hemos compartido tantas cosas que ya no puedo recordar todas, la vida nos ha llevado por caminos muy distintos pero siempre estuvimos ahí. Hoy puedo decir, literalmente, que sos mi amiga de toda la vida.

Me gustaría agradecer a mi familia. A mis padres Alicia y Emilio. Gracias por apoyarme en mis proyectos aunque no siempre estuvieran de acuerdo. Gracias por mostrarme que si uno se esfuerza puede cumplir todos sus sueños. A mis hermanas Adriana y Andrea con quienes compartí toda mi vida. A su manera me han enseñado muchas cosas que me ayudaron a convertirme en una mejor persona. Gracias por contar conmigo y por dejarme contar con ustedes. También quiero mencionar a mis cuñados Sergio y Pedro quienes, cada uno con su forma de ser, están siempre presentes.

Por último, quisiera agradecer a las instituciones que hicieron posible mi trabajo de doctorado, a la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata, al Instituto de Astrofísica de La Plata, a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires y a CONICET.

Quiero dedicarle este trabajo especialmente a mis sobrinos y ahijados Ezequiel Vega, Leandro Vega, Giovanni Ribera, Stéfano Forestiero y Tomás Rivas.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
1.1. Evolución Estelar	1
1.2. Estrellas Enanas Blancas	4
1.3. Pulsaciones Estelares	8
1.3.1. Las Estrellas Variables	8
1.3.2. El Fenómeno de las Pulsaciones Estelares	9
1.3.3. Propiedades de las Pulsaciones no-Radiales	10
1.3.4. Características de los Modos Esferoidales	12
1.3.5. Aproximación Asintótica	15
1.3.6. Efectos de la Rotación y el Campo Magnético	16
1.3.7. Mecanismos de Excitación: el Mecanismo $\kappa - \gamma$	17
1.4. Astrosismología y Clases de Estrellas Pulsantes	18
1.5. Estrellas Enanas Blancas Pulsantes	22
1.5.1. El Descubrimiento de las Enanas Blancas Variables	23
1.5.2. Bandas de Inestabilidad	25
1.5.3. Identificación de modos	29
1.6. Astrosismología de estrellas ZZ Ceti	31
1.6.1. Breve Reseña Histórica del Modelado de las Estrellas ZZ Ceti	31
1.6.2. Estudios Astrosismológicos Previos	33
1.6.3. Propiedades del Conjunto de las Estrellas ZZ Ceti	37
1.7. Motivación de esta Tesis	38
2. Cálculos y Códigos Numéricos	41
2.1. Código Evolutivo	41
2.1.1. LPCODE	41
2.1.2. Física Constitutiva	43
2.2. Código de Pulsaciones	46
2.2.1. Tratamiento de “Ledoux modificado”	47

3. Modelos Evolutivos de Estrellas Enanas Blancas DA	48
3.1. Secuencias Evolutivas	48
3.2. Perfiles Químicos Internos	51
3.3. Relación Masa Inicial – Masa Final	54
3.4. La Tasa de Reacción $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$	59
4. Modelos Astrosismológicos de Estrellas ZZ Ceti	62
4.1. Modelos Evolutivos de Estrellas ZZ Ceti	62
4.1.1. El Contenido de Helio en las Enanas Blancas DA	64
4.2. Propiedades Pulsacionales de Nuestros Modelos	67
4.2.1. Influencia de los parámetros estelares	69
4.2.2. Atrapamiento de Modos	73
4.2.3. Efectos de la composición central	77
4.3. Comparación con Cálculos Previos	80
5. Astrosismología de estrellas ZZ Ceti: G117-B15A	86
5.1. Ajustes Astrosismológicos	86
5.2. G117-B15A: el Arquetipo de las ZZ Ceti	87
5.2.1. Estimación de las Incertezas Internas	90
5.2.2. Distancia Astrosismológica	91
5.2.3. Estudios Previos y Discusión de los Resultados	92
6. Astrosismología de estrellas ZZ Ceti: Las ZZ Ceti clásicas	97
6.1. El Conjunto de 44 Estrellas ZZ Ceti	97
6.2. Modelos Astrosismológicos de Estrellas ZZ Ceti	99
6.2.1. Criterios de Selección	100
6.2.2. Algunos Casos Particulares	106
6.3. Las Masas Astrosismológicas	110
6.4. La Temperatura Efectiva	111
6.5. El Espesor de la Envoltura de Hidrógeno	113
7. Astrosismología de estrellas ZZ Ceti: WD J1916+3938	120
7.1. Resultados Astrosismológicos	121
8. Conclusiones	126
A. Ecuaciones de Pulsación	132
B. Definiciones	140
Bibliografía	142

1.1. Evolución Estelar

Las estrellas nacen a partir de nubes masivas de gas y polvo, cuando una parte de dicha nube se vuelve inestable frente al colapso gravitacional y comienza a contraerse. Gran parte de la energía potencial que se libera por la contracción gravitacional se utiliza para calentar la materia que forma la protoestrella, y el resto es radiado desde la superficie. Eventualmente, las regiones centrales se vuelven suficientemente densas y alcanzan la temperatura necesaria para que se encienda la combustión de hidrógeno en helio en el centro. Así, la energía liberada por las reacciones nucleares es suficiente para contrarrestar el colapso gravitacional, y la estrella se establece en la Secuencia Principal. Si la masa inicial de la protoestrella es menor a $0.08M_{\odot}$, nunca alcanzará la temperatura de combustión de hidrógeno ($T \sim 6 \times 10^6$ K). En este caso, la materia se vuelve fuertemente degenerada y la energía liberada por la contracción es absorbida por el gas de electrones degenerado en lugar de aumentar la temperatura. Estos objetos se conocen como enanas marrones.

La Secuencia Principal es la etapa más larga en la vida de una estrella, debido a la gran diferencia en las energías de ligadura del hidrógeno y el helio y a que los ciclos de combustión en esta etapa involucran reacciones débiles. En esta etapa la estrella se encuentra en un estado de equilibrio, donde la energía proveniente de la combustión central de hidrógeno en helio se opone a la contracción gravitacional. Cuanto más masiva es la estrella, la luminosidad es más alta y la producción de energía debe ser mayor. De esta manera, estrellas de masas mayores tienen tiempos de vida más cortos en la Secuencia Principal. Por ejemplo, para una estrella de $20M_{\odot}$ esta fase inicial dura alrededor de $\sim 6 \times 10^6$ años, mientras que para una estrella de $1M_{\odot}$ dura $\sim 10^{10}$ años. Por otro lado, para una estrella con una masa menor a $0.09M_{\odot}$ el tiempo de vida en la Secuencia Principal excede la edad actual del Universo.

Cuando el combustible nuclear se agota en el centro de la estrella, la combustión de hidrógeno se desplaza a una cáscara que rodea al núcleo inerte rico en helio. El núcleo se contrae, mientras que la envoltura se expande. Esta expansión da lugar a una disminución de la temperatura superficial y la estrella asciende por la Rama

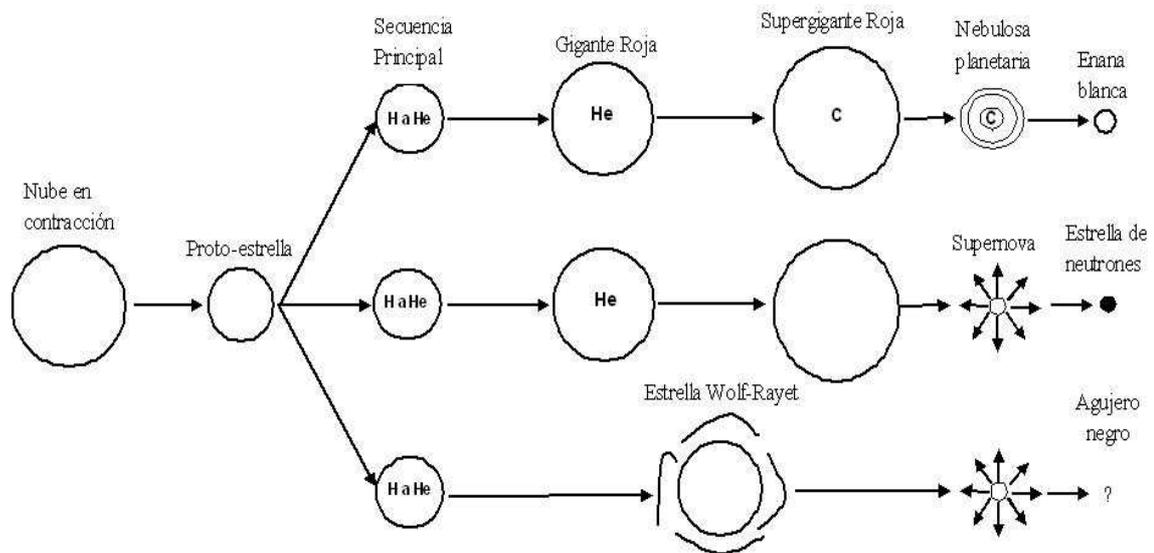


Figura 1.1: Esquema que ilustra los tres posibles caminos evolutivos, dependiendo si la estrella es una estrella de baja masa (fila superior), de masa intermedia (fila central), o de alta masa (fila inferior). Ver texto para más detalles (Adaptado de Castanheira 2007).

de Gigantes Rojas donde aumenta su luminosidad a temperatura casi constante. La masa del núcleo de helio aumenta debido a la presencia de la cáscara de hidrógeno en combustión que avanza hacia la superficie. Cuando la temperatura del núcleo de helio alcanza $\sim 10^8$ K comienza la combustión de helio, primero en carbono y luego también en oxígeno. Esta fase se conoce como Secuencia Principal de helio o Rama Horizontal.

La evolución posterior a la quema central de helio depende directamente de la masa con la cual la estrella comenzó su vida. De esta manera, las estrellas se pueden dividir en tres grupos dependiendo de la masa inicial: las estrellas de baja masa, con masas iniciales entre $0.08M_{\odot}$ y $\sim 10M_{\odot}$, las estrellas de masa intermedia, con masas en el intervalo de $\sim 10 - 25M_{\odot}$, y las estrellas masivas, con $M_* \gtrsim 25M_{\odot}$. Un esquema de los diferentes caminos evolutivos de los tres grupos se muestra en la figura 1.1.

Las estrellas de baja masa, una vez que se agota el helio central, desarrollan un núcleo degenerado de carbono y oxígeno rodeado por una cáscara de helio en combustión. A su vez, la estrella cuenta con una segunda fuente de energía dada por la cáscara de hidrógeno en combustión. Dado que no hay reacciones nucleares en el núcleo, este se contrae y la región entre las capas en combustión se expande. Esto provoca la disminución de la temperatura en la región donde se encuentra la cáscara de hidrógeno en combustión, que se vuelve inactiva. De esta manera, la envoltura se expande y la estrella se mueve hacia la Rama Asintótica de las Gigantes (AGB), alcanzando luminosidades muy altas. Para estrellas con masas menores a $\sim 8M_{\odot}$ el núcleo nunca alcanza la temperatura de fusión de carbono. Esto se debe principalmente a dos factores. Primero, la densidad del núcleo de carbono y oxígeno se vuelve tan alta que los electrones forman un gas degenerado. Segundo, los neutrinos producidos en el núcleo escapan casi sin interactuar con la materia, dando lugar a

un sumidero de energía. Hacia el final de la AGB, la combustión de helio en la capa que rodea al núcleo se vuelve inestable y la estrella sufre una serie de inestabilidades termonucleares, conocidas como pulsos térmicos. A medida que la estrella sigue su evolución en la AGB, la masa del núcleo aumenta debido al avance de la cáscara de helio en combustión. Además, las fuertes pérdidas de masa van erosionando las capas externas de la estrella, resultando en la eyección de la mayor parte de la envoltura rica en hidrógeno. El núcleo de carbono y oxígeno es un objeto compacto y fuertemente degenerado, con una masa de $0.5-1M_{\odot}$ y un radio comparable al de la Tierra. En este punto el núcleo es prácticamente una enana blanca. La materia eyectada alrededor de la estrella brilla por algunos miles de años como una Nebulosa Planetaria, resultado de la fluorescencia dada por la energía radiada por el objeto central en el rango ultravioleta, antes de disiparse en el medio interestelar. El resultado final es una enana blanca con un núcleo de carbono y oxígeno que brilla principalmente a expensas de la liberación de energía térmica almacenada en el gas de iones no degenerados. En particular, las estrellas que poseen masas iniciales entre $\sim 8-10M_{\odot}$ logran encender el carbono en condiciones semi-degeneradas dando como resultado una estrella enana blanca masiva con un núcleo de oxígeno y neón.

Luego del agotamiento del helio central, las estrellas de masa intermedia ($\sim 10-25M_{\odot}$) nunca desarrollan un núcleo degenerado, con lo cual la combustión nuclear de carbono y elementos más pesados ocurre en condiciones normales. La serie de reacciones nucleares, desde la fusión del carbono hasta elementos del grupo del hierro, dura solamente algunos cientos de años, durante los cuales las capas más externas de la estrella permanecen invariantes. Como resultado, la estrella posee una estructura de “cebolla”, donde capas de elementos cada vez más pesados se van sucediendo en el recorrido hacia el centro. Con la formación de hierro, el núcleo ya no puede generar energía mediante fusión nuclear, dado que la fusión de hierro es una reacción endotérmica. Como resultado, la única fuente de energía es la contracción gravitacional, que da lugar a un aumento de temperatura del núcleo y a la disociación de los núcleos atómicos en protones y neutrones. A medida que aumenta la densidad, los protones capturan electrones para formar neutrones, emitiendo neutrinos. Finalmente, los neutrones forman un gas degenerado. El colapso de las capas externas se frena cuando el núcleo alcanza densidades del orden de los núcleos atómicos y la materia se vuelve incompresible. Como resultado, se genera una onda de choque que, junto con la emisión de neutrinos, transfiere momento a la envoltura eyectándola en forma de una explosión de supernova. El colapso dura solamente algunos minutos. El núcleo remanente, extremadamente compacto, se transforma en una estrella de neutrones, con masas típicas alrededor de $1.4M_{\odot}$ pero menores que $\sim 2M_{\odot}$. Estos objetos se pueden observar como pulsares.

Por último, las estrellas con masas iniciales $\gtrsim 25M_{\odot}$ son estrellas masivas. Las estrellas masivas pasan casi toda su vida en una fase de Wolf-Rayet como objetos muy luminosos. A medida que la estrella evoluciona el material que ha sido procesado en el núcleo central, gradualmente alcanza la superficie de la estrella. Cuando una cantidad suficiente de material se acumula en la superficie, este absorbe gran parte de la radiación de la estrella dando lugar a fuertes vientos, con tasas de pérdida de masa de $10^{-6}-10^{-5}M_{\odot}/\text{año}$. Este viento se vuelve tan espeso que oculta totalmente

la estrella. Se cree que los procesos que ocurren en el interior de las estrellas masivas son similares a aquellos en las estrellas de masa intermedia, con lo cual, se formaría un núcleo central de hierro y una estructura interna de capas. Al final de sus vidas, estas estrellas también explotarán en un evento de supernova. En este caso, la masa del núcleo excede la masa límite para las estrellas de neutrones, y la presión dada por el gas de neutrones degenerados no es suficiente para contrarrestar el colapso gravitacional. El núcleo sigue contrayéndose para formar un agujero negro.

En un evento de formación estelar, la cantidad de estrellas que nacen no es la misma para todas las masas. Según la función de masa inicial, por cada estrella de $10M_{\odot}$ que se forma, nacen aproximadamente 300 estrellas de $1M_{\odot}$, con lo cual, la mayor parte de la población estelar estará dada por estrellas de masas bajas e intermedias. Por lo tanto, las estrellas enanas blancas constituyen el final más común en la vida de las estrellas. De hecho, un 98 % de las estrellas de la Galaxia terminarán sus vidas como enanas blancas.

1.2. Estrellas Enanas Blancas

Las estrellas enanas blancas comienzan sus vidas como núcleos con altas temperaturas rodeados por una nebulosa planetaria, producto de la evolución de estrellas progenitoras con masas iniciales menores que $10 \pm 2M_{\odot}$ (Ritossa et al. 1999; Seiss 2007).

A partir del análisis de la distribución de energía y del espectro en el óptico y ultravioleta, se sabe que las enanas blancas se pueden encontrar en un amplio rango de temperatura efectiva ($150\,000 - 4\,000\text{ K}$). Estudios espectroscópicos llevan a la determinación de la gravedad superficial, dado que la intensidad y el ancho de las líneas espectrales son sensibles a la densidad de partículas de la atmósfera, que a su vez está ligada a la gravedad superficial. El valor promedio de la gravedad superficial es $\log g \sim 8[\text{cgs}]$, mucho mayor a la solar ($\log g \sim 4.4$). También se pueden encontrar en un amplio rango en luminosidad, como consecuencia de la extensión en T_{eff} , desde $\sim 10^{-4.7}L_{\odot}$ para las enanas blancas más débiles conocidas, hasta $\sim 10^2 - 10^3L_{\odot}$ para las más brillantes.

Las estrellas enanas blancas detectadas se seleccionan a partir de muestras de objetos con movimientos propios significativos, y por consiguiente, relativamente cercanos al Sol. Un criterio de selección basado en el color permite distinguirlas de las estrellas de Secuencia Principal, que son menos azules que las enanas blancas, y su naturaleza degenerada se confirma a través de observaciones espectroscópicas. La distribución de enanas blancas en la Galaxia es consistente con una población del disco, con una escala de altura estimada de $250 - 300\text{ pc}$. La densidad espacial es del orden de 0.005 pc^{-3} para $M_{\text{bol}} < 15$, y la tasa de nacimiento es del orden de $(1.5 - 2.3) \times 10^{-2}\text{ pc}^{-3}\text{ año}^{-1}$, incluyendo la contribución de las enanas blancas en sistemas binarios.

La mayoría de las estrellas enanas blancas, como descendientes directos de un núcleo de nebulosa planetaria, nacen como objetos colapsados con temperaturas muy altas. En ese punto comienzan a enfriarse debido a que las fuentes de energía nuclear están prácticamente agotadas y la energía gravitacional no se libera en forma

eficiente, ya que la presión dada por los electrones degenerados impide cualquier contracción adicional. Como la presión no depende de la temperatura, la estrella evolucionará a radio casi constante. En particular, la degeneración electrónica del núcleo es directamente responsable de la curiosa relación entre la masa y el radio de una enana blanca: cuanto mayor es la masa de la estrella, menor es su tamaño. De la misma manera, la degeneración electrónica en el límite relativista es responsable de la existencia de una masa límite por encima de la cual no puede existir una estrella enana blanca. Esta masa límite se conoce como la masa de Chandrasekhar y es del orden de $\sim 1.4 M_{\odot}$.

Otra propiedad de los electrones degenerados es que son excelentes conductores de calor, por lo cual el núcleo de una enana blanca es casi isotérmico. En el rango de temperatura efectiva de 16 000 – 8 000 K, donde se encuentran la mayor parte de las enanas blancas, la temperatura del núcleo varía desde $\sim 2 \times 10^7$ K a 5×10^6 K. La importante caída en la temperatura entre las regiones centrales y la superficie se da principalmente en la envoltura de la estrella. En modelos fríos, este gradiente de temperatura da lugar a la formación de zonas convectivas en la superficie. Estas zonas convectivas, cuando están presentes, regulan el flujo de energía emergente hacia el exterior de la estrella. La convección también tiene un papel clave en la evolución de una enana blanca ya que afecta directamente la tasa de enfriamiento de la misma. Esto ocurre cuando la base de la zona convectiva exterior alcanza el interior degenerado, acoplando la superficie y el núcleo, y aumentando de este modo la tasa de transferencia de energía a través de la envoltura, en comparación con el caso donde el transporte es radiativo.

Los iones, no degenerados, están completamente desacoplados de los electrones, y son los que proveen la energía térmica que lentamente se transporta a la superficie, produciendo la luminosidad de la estrella. Por lo tanto, una enana blanca aislada brilla a expensas de su reservorio térmico. A medida que la energía cinética de los iones disminuye, el gas de iones pasa de un estado gaseoso a uno líquido y luego a un estado sólido. El pasaje de fluido a sólido, conocido como cristalización, da lugar a la liberación de calor latente, capaz de disminuir considerablemente la tasa de enfriamiento de la estrella. Finalmente, la reserva de energía térmica se agota y la estrella desaparece en la forma de un objeto frío y cristalizado conocido como enana negra.

La distribución de masa de las estrellas enanas blancas muestra un pico muy pronunciado alrededor de $\sim 0.59 M_{\odot}$. De hecho, usando las relaciones masa–radio teóricas y con un valor promedio de $\log g \sim 8$, se obtiene una masa media de $M \approx 0.6 M_{\odot}$ (Kepler et al. 2007). La distribución de masa de las estrellas enanas blancas también muestra dos componentes menos pobladas, hacia masas bajas y altas. Las enanas blancas masivas tienen una masa espectroscópica entre 1.0 y 1.3 M_{\odot} , conteniendo un núcleo presumiblemente formado por oxígeno y neón. Se cree que estas estrellas son el producto de la fusión o *merger* de dos enanas blancas de masa intermedia en sistemas de binarias cercanas (Guerrero et al. 2004; Lorén Aguilar et al. 2009) o de la evolución de una estrella aislada de masa intermedia que ha experimentado repetidos flashes de carbono en una cáscara que rodea al núcleo (Ritosa et al. 1999). Finalmente, la distribución de masa comprende una población de estrella

Tabla 1.1: Clasificación espectral de estrellas enanas blancas.

Tipo espectral	Características
DA	Líneas de H, sin He I o metales presentes
DB	Solamente líneas de He I, sin H o metales presentes
DC	Espectro continuo sin líneas distinguibles
DO	Líneas intensas de He II, He I o H pueden estar presentes
DZ	Solamente líneas de metales, sin H o He
DQ	Presencia de carbono, molecular o atómico

de baja masa. Dado que los progenitores de estas estrellas necesitarían un tiempo mayor que la edad del Universo para alcanzar la curva de enfriamiento, las estrellas enanas blancas de baja masa se producen en su mayoría en sistemas binarios, donde la evolución estelar es truncada por la transferencia de masa a la estrella compañera durante la primera etapa de gigante (Sarna et al. 1999).

Considerando la historia termonuclear previa y la eficiencia de los procesos de sedimentación, una enana blanca típica tiene una estructura químicamente estratificada, con un núcleo de carbono y oxígeno que contiene el 99 % de la masa total de la estrella. Rodeando al núcleo se encuentra una capa delgada de helio ($10^{-2}M_{\odot}$), a su vez rodeada por una capa de hidrógeno aún más delgada ($\sim 10^{-4}M_{\odot}$). Aunque tienen un espesor muy pequeño, las capas externas son extremadamente opacas a la radiación y regulan el flujo saliente de energía de la estrella, un aspecto muy importante en la evolución de una enana blanca.

Las estrellas enanas blancas se pueden dividir en dos grupos de acuerdo con los elementos químicos dominantes en la envoltura. La mayoría de las enanas blancas poseen envolturas casi puras en hidrógeno con algunas trazas de otros elementos más pesados. Estas estrellas se denominan enanas blancas DA y constituyen alrededor del 85 % de todas las enanas blancas – Ver Eisenstein et al. (2006) y referencias. El segundo grupo está formado por las estrellas enanas blancas con envolturas deficientes en hidrógeno, usualmente conocidas como enanas blancas no-DA, las cuales forman alrededor del 15 % de la población total. Se cree que las enanas blancas deficientes en hidrógeno son el resultado de *mergers* o de un progenitor que en la post-AGB experimenta flashes térmicos tardíos. Las enanas blancas no-DA se pueden dividir en varias subclases: las enanas blancas DO, con temperaturas efectivas $45\,000\text{K} \leq T_{\text{eff}} \leq 200\,000\text{K}$, que muestran líneas relativamente fuertes de helio una vez ionizado (HeII), las enanas blancas DB ($11\,000\text{K} \leq T_{\text{eff}} \leq 30\,000\text{K}$), con líneas fuertes en helio neutro (HeI), y las enanas blancas DC, DQ y DZ ($T_{\text{eff}} < 11\,000\text{K}$) que muestran trazas de carbono y metales en su espectro. A medida que una enana blanca DO evoluciona, el HeII se recombina para formar HeI, transformándose en una enana blanca DB. La transición de DO a una etapa DB más fría se interrumpe por el gap no-DA ($30\,000\text{K} < T_{\text{eff}} < 45\,000\text{K}$) donde se observan muy pocos objetos con atmósferas deficientes en hidrógeno (Eisenstein et al. 2006). También se deben considerar aquellas enanas blancas con atmósferas híbridas o abundancias peculiares, y las recientemente descubiertas DQ calientes (*hot DQ*) con atmósferas ricas en carbono, con $T_{\text{eff}} \sim 20\,000\text{K}$ (Dufour et al. 2007, 2008a). Se cree que las enanas blancas

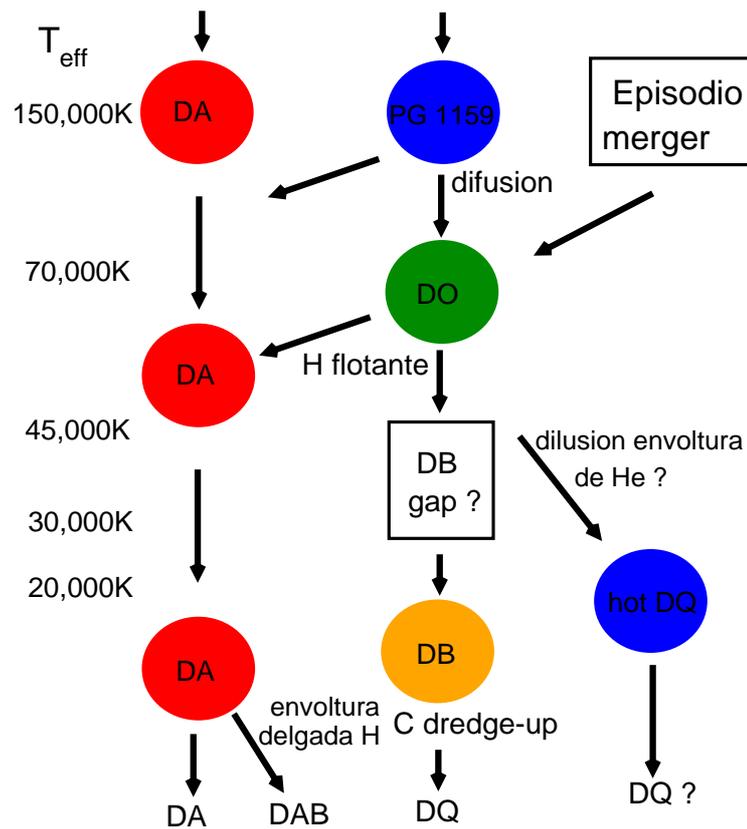


Figura 1.2: Esquema de los posibles caminos evolutivos para las enanas blancas a medida que se enfrían. La columna izquierda indica la temperatura efectiva. La mayor parte de la población de enanas blancas corresponde a estrellas DA que permanece así durante toda la evolución (segunda columna). Las enanas blancas DO pueden seguir diferentes caminos, partiendo ya sea desde las estrellas PG 1159 calientes, ricas en helio, carbono y oxígeno o a partir de estrellas formadas en eventos de *merger*. Las estrellas PG 1159 también podrían ser los progenitores de las estrellas *hot DQ*. La acreción de material del medio interestelar, como metales, por estrellas enanas blancas frías ricas en helio daría lugar a las enanas blancas de tipo DZ (Adaptado de Althaus et al. 2010a).

hot DQ son los descendientes fríos de las estrellas PG 1159, y el resultado de una mezcla convectiva a temperaturas efectivas más bajas (Dufour et al 2008a; Althaus et al. 2009a). El esquema más común de clasificación espectral se encuentra en la tabla 1.1.

Actualmente la evidencia observacional apunta hacia una posible evolución espectral de las enanas blancas, es decir, que la composición superficial de una dada enana blanca podría cambiar durante su evolución debido a la competencia entre algunos procesos físicos, como convección, episodios de pérdida de masa, acreción, levitación por radiación y asentamiento gravitacional. La interacción entre estos procesos podría brindar alguna pista para entender la evolución de las enanas blancas a medida que se enfrían. Un esquema de los posibles caminos evolutivos de las estrellas enanas blancas se muestra en la figura 1.2. Una descripción detallada de las propiedades evolutivas de las estrellas enanas blancas se puede encontrar en Althaus et al. (2010a).

1.3. Pulsaciones Estelares

1.3.1. Las Estrellas Variables

A simple vista, las estrellas parecerían ser objetos estáticos. Sin embargo, como ya vimos, estos objetos celestes son muy activos y experimentan grandes cambios en su estructura interna a medida que evolucionan. Algunas de estas estrellas pueden experimentar cambios en su brillo a escalas temporales cortas, volviéndose estrellas variables.

Las estrellas variables se pueden dividir en dos grandes categorías: las variables intrínsecas y las variables extrínsecas. Las variables intrínsecas son aquellas estrellas cuya variación en la luminosidad se debe a cambios en las propiedades físicas de la estrella en sí misma. En esta categoría se encuentran las variables pulsantes, que modifican su forma y tamaño en forma periódica, las variables eruptivas, que experimentan erupciones en la superficie, por ejemplo, por eyección de masa, y las variables cataclísmicas, estrellas que experimentan cambios bruscos como las novae y supernovas. Las variables extrínsecas son aquellas estrellas donde la variabilidad es causada por agentes externos. A su vez, esta categoría se puede dividir en dos subgrupos. El primero corresponde a las binarias eclipsantes, sistemas dobles donde, vistas desde la Tierra, las estrellas se eclipsan una a otra. El segundo corresponde a las variables rotantes, cuya variación está relacionada con la rotación de la estrella.

Las primeras variables reconocidas fueron las novae y las supernovas. Estas variables cataclísmicas, explotan aumentando su brillo en forma repentina e intensa, para luego desaparecer lentamente al cabo de algunas semanas o meses. Observaciones de este tipo de estrellas se remontan a varios siglos antes de Cristo, en registros llevados por astrólogos imperiales en China, y luego en Japón y Corea.

Excepto por las novae, se pensaba que las estrellas permanecían constantes hasta que, en el año 1596, David Fabricius descubrió la primera variable no-eruptiva en la constelación de Cetus, una estrella gigante roja pulsante conocida como *o* Ceti o Mira. Esta estrella fue considerada primero una nova hasta 1660 cuando se concluyó

que era una estrella pulsante con un período de ~ 11 meses. Actualmente esta estrella es el prototipo de una clase de estrellas pulsantes con el mismo nombre.

Algunas notas casuales fueron reemplazadas por registros sistemáticos alrededor del año 1700, dando lugar a más descubrimientos. De esta manera E. Pignott demostró que la estrella Θ Serpentis era una variable, confirmando las sospechas de G. Montanari un siglo antes, y Goodricke encontró variaciones periódicas en la estrella δ Cephei, el prototipo de las pulsantes Cefeidas, y en β Lyrae, una binaria eclipsante. El descubrimiento de estrellas pulsantes fue al principio lento, hasta la aparición de la fotografía. Alrededor del año 1800, solamente se conocían ~ 10 estrellas pulsantes, sin embargo los registros permanentes en placas fotográficas aumentaron rápidamente este número a algunos miles entre los años 1850 y 1900.

1.3.2. El Fenómeno de las Pulsaciones Estelares

Una estrella se puede considerar como una esfera de gas con gravedad propia que se encuentra inmersa en un campo de radiación. En general, la estrella es un sistema extremadamente estable, donde la energía generada por reacciones nucleares se pierde en forma de radiación desde la superficie (equilibrio térmico). Dicho sistema también se encuentra en equilibrio mecánico tal que en cada punto de la estrella la gravedad compensa exactamente el gradiente de presión. Si la presión aumenta, la estrella se expande, mientras que si la gravedad excede al gradiente de presión, la estrella se contrae. Bajo ciertas circunstancias, una pequeña perturbación sobre una estrella puede crecer con el tiempo y tornarse suficientemente grande como para ser observada, dando lugar a una estrella pulsante. Las pulsaciones estelares se manifiestan principalmente a través de variaciones periódicas en la luminosidad de una estrella, aunque también se ponen de manifiesto a través de variaciones en las líneas espectrales. Dichas variaciones pueden tener su origen en cambios en el radio estelar, en la temperatura superficial, en el área y orientación de la superficie estelar, o una combinación de todos estos efectos.

Las oscilaciones son un fenómeno común en la Tierra, como es el caso de las ondas en la superficie de los océanos producidas por la gravedad y las ondas de sonido producidas por gradientes de presión. Las oscilaciones estelares, causadas por estos dos tipos de fuerzas, son de la misma naturaleza que las oscilaciones en la Tierra. En otras palabras, los principios físicos que determinan las características de las oscilaciones son los mismos en ambos casos: la conservación de la masa, el momento y la energía. Existen, sin embargo, algunas diferencias entre la descripción de las oscilaciones estelares y las ondas en la Tierra, siendo la más importante la presencia de un campo de radiación. Dado que las pulsaciones en una estrella deben ser auto-excitadas, es necesaria la existencia de un proceso físico que convierta algún tipo de energía en energía cinética de pulsación. Cualquier proceso por el cual una porción de gas estelar absorbe o emite radiación durante un ciclo de pulsación, es el mecanismo necesario para la excitación de las pulsaciones.

Dentro de la teoría de pulsaciones estelares se pueden definir dos tipos de oscilaciones: radiales y no radiales, siendo las primeras un caso particular de las segundas. En el caso de las pulsaciones radiales, las variaciones en la luminosidad se deben a

cambios en el volumen de la estrella en forma periódica, manteniendo la simetría esférica. Las oscilaciones radiales son ondas acústicas, donde la fuerza restauradora está dada por la presión. Por otro lado, en el caso de las pulsaciones no-radiales, la estrella se aparta de su estado de equilibrio sin conservar la simetría esférica en el proceso. El material estelar se despalza tanto en dirección radial como en dirección horizontal siendo tanto la presión como la gravedad las fuerzas restauradoras. En este caso, la gravedad actúa como fuerza restauradora a través de la flotación. Entonces, mientras las pulsaciones radiales tienen un espectro de modos acústicos o de presión (modos p), las pulsaciones no-radiales muestran además un espectro de modos de gravedad o modos g (Cowling 1941).

1.3.3. Propiedades de las Pulsaciones no-Radiales

A continuación describiremos en forma breve las características generales de las oscilaciones no-radiales. Un desarrollo completo de las ecuaciones que modelan las pulsaciones no-radiales en la aproximación adiabática se presenta en el Apéndice A, donde se sigue el tratamiento presentado por Unno et al. (1989). Para más detalles sobre la teoría de pulsaciones no-radiales aplicado a oscilaciones estelares se recomienda consultar los trabajos de Cox (1980) y Unno et al. (1989).

Las ecuaciones fundamentales que gobiernan las pulsaciones no-radiales son las ecuaciones básicas de la hidrodinámica, dadas por las ecuaciones de conservación de la masa (ec. A.1), el momento (ec. A.2) y la energía (ec. A.3). Aplicando pequeñas perturbaciones sobre un estado de equilibrio con simetría esférica se obtiene un sistema de ecuaciones linealizadas, siempre suponiendo que las perturbaciones sean suficientemente pequeñas para despreciar términos de orden dos o mayor. En esta situación, para un modo normal, las variables se pueden escribir como:

$$f'_{k,\ell,m}(r, \theta, \phi, t) = f'_{k,\ell,m}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) \exp(i\sigma_{k,\ell,m} t) \quad (1.1)$$

Aquí, f' representa la perturbación Euleriana de una dada cantidad física f , como el desplazamiento, la presión o el potencial gravitatorio, $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos¹, y $\sigma_{k,\ell,m}$ es la frecuencia de oscilación. La función $f'_{k,\ell,m}(r)$ representa la parte radial de las autofunciones. Para modelos realistas, el problema de oscilaciones no-radiales se debe resolver en forma numérica, dando como resultado las autofunciones $f'_{k,\ell,m}(r)$ con su correspondiente autovalor $\sigma_{k,\ell,m}$. Bajo la aproximación adiabática ($\delta S = 0$)², el problema de pulsaciones no-radiales linealizado se reduce a un problema de autovalores de cuarto orden en el espacio dado por las ecuaciones (A.53)-(A.56).

Como se puede ver a partir de la ecuación (1.1) cada modo normal está caracterizado por tres números: el orden radial k , el grado armónico ℓ y el orden azimutal m . Tanto k como ℓ son números naturales, mientras que m es un número entero tal que $-\ell \leq m \leq \ell$. El grado armónico indica el número de líneas nodales en la superficie de la estrella, donde $|m|$ corresponden a meridianos y $\ell - |m|$ son paralelos, estos

¹Apéndice B

²En la aproximación adiabática se desprecia la variación lagrangiana de la entropía, suponiendo que no hay intercambio de calor entre los elementos de fluido al oscilar.

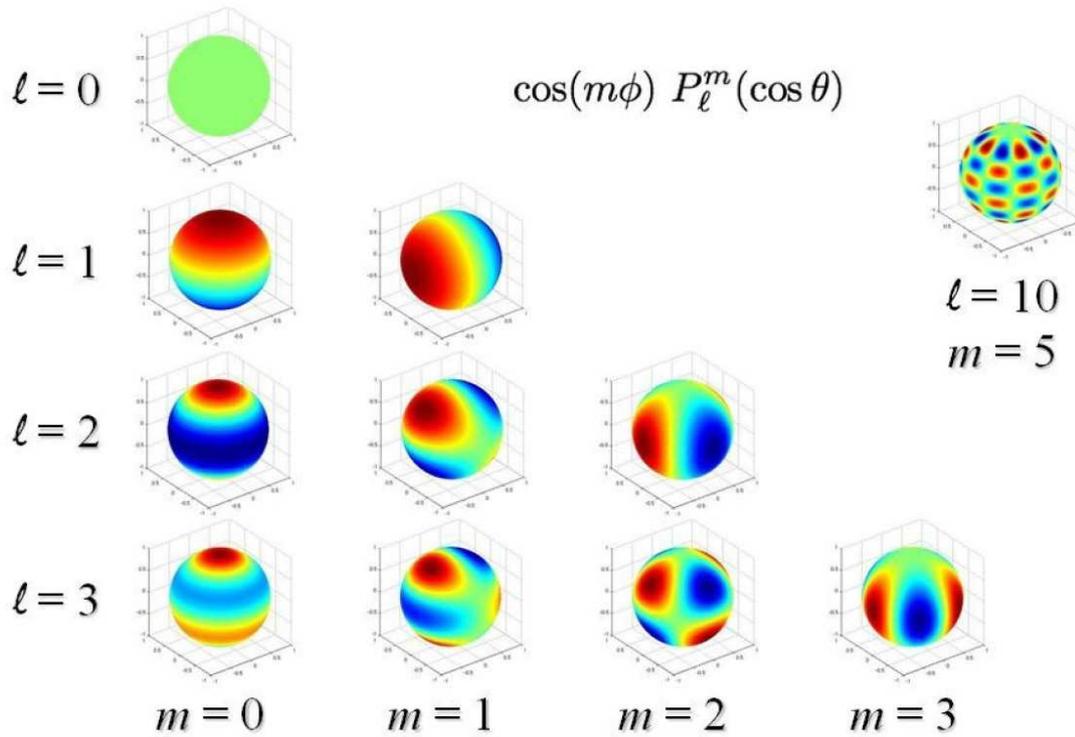


Figura 1.3: Esquema de contornos de la parte real de los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ sobre la superficie de una estrella que pulsa en modos no-radiales. Los casos ilustrados son: $\ell = 0, 1, 2, 3$ y $m = 0, 1, 2, 3$, además del caso $\ell = 10$ y $m = 5$.

modos se conocen como modos esferoidales (Unno et al. 1989). En la figura 1.3 se esquematizan los patrones nodales sobre la superficie de una estrella dependiendo del valor de ℓ y m . En particular se observa que, si $m = 0$, todas las líneas nodales son paralelos, mientras que, si $\ell = |m|$, solo se tienen meridianos. Por último, el caso con $\ell = m = 0$ corresponde a una oscilación radial, donde la simetría esférica se conserva en cada oscilación. En general, la superficie de la estrella queda dividida en regiones de fase opuesta en brillo y velocidad del material. Como resultado, la suma de la luminosidad de las diferentes regiones da lugar a las variaciones en la luminosidad total de la estrella. Por último, tenemos que las regiones limitadas por las líneas nodales se vuelven cada vez más pequeñas a medida que el grado armónico aumenta. Esto da lugar a un fenómeno de cancelación geométrica, tal que la variabilidad de la estrella se vuelve muy pequeña para ser observada. Por este motivo, los modos con un grado armónico $\ell \gtrsim 3$ son muy difíciles de observar.

Si suponemos la ausencia de rotación, campos magnéticos o cualquier otro agente externo que perturbe la simetría esférica, las ecuaciones de pulsación no dependen explícitamente del orden azimutal, por consiguiente los autovalores σ^2 serán independientes de m , dando lugar a una degeneración de orden $2\ell + 1$ en las frecuencias de oscilación. Es decir, que los $2\ell + 1$ modos normales caracterizados por los mismos valores de ℓ y k estarán caracterizados por la misma frecuencia de oscilación.

Finalmente, para modelos estelares homogéneos el orden radial k representa el número de nodos radiales, es decir el número de superficies esféricas concéntricas de radio r_i (con $1 \leq i \leq k$) donde el movimiento del material es nulo. En modelos estelares realistas, esta correspondencia uno a uno entre k y el número de nodos radiales se pierde, en especial para modos de bajo orden radial.

1.3.4. Características de los Modos Esferoidales

Como ya mencionamos, existen dos grandes clases de modos esferoidales dependiendo de la fuerza restauradora que actúa en cada caso. Si la fuerza restauradora está dada por los gradientes de presión se tienen modos de presión o modos p , mientras que si la fuerza restauradora es la gravedad, a través de la flotación, entonces se tienen modos de gravedad o modos g (Cowling 1941). A su vez, las propiedades de los modos esferoidales están gobernadas por las frecuencias características, conocidas como las frecuencias de Lamb y de Brunt-Väisälä. Los modos de presión están íntimamente relacionados con la frecuencia de Lamb, dada por:

$$L_\ell^2 = \frac{(\ell + 1)\ell}{r^2} c_S^2 \quad (1.2)$$

donde c_S^2 es la velocidad adiabática del sonido dada por $c_S = \sqrt{\Gamma_1 p / \rho}$, con p la presión, ρ la densidad y Γ_1 el exponente adiabático. En particular, la frecuencia de Lamb es inversamente proporcional al tiempo que tarda una onda de sonido en recorrer una distancia $\lambda_\ell = 2\pi r / \ell$. Los modos de presión se caracterizan por desplazamientos del material principalmente en la dirección radial. En este caso, como la fuerza restauradora está dada por los gradientes de presión, este tipo de modos se puede considerar como el análogo no-radial de los modos radiales. Los modos p ocupan la región de las altas frecuencias (períodos cortos) las cuales aumentan con k y ℓ crecientes. En general, los modos de presión se propagan en las regiones de la envoltura de la estrella donde muestran amplitudes de oscilación grandes.

Por otro lado, los modos de gravedad están relacionados con la frecuencia de Brunt-Väisälä, dada por:

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right), \quad (1.3)$$

que representa la frecuencia con la que una burbuja de gas oscila alrededor de su posición de equilibrio por la influencia de la gravedad. Los modos de gravedad se caracterizan por desplazamientos principalmente en la dirección horizontal y se propagan generalmente en las regiones internas de la estrella, cercanas al núcleo. Esta clase de modos ocupa el dominio de las bajas frecuencias (períodos largos), tal que los períodos de pulsación se vuelven más largos a medida que k y ℓ aumentan. Para el caso de las estrellas enanas blancas, la frecuencia de Brunt-Väisälä toma valores muy bajos en el centro de la estrella, debido a la degeneración electrónica en el núcleo, obligando a los modos de gravedad a propagarse en regiones cada vez más externas a medida que el grado de degeneración se incrementa.

Por último, para cada valor de $\ell > 1$, se puede encontrar un único modo cuya frecuencia se encuentra entre el espectro de modos de presión y de gravedad. Este modo se denomina modo f o modo de Kelvin. En modelos estelares simples, el modo f no tiene nodos radiales y su frecuencia aumenta con el valor del grado armónico.

Una idea de las propiedades generales de las oscilaciones no-radiales se puede extraer de un análisis local (Unno et al. 1989). Supongamos la situación donde las longitudes de onda de los modos de oscilación son cortas comparadas con las escalas de altura relevantes para las cantidades físicas involucradas. Si además consideramos la aproximación de Cowling, donde despreciamos la perturbación Euleriana del potencial gravitatorio ($\Phi' = 0$) (Cowling 1941), los coeficientes en las ecuaciones de pulsación se pueden considerar casi constantes. Bajo estas hipótesis podemos suponer una dependencia de la coordenada radial de la forma $\exp(ik_r r)$, donde k_r es la componente radial del número de onda. Como resultado obtenemos una relación de dispersión de la forma:

$$k_r^2 = \frac{1}{\sigma^2 c_S^2} (\sigma^2 - L_\ell^2) (\sigma^2 - N^2) \quad (1.4)$$

A partir de esta relación se puede ver como las frecuencias características determinan las propiedades de las pulsaciones no-radiales. Para que un dado modo se propague localmente se debe cumplir que k_r^2 sea positivo. Esto ocurre en dos situaciones: si $\sigma^2 > L_\ell^2, N^2$ y si $\sigma^2 < L_\ell^2, N^2$. Si por el contrario $N^2 < \sigma^2 < L_\ell^2$ ó $L_\ell^2 < \sigma^2 < N^2$, $k_r^2 < 0$, el número de onda radial es puramente imaginario y las soluciones son evanescentes. Como resultado, el interior de la estrella queda dividido en zonas de propagación y zonas evanescentes determinadas por el perfil de las frecuencias características de Lamb y Brunt-Väisälä.

Una forma útil de visualizar los resultados obtenidos del análisis local es mediante un diagrama de propagación (ver Cox 1980; Unno et al. 1989). En la figura 1.4 se muestra un diagrama de propagación para un modelo de una estrella en la Rama Horizontal (sub-enana B ó sdB) caracterizada por $M_* = 0.473 M_\odot$, $T_{\text{eff}} \sim 28\,700\text{K}$ y $\log g \sim 5.53$. En ella se grafican las frecuencias de Lamb y Brunt-Väisälä, L_ℓ^2 y N^2 respectivamente. Con línea punteada se indican las autofrecuencias adimensionales ω^2 para los modos con $\ell = 1$ junto con los nodos de la autofunción radial correspondiente (y_1 , ec. A.51). Las regiones sombreadas corresponden a las zonas evanescentes dentro del modelo, que separan las dos regiones de propagación donde los modos tienen permitido oscilar. Como ya mencionamos, los modos p corresponden al dominio de las altas frecuencias y se propagan en zonas más bien externas de la estrella, en la región indicada como MODOS P en la figura 1.4, donde $\omega^2 > L_\ell^2, N^2$. Los modos g , por el contrario, se propagan en una región más interna, denotada con MODOS G en la figura 1.4, donde se cumple que $\omega^2 < L_\ell^2, N^2$. En general, los modos normales serán aquellos cuya longitud de onda sea igual a la distancia entre los bordes de la región de propagación, convirtiéndose en una onda estacionaria. De esta manera, las regiones de propagación actúan como cavidades resonantes donde los modos normales quedan atrapados.

El modo f posee una autofrecuencia cercana al mínimo local de N , separando las zonas de propagación de los modos de presión y los modos de gravedad. Como ya

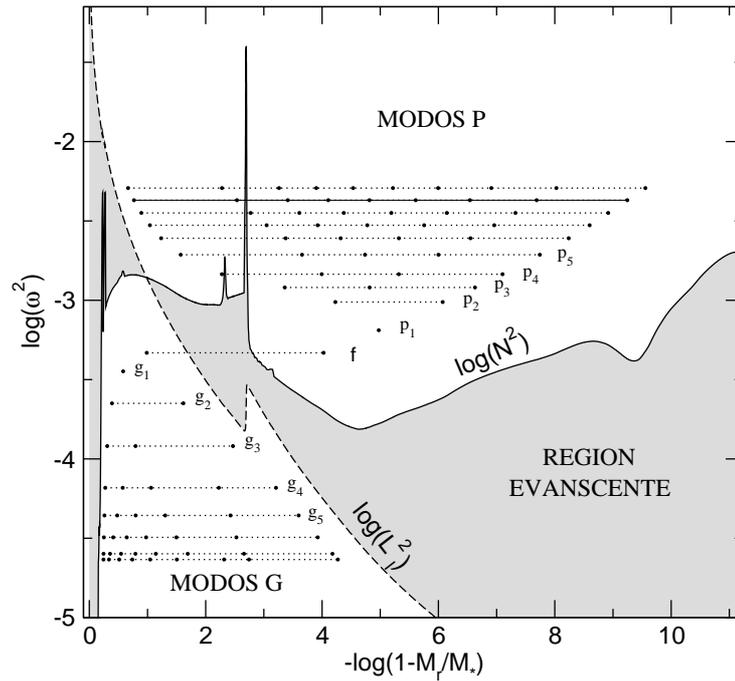


Figura 1.4: Diagrama de propagación correspondiente a un modelo de una estrella en la Rama Horizontal (sdB) con $M_* = 0.473 M_\odot$, $T_{\text{eff}} \sim 28\,700\text{K}$ y $\log g \sim 5.53$ para modos con $\ell = 2$. Las zonas blancas corresponden a regiones de propagación, mientras que las zonas sombreadas son regiones evanescentes. El logaritmo del cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä y de la frecuencia de Lamb se indican con línea llena y a trazos, respectivamente. Las líneas horizontales muestran el cuadrado de las autofrecuencias, y los círculos indican la posición de los nodos de la autofunción radial (y_1) para el modo fundamental f y para los modos p y g de bajo orden radial.

mencionamos, en un modelo realista la clasificación de modos se vuelve más compleja, sobre todo para los modos de bajo orden radial. En particular, en la figura 1.4 la autofunción radial para el modo f muestra dos nodos radiales, aunque en modelos estelares más simples este modo no posee nodos en la dirección radial.

Por último, en modelos químicamente homogéneos, los perfiles de las frecuencias características tienen una dependencia suave con la posición (Unno et al. 1989). Sin embargo, en los modelos estelares realistas, como el que se muestra en la figura 1.4 para una estrella sdB, se pueden observar algunos picos en los perfiles de las frecuencias de Lamb y Brunt-Väisälä. Como veremos más adelante, estas estructuras están asociadas con cambios abruptos en la composición debido a la presencia de interfaces químicas.

1.3.5. Aproximación Asintótica

Para obtener el espectro de modos normales de oscilación de un dado modelo estelar, se deben resolver las ecuaciones que gobiernan las oscilaciones no-radiales, por lo general en forma numérica. Por otro lado, se puede aplicar un método asintótico para modos con orden radial alto ($k \gg 1$) y valores de ℓ pequeños, y obtener así soluciones asintóticas. Una descripción detallada del método asintótico aplicado al problema de pulsaciones radiales y no-radiales se puede encontrar, por ejemplo, en los trabajos de Tassoul & Tassoul (1968) y Tassoul (1980), respectivamente. Para los modos de presión, la frecuencias en el límite asintótico se pueden aproximar por:

$$\sigma_{k,\ell} \approx \frac{\pi}{2} \left(2k + \ell + n + \frac{1}{2} \right) \left[\int_0^{R_*} \frac{1}{c_S(r)} \right]^{-1} \quad (1.5)$$

donde n es el índice politrópico³ que caracteriza la estructura de las capas superficiales del modelo estelar. A su vez, a partir de la expresión (1.5) se puede obtener el espaciamiento asintótico de frecuencias para un valor de ℓ fijo, definido como:

$$\Delta\sigma^a = \sigma_{k+1,\ell} - \sigma_{k,\ell} = \pi \left[\int_0^{R_*} \frac{1}{c_S(r)} \right]^{-1} \quad (1.6)$$

Notar que $\Delta\sigma^a$ en el límite de orden radial alto, o de altas frecuencias, es una constante que depende únicamente del perfil de la velocidad adiabática del sonido en el interior de la estrella, que a su vez es proporcional a la frecuencia de Lamb para un dado valor de ℓ .

En el estudio de los modos de gravedad, se debe tener en cuenta el tipo de transporte, radiativo o convectivo, presente en una dada región de la estrella. Si el modelo contiene tanto regiones radiativas como convectivas, el espectro de períodos de modos de gravedad se divide en modos g^+ y modos g^- , caracterizados por autovalores reales e imaginarios, respectivamente. Si consideramos un modelo químicamente homogéneo donde el transporte es púramente radiativo o convectivo, las frecuencia de oscilación de los modos de gravedad en el límite asintótico se puede aproximar por:

³Apéndice B

$$\sigma_{k,\ell}^{-1} \approx \frac{\pi}{2} \left(2k + \ell + n + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1}, \quad (1.7)$$

De manera similar a los modos de presión, se puede obtener una expresión para el espaciado asintótico de frecuencias en el límite de alto orden radial. Sin embargo, para los modos de gravedad resulta más conveniente trabajar en términos de los períodos, definidos como $\Pi_{k,\ell} = 2\pi/\sigma_{k,\ell}$, en lugar de la frecuencia. Así, podemos definir el espaciado asintótico de períodos como:

$$\Delta\Pi_\ell^a = \Pi_{k+1,\ell} - \Pi_{k,\ell} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1}, \quad (1.8)$$

Esta cantidad resulta ser una constante, determinada por el perfil de la frecuencia de Brunt-Väisälä. A diferencia de los modos de presión, $\Delta\Pi_\ell^a$ depende de ℓ .

1.3.6. Efectos de la Rotación y el Campo Magnético

En presencia de rotación o de un campo magnético la simetría esférica del modelo se rompe. De esta manera se rompe la degeneración de orden $2\ell+1$ en el orden azimutal, debida a la ausencia de un eje preferencial de simetría. Para el caso de rotación lenta, donde la frecuencia angular de rotación Ω es mucho menor que cualquier frecuencia de oscilación de los modos normales, se puede hacer una corrección a primer orden en la frecuencia de oscilación tal que:

$$\sigma_{k,\ell,m}(\Omega) = \sigma_{k,\ell}(\Omega = 0) + \delta\sigma_{k,\ell,m}. \quad (1.9)$$

donde la corrección a primer orden depende explícitamente del orden azimutal m . De esta manera cada frecuencia de oscilación en el sistema no rotante $\sigma_{k,\ell}$ se separa en sus $2\ell+1$ componentes, removiendo completamente la degeneración en frecuencia. El escenario más sencillo corresponde a una estrella que rota como un cuerpo rígido, tal que $\Omega = \text{cte}$. En este caso, la corrección a la autofrecuencia para k y ℓ dados se puede escribir como (Cowling & Newing 1949; Ledoux 1951):

$$\delta\sigma_{k,\ell,m} = -m\Omega(1 - C_{k,\ell}) \quad (1.10)$$

donde

$$C_{k,\ell} = \frac{\int_0^{R_*} \rho r^2 [2\xi_r \xi_t + \xi_t^2] dr}{\int_0^{R_*} \rho r^2 [\xi_r^2 + \ell(\ell+1)\xi_t^2] dr} \quad (1.11)$$

son los coeficientes de *splitting* rotacional, que dependen de la estructura del modelo sin rotación y del modo considerado. En la expresión anterior, ξ_r y ξ_h corresponden al desplazamiento radial y horizontal, respectivamente. En el límite asintótico, para los modos de presión, el desplazamiento del material en la dirección radial es mucho mayor que el desplazamiento horizontal, siendo $\xi_r \gg \xi_h$, tal que $C_{k,\ell} \rightarrow 0$ para orden radial creciente. Por otro lado, en el caso de los modos de gravedad se cumple que $\xi_r \ll \xi_h$ para orden radial creciente, y $C_{k,\ell} \rightarrow 1/[\ell(\ell+1)]$ en el límite asintótico.

Si ahora suponemos que la velocidad angular de rotación es una función del radio ($\Omega = \Omega(r)$), la corrección a primer orden en la frecuencia está dada por:

$$\delta\sigma_{k,\ell,m} = -m \int_0^{R_*} \Omega(r) K_{k,\ell}(r) dr, \quad (1.12)$$

donde $K_{k,\ell}(r)$ se conoce como el kernel rotacional, que depende de las funciones de desplazamiento del modelo en equilibrio con rotación nula como:

$$K_{k,\ell}(r) = \frac{\rho r^2 \xi_r^2 - 2\xi_r \xi_t - \xi_t^2 [1 - \ell(\ell + 1)]}{\int_0^{R_*} \rho r^2 [\xi_r^2 + \ell(\ell + 1) \xi_t^2] dr} \quad (1.13)$$

El kernel rotacional actúa como una función de peso para $\Omega(r)$ en función de la profundidad.

En presencia de un campo magnético débil las frecuencias de pulsación sufren pequeños cambios respecto del caso no magnético, tal que se pueden aproximar por:

$$\sigma_{k,\ell,m}(\mathbf{B}_0) = \sigma_{k,\ell}(\mathbf{B}_0 = 0) + \sigma'_{k,\ell,m} \quad (1.14)$$

donde $\sigma_{k,\ell}(\mathbf{B}_0 = 0)$ es la frecuencia de oscilación con campo magnético nulo y $\sigma'_{k,\ell,m}$ es la corrección a primer orden. La expresión para $\sigma'_{k,\ell,m}$ depende de la autofunción ξ en el caso no magnético y de \mathbf{B}_0 como (Jones et al. 1989):

$$\sigma'_{k,\ell,m} = \frac{1}{8\pi\sigma_{k,\ell}(\mathbf{B}_0 = 0)} \frac{\int_0^M \rho^{-1} |\mathbf{B}'|^2 dm_r - \int_S [(\xi^* \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}'] \cdot \hat{n} ds}{\int_M |\xi|^2 dm_r} \quad (1.15)$$

La integral sobre S es la integral sobre la superficie de la estrella, siendo \hat{n} la normal saliente a dicha superficie. Las integrales restantes son sobre todo el volumen de la estrella. Finalmente \mathbf{B}' está dado por:

$$\mathbf{B}'(r) = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0) \quad (1.16)$$

Eligiendo una expresión simple para el campo magnético, como por ejemplo un campo constante o dipolar, la corrección en la frecuencia $\sigma'_{k,\ell,m}$, además de su dependencia con $|\mathbf{B}_0|$, depende del orden azimutal como m^2 . Esto implica que la frecuencia $\sigma_{k,\ell}$ se divide en $\ell + 1$ componentes y no en $2\ell + 1$ como en el caso de rotación lenta, con lo cual la degeneración en m se remueve en forma parcial. Además, en presencia de un campo magnético débil aún la componente con $m = 0$ tiene una corrección no nula en la frecuencia de pulsación.

1.3.7. Mecanismos de Excitación: el Mecanismo $\kappa - \gamma$

Aunque hasta ahora tratamos el fenómeno de pulsaciones estelares como algo ya presente, las oscilaciones dentro de una estrella deben ser excitadas de alguna manera. En líneas generales, podemos pensar a una estrella como una gran máquina de calor, donde las capas más externas se ocupan de regular el flujo saliente de energía, usualmente mediante los procesos de ionización y recombinación de los iones de las

especies químicas dominantes. Normalmente, un aumento en el flujo saliente de radiación en una estrella dará lugar a un aumento en la temperatura y una disminución en la opacidad, permitiendo que la radiación escape más fácilmente. Por lo tanto, bajo condiciones normales, como ocurre en el material totalmente ionizado, el cambio en la opacidad favorece la estabilidad pulsacional. Sin embargo, en una zona de ionización parcial, un aumento en el flujo de radiación puede ser absorbido, resultando en un aumento en la fracción presente de iones, en lugar de aumentar la temperatura del material. Como resultado, se bloquea el flujo saliente de energía radiativa, la cual se almacena como energía de ionización. Este mecanismo se conoce como mecanismo γ . Además los fuertes gradientes en la opacidad debido a la presencia de las regiones de ionización parcial, también se pueden excitar pulsaciones mediante el mecanismo κ . En la mayoría de los casos, como por ejemplo en las estrellas enanas blancas pulsantes, los mecanismos κ y γ trabajan juntos. En resumen, un ciclo de pulsación típico, en presencia del mecanismo $\kappa - \gamma$, se puede describir en cuatro pasos:

1. La estrella se comprime y el flujo saliente de radiación se encuentra bloqueado debido a un aumento en la opacidad. La energía de radiación se almacena en los iones en forma de energía cinética. El aumento en la temperatura es pequeño.
2. En el punto de máxima compresión, la radiación se encuentra almacenada en la región de ionización parcial que sigue ganando calor, pero la densidad cae debido al aumento en la temperatura.
3. La región de excitación se expande, obteniendo un impulso adicional por la liberación de la energía de ionización. La opacidad cae a medida que el material se expande, lo cual ayuda a que la radiación fluya más fácilmente. Este es el punto de densidad mínima, resultado de la expansión del material y de la disminución de la temperatura.
4. En el punto de máxima expansión, el material continúa perdiendo calor y alcanza el valor mínimo de presión. Toda la energía que estaba almacenada es liberada por los iones, aunque el material sigue estando parcialmente ionizado, y el ciclo de pulsación puede volver a comenzar.

1.4. Astrosismología y Clases de Estrellas Pulsantes

La Astrosismología es un área de la Astrofísica que estudia la estructura interna y las propiedades evolutivas de las estrellas a partir del espectro de períodos que estas exhiben. Un ajuste astrosismológico consiste en la comparación entre los períodos observados en una estrella pulsante con los períodos que se obtienen a partir de modelos teóricos representativos de la estrella en cuestión. Cada modo de oscilación individual se propaga en una región específica de la estrella. En consecuencia, cada frecuencia proporciona información de una región particular del interior estelar, la zona donde el modo asociado oscila con mayor amplitud. Por lo tanto, cuanto mayor sea el número de frecuencias observadas, más completa y precisa será la información que se extraiga de las técnicas astrosismológicas. Información directa acerca de la

estructura interna de las estrellas no se puede obtener mediante otras técnicas⁴, las cuales solo proporcionan información sobre la superficie estelar (Espectroscopía, Fotometría).

La Astrosismología aplicada al Sol se denomina Heliosismología. El Sol es un pulsador no-radial que oscila en $\sim 10^7$ modos p simultáneamente. Debido a su cercanía a la Tierra, las frecuencias de oscilación del Sol se pueden medir con mucha precisión. Para el caso de otras estrellas, como ya vimos, los efectos de cancelación geométrica solamente permiten la detección de algunas decenas de modos restringidos a $0 \leq \ell \lesssim 4$.

Las pulsaciones pueden encontrarse en muchas etapas de la evolución estelar. Con un amplio rango de masas, las estrellas pulsantes ocupan muchas regiones en el diagrama de Hertzsprung-Russell (H-R), como se muestra en la Figura 1.4. Debido a la creciente sensibilidad y refinamiento de las técnicas observacionales, en los últimos 30 años se han descubierto un gran número de estrellas variables e incluso se identificaron nuevas clases. En la Tabla 1.4 se muestra una lista de las estrellas variables conocidas, junto con su temperatura efectiva, masa, rango de períodos y tipo de modo en el que pulsan.

A continuación se comentarán algunas características de los tipos de estrellas variables. Las primeras estrellas pulsantes descubiertas fueron las Cefeidas. Estas estrellas pulsan típicamente en el modo radial fundamental o en algunos casos también en el primer armónico ($k = 1$). Junto con las estrellas RR Lira, las Cefeidas forman la “banda de inestabilidad clásica”. Muchas de ellas son objetos en la fase de combustión nuclear de helio, sin embargo, algunas pueden tener una cáscara de hidrógeno en combustión alrededor del núcleo de helio mientras evolucionan para convertirse en gigantes rojas por primera vez.

Los análogos de baja masa de las variables Cefeidas son las estrellas W Virginis. Estas estrellas están evolucionando hacia la AGB o ya alcanzaron la etapa de pulsos térmicos a medida que abandonan la AGB. También se denominan “Cefeidas de población II” en contraste con las Cefeidas clásicas que son estrellas masivas de Población I⁵.

Las estrellas RR Lira son también objetos de Población II y se encuentran en la etapa de combustión de helio en carbono y oxígeno. Así como las Cefeidas, las RR Lira también pulsan en modos radiales y se utilizan como indicadores de distancia, dado que poseen una magnitud absoluta relativamente bien definida. La mayor parte de las estrellas RR Lira conocidas se encuentran en cúmulos globulares de nuestra Galaxia, ocupando el extremo frío de la Rama Horizontal en el diagrama H-R.

En la región más fría del diagrama H-R se encuentran las variables Mira con amplitudes de oscilación mayores a 2.5 mag. Los períodos son usualmente algo irregulares, aunque un período medio se puede derivar para la mayor parte de estas estrellas. También podemos encontrar otras clases de estrellas variables en esta zona como las variables semirregulares (SRa y SRb) y las irregulares (Lb y Lc).

En la Secuencia Principal, las estrellas variables más numerosas y mejor conocidas

⁴Excepto a través de los neutrinos los cuales son producidos en los núcleos estelares y viajan hacia el exterior de la estrella casi sin interactuar con la materia.

⁵Apéndice B

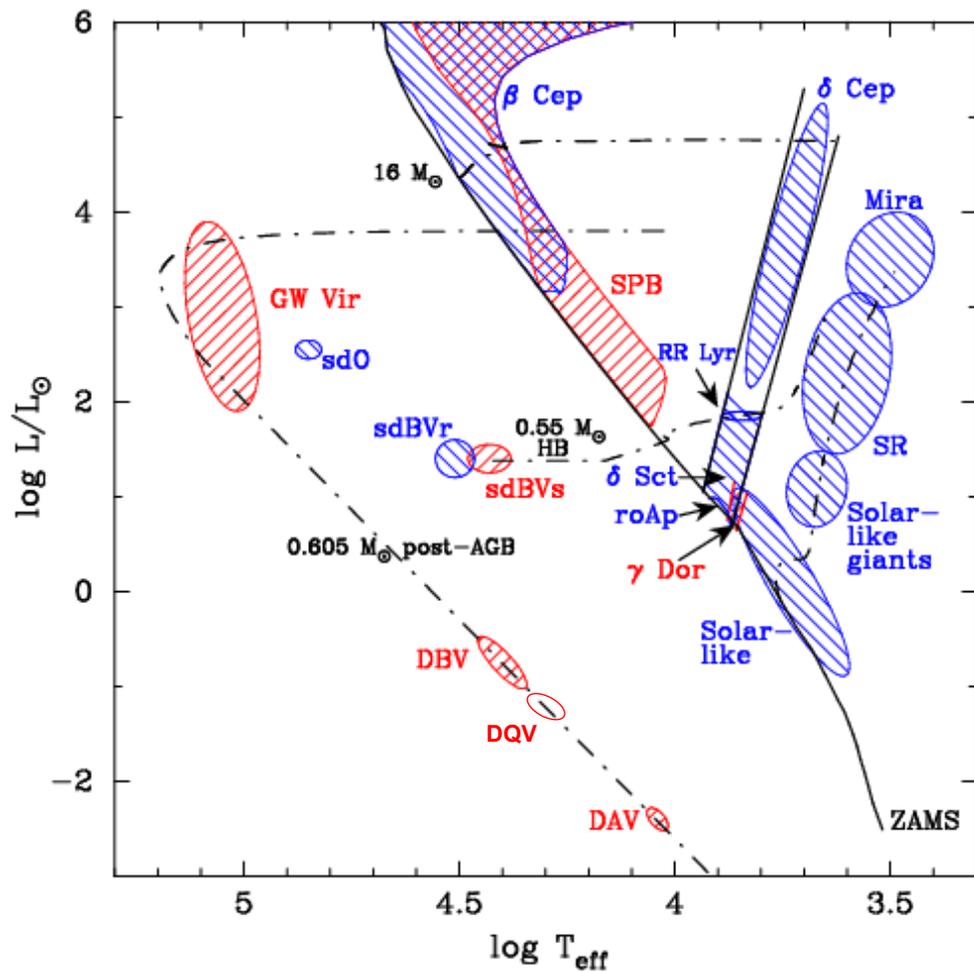


Figura 1.5: Diagrama Hertzsprung-Russell esquemático ilustrando la distribución de varias clases de estrellas pulsantes (ver tabla 1.4). Con azul se indican las clases que pulsan en modos radiales y modos p no-radiales, y en rojo se indican las que pulsan en modos g no-radiales. La línea continua muestra la Secuencia Principal de Edad Cero (ZAMS), las curvas a trazos representan algunos tracks evolutivos, incluyendo la curva de enfriamiento de las enanas blancas con una masa de $0.6M_{\odot}$ (adaptado de BRITe Constellation, Nano satellites for astrophysics).

Tabla 1.2: Parámetros y nomenclatura de las clases de estrellas pulsantes conocidas.

Tipo	Acrónimo	T_{eff} (10^3K)	M_*/M_{\odot}	L_*/L_{\odot}	Período	Modos*
Cefeidas	δ Cep	5.5–6.5	5 – 20	$10^3 - 10^5$	2 – 100 d	R
Mira	M ó Mira	2.5–4.0	$\sim 1 - 2$	$10^2 - 10^4$	25 – 400 d	R
RGR ó RAG	SRa, Srb Lb, Lc	2.5–4.0	$\sim 1 - 8$	$10^2 - 10^4$	25 – 400 d	R
RR Lira	RR Lyr	6.0–7.0	0.5–0.8	40 – 50	0.2–1.2 d	R
δ Scuti	δ Sct	7.5–8.7	1.6–2.6	10 – 100	0.5–6 h	R,NR(p)
El Sol	Sol	6.0	1.0	1.0	5 – 10 m	NR(p)
Ap rápidamente oscilantes	roAp	7.0–8.5	1.6–2.6	10 – 50	4 – 15 m	NR(p)
γ Doradus	γ Dor	6.5–7.3	1.4–1.7	5 – 20	0.5–3 d	NR(g)
β Cephei	β Cep	22 – 30	8 – 15	4000 – 20000	3.5–6 h	NR(p)
Slowly pulsating B	SPB	13 – 17	3 – 8	2.5–6	0.6–3 d	NR(g)
Line profile Variables	LPVs	15 – 40	$10^3 - 10^5$	5 – 50	3 – 30 h	NR(p)
GW Virginis	DOV	~ 100	~ 0.6	$\sim 10^2$	300 – 3500 s	NR(g)
DB enanas blancas Variables	DBV	~ 23	~ 0.6	~ 0.03	400 – 1200 s	NR(g)
<i>hot</i> DQ enanas blancas Variables	DQV	~ 20	~ 0.6	~ 0.032	250 – 1100 s	NR(g)
DA enanas blancas Variables	DAV	~ 12	~ 0.6	$\sim 10^{-3}$	100 – 1200 s	NR(g)
Luminous blue Variables	LBV	~ 20	30 – 100	$10^5 - 10^6$	$\sim 30 - 50$ d	NR ?
R Corona Borealis	RCBr	5.0–7.0	~ 1	$\sim 10^4$	~ 40 d	R ?
sdB	EC 14026	29 – 35	~ 0.5	20 – 40	100 – 400 s	R,NR(p)
sdB	PG 1716	23 – 30	~ 0.5	20 – 40	2000 – 8000 s	NR(g)
sdO	sdOV	48 – 52	...	3×10^2	60 – 120 s	NR(p)?

*R significa modos radiales; NR(p) significa modos p no-radiales; NR(g) significa modos g no-radiales.

son la δ Scuti. Las pulsaciones en este caso son una combinación entre modos radiales y no-radiales; la mayoría de los modos no-radiales son modos p de bajo orden radial. Dado que las estrellas δ Scuti muestran una rotación rígida, se deben considerar los efectos de *splitting* rotacional en los cálculos de pulsaciones.

Cerca de las δ Scuti podemos encontrar las estrellas Ap rápidamente oscilantes (roAp). Estas estrellas pulsán en modos p de alto orden radial con amplitudes de 1-10 mmag. Poseen fuertes campos magnéticos y períodos de rotación de 2-12 días. También podemos ver a la derecha de las estrellas δ Scuti a las estrellas γ Doradus que se encuentran en la Secuencia Principal o cerca de ella. Las γ Doradus son pulsadores no-radiales en modos g de alto orden radial.

A luminosidades más altas encontramos las estrellas SPB o “*slowly pulsating B stars*”. Estas estrellas de la Secuencia Principal muestran variaciones en su brillo menores a 0.1 mmag.

Las estrellas β Cephei pulsán en modos radiales y en modos p no-radiales. La mayoría se ubican en cúmulos abiertos jóvenes. Las observaciones muestran que se encuentran en la etapa de combustión de hidrógeno, en su mayor parte, en la etapa de contracción del núcleo o quemando hidrógeno en una cáscara que rodea al núcleo.

En la rama horizontal caliente se encuentran las estrellas sdB variables. Estas se dividen en tres clases: las estrellas EC 14026 que pulsán en modos p y en modos radiales, las PG 1716 que pulsán en modos g y las estrellas sdB híbridas, que oscilan tanto en modos p como en modos g . Este clase de estrellas variables constituye la contraparte a alta temperatura efectiva de las RR Lyra. A temperaturas y luminosidades más altas se encuentran las estrellas sdO variables, que pulsán, presumiblemente, en modos p no radiales.

Finalmente, las enanas blancas son las estrellas pulsantes no-radiales mejor establecidas. Existen cuatro clases de enanas blancas pulsantes, todas multiperiódicas en modos g . Las más frías son las enanas blancas con hidrógeno en superficie (DAV), también conocidas como variables ZZ Ceti. A temperaturas intermedias en la curva de enfriamiento ($\approx 25\,000\text{K}$) se encuentran las enanas blancas con helio en la superficie conocidas como DBV. La tercera clase es la más azul y está constituida por enanas blancas DOV y por estrellas centrales de nebulosas planetarias (PPNV). Finalmente, se encuentran las estrellas DQV, recientemente descubiertas, en un rango delgado de temperatura efectiva. En esta Tesis se realiza un estudio astrosismológico aplicado a la clase de estrellas enanas blancas pulsantes más frías, las DAV.

1.5. Estrellas Enanas Blancas Pulsantes

En general, el estudio de las estrellas enanas blancas se puede aplicar en numerosos campos de la astrofísica. Como ya mencionamos, las estrellas enanas blancas constituyen el final más común en la vida de las estrellas. Como resultado estos objetos compactos contienen información importante acerca de la historia y las propiedades de las poblaciones estelares (Hansen & Liebert 2003) y de la tasa de formación estelar de la Galaxia (Díaz-Pinto et al. 1994). Además, las enanas blancas se pueden utilizar como relojes cósmicos, dada su relación relativamente simple entre la edad y la luminosidad, para inferir la edad de una gran variedad de poblaciones

estelares, como el disco galáctico y el halo (Winget et al. 1987; García-Berro et al. 1988ab, 1999; Hernanz et al. 1994; Torres et al. 2002), así como también en cúmulos abiertos y cúmulos globulares (Richer et al. 1997; Von Hippel & Gilmore 2000; Hansen et al. 2002; Von Hippel et al. 2006; Hansen et al. 2007; Winget et al. 2009; García-Berro et al. 2010). Por último, el estudio de los tiempos de enfriamiento de las estrellas enanas blancas se puede aplicar también al estudio de teorías alternativas de gravitación (García-Berro et al. 1995; Benvenuto et al. 2004; Althaus et al. 2011).

Una herramienta poderosa para el estudio de la estructura interna y las propiedades evolutivas de las estrellas enanas blancas es la Astrosismología. De hecho la astrosismología es la única herramienta que puede medir la masa remanente de hidrógeno y de helio. También, proporciona una medición muy precisa de la masa estelar, mucho mejor que la que se obtiene a partir del análisis espectroscópico. Además se puede aplicar a la determinación de la estructura del núcleo de carbono y oxígeno de las enanas blancas de masa intermedia; en particular, se puede utilizar para poner una cota en la tasa de reacción $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)\text{O}^{16}$ y a los procesos de mezcla extra que ocurren en la etapa de combustión central de helio, donde se forma el núcleo de C/O. Una determinación de la tasa de cambio en los períodos observados en estrellas enanas blancas puede aplicarse al estudio de la emisión de neutrinos (Winget et al. 2004) o de axiones (Isern et al. 1992, Córscico et al. 2001; Bischoff-Kim et al. 2008b; Isern et al. 2010; Córscico et al. 2011a), así como también a la detección de posibles planetas orbitando alrededor de estas estrellas (Mullally et al. 2008). Por otro lado, la astrosismología de estrellas enanas blancas se puede aplicar al estudio de la cristalización (Montgomery & Winget 1999; Córscico et al. 2004, 2005; Metcalfe et al. 2004; Kanaan et al. 2005), y las propiedades de las zonas convectivas externas (Montgomery 2005ab, 2007). Finalmente, la astrosismología aplicada a estrellas enanas blancas se puede utilizar para determinar el período de rotación, la presencia y magnitud de un campo magnético y la distancia astrosismológica, entre muchas otras aplicaciones. Para más detalles sobre las propiedades evolutivas y pulsacionales de estrellas enanas blancas y sus aplicaciones se recomienda consultar los trabajos de Winget & Kepler (2008), Fontaine & Brassard (2008) y Althaus et al. (2010a).

1.5.1. El Descubrimiento de las Enanas Blancas Variables

Las enanas blancas variables son miembros relativamente nuevos del grupo de las estrellas variables⁶. La historia comienza con Arlo Landolt en 1964. Landolt se encontraba realizando observaciones como parte de un programa dedicado a establecer una red de fotometría de las estrellas estándar. En sus observaciones de una estrella en particular, encontró pequeños residuos que variaban en forma irregular en una escala temporal rápida. Aunque tal vez otro observador lo hubiera descartado como un error, Landolt no lo hizo. Durante los siguientes tres años realizó observaciones fotométricas y espectroscópicas de esta estrella, hoy conocida como HLTau 76. En el proceso estableció que se trataba de una estrella aislada que mostraba al menos un

⁶Una reseña histórica completa sobre el descubrimiento de las estrellas enanas blancas pulsantes se puede encontrar en los trabajos de Vuille (1998) y en los artículos de Winget (1988) y Winget & Kepler (2008).

período en ~ 740 s (Landolt 1968). Este período resultaba ser muy largo para ser explicado por la teoría de pulsaciones radiales, de acuerdo con los estudios teóricos de la época (Faulkner & Gribbin 1968; Ostriker & Tassoul 1968). Descubrimientos posteriores de estrellas enanas blancas variables que mostraban características similares a la estrella de Landolt, dieron lugar a una nueva clase de estrellas variables conocida como estrellas ZZ Ceti (ver sección 1.5.2). Varios resultados observacionales apuntaron hacia la idea que la variación en la luminosidad de las enanas blancas detectadas se debía a modos de gravedad no-radiales. En particular, MacGraw (1977) mostró que las variaciones en la luminosidad se debían a cambios en la temperatura superficial de la estrella. Unos años más tarde, Robinson, Kepler & Nather (1982) dieron la base teórica de esta hipótesis, demostrando que las variaciones en la luminosidad se deben enteramente a las variaciones en la temperatura superficial, y que las variaciones en el radio son tan pequeñas como $\delta R_*/R_\odot \sim 10^{-4}$.

Además de las enanas blancas DA, se descubrieron otros tipos de enanas blancas pulsantes a lo largo de la curva de enfriamiento, con distintas composiciones superficiales. La primera clase de enanas blancas con atmósferas deficientes en hidrógeno, o no-DA, fueron las estrellas pre-enanas blancas de tipo PG 1159 (McGraw et al. 1979; Grauer & Bond et al. 1984). La variabilidad de las enanas blancas DB fue primero predicha en forma teórica por Winget et al. (1991) y Winget et al. (1982a), confirmada poco después por el descubrimiento de la estrella DBV GD 358 por Winget et al. (1982b). Recientemente, se descubrió una nueva clase de enana blanca, las estrellas *hot* DQ (Dufour et al. 2007). La variabilidad de este tipo de estrellas fue confirmada por Montgomery et al. (2008). Hasta principios del año 2008 se conocían alrededor de 172 estrellas enanas blancas pulsantes, todas ubicadas en el disco delgado de la Galaxia.

Un gran adelanto en el campo de la astrosismología de enanas blancas desde el punto de vista observacional, fue la fundación de la colaboración *Whole Earth Telescope* (WET) en 1986 (Nather et al. 1990). El WET es una red mundial de 25 observatorios astronómicos, que tiene como finalidad la adquisición de curvas de luz casi continuas de enanas blancas variables con una duración del orden de semanas, evitando los huecos en las series temporales debidas a la inminente salida del Sol en cada sitio. La duración y la densidad de datos permite obtener una resolución temporal superior para estudiar el espectro de períodos de las estrellas enanas blancas pulsantes. Por otro lado, el número de estrellas enanas blancas detectadas, y por consiguiente también la cantidad de miembros de las subclases pulsantes, ha crecido notablemente desde el comienzo del proyecto *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) en el año 2000 (York et al. 2000). El SDSS es el mayor reconocimiento del cielo en cinco bandas (u, g, r, i, z) a partir del cual se pueden seleccionar galaxias, cuasares y por supuesto estrellas. El número de estrellas enanas blancas identificadas en el *Data Release 7* es de 13 724 DA, 961 DB y 48 DO (Kleinman 2010), además del descubrimiento de una nueva clase denominada *hot* DQ.

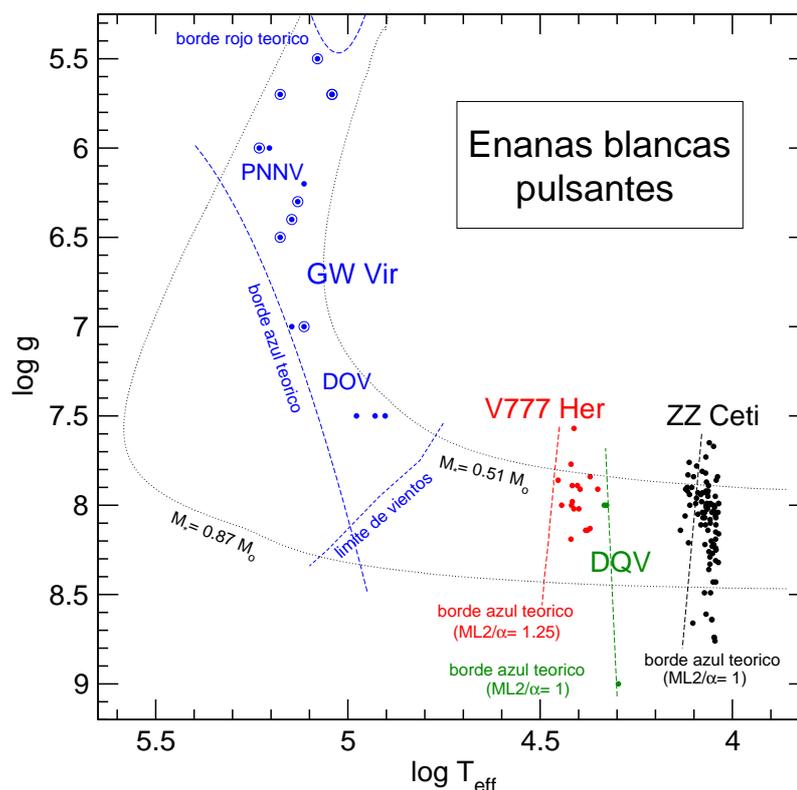


Figura 1.6: Localización de las distintas clases de estrellas enanas blancas variables en el plano $\log g - T_{\text{eff}}$. A modo de referencia se muestran los tracks evolutivos correspondientes a dos secuencias deficientes en hidrógeno producto de un episodio de VLTP. También se muestra la ubicación del borde azul teórico de la banda de inestabilidad para las estrellas GW Vir (Córscico et al. 2006), las estrellas V777 Her (Córscico et al. 2009b), las estrellas DQV (Córscico et al. 2009c) y las estrellas ZZ Ceti (Fontaine & Brassard 2008). (Adaptado de Althaus et al. 2010a).

1.5.2. Bandas de Inestabilidad

A lo largo de la curva de enfriamiento podemos encontrar varias regiones, conocidas como bandas de inestabilidad pulsacional, donde las estrellas enanas blancas se convierten en estrellas variables. Las pulsaciones se observan como variaciones periódicas en el brillo de la estrella en el rango óptico y del ultravioleta lejano del espectro electromagnético. Típicamente las curvas de luz muestran amplitudes pico a pico entre 0.4 mmag y 0.3 mag. Como ya se mencionó, las estrellas enanas blancas pulsantes se pueden dividir en cuatro clases según el valor de los parámetros espectroscópicos, $\log g$ y T_{eff} , y la composición química de la envoltura, denotando las diferentes propiedades estructurales y caminos evolutivos de cada clase. En la figura 1.6 se muestran las distintas bandas de inestabilidad en el plano $\log g - T_{\text{eff}}$.

En la tabla 1.5.2, adaptada de Althaus et al. (2010a), se presenta un resumen de las propiedades de cada clase de enana blanca variable. La primera columna muestra en nombre de cada clase, las columnas 2 a 6 muestran el número de miembros, el rango en magnitud visual, la temperatura efectiva y el rango de períodos y amplitud

Tabla 1.3: Propiedades de las estrellas enanas blancas pulsantes (Adaptada de Althaus et al. 2010a).

Clase	Número	Magnitudes visuales	T_{eff} [kK]	Períodos [min]	Amplitud [mag]
PNNV	10	11.8–16.6	110 – 170	7 – 1000	0.01–0.15
DOV	6	14.8–16.7	80 – 160	5 – 43	0.02 – 0.1
V777 Her	21	13.6–16.7	22.4 – 28.4	2 – 18	0.05 – 0.3
DQV	5	17.7 – 19.6*	19 – 22	3 – 18	0.005 – 0.015
ZZ Ceti	148	12.2 – 16.6	10.4 – 12.4	1.6 – 23.3	0.01 – 0.3

* amplitud g en el sistema *ugriz* del SDSS.

de las variaciones observados respectivamente.

A continuación realizamos una descripción detallada de las propiedades pulsacionales de las distintas clases de enanas blancas variables.

GW Vir: pre-enanas blancas PG 1159 variables

Las estrellas enanas blancas pulsantes conocidas como PG 1159 o GW Vir (a partir del prototipo de la clase de variables y del tipo espectral PG 1159–035 o GW Vir (McGraw et al. 1979) son estrellas que se encuentran en la etapa de pre-enana blanca y muestran temperaturas efectivas altas y gravedades superficiales bajas ($80\,000\text{K} \leq T_{\text{eff}} \leq 180\,000\text{K}$ y $5.5 \leq \log g \leq 7.5$). Estas estrellas tienen envolturas deficientes en hidrógeno, compuestas de helio ($\sim 30 - 85\%$), carbono ($\sim 15 - 60\%$) y oxígeno ($\sim 2 - 20\%$) (Werner & Herwig 2006). Son variables multiperiodicas que pulsan en modos de gravedad de bajo grado armónico ($\ell \leq 2$) y alto orden radial ($k \gtrsim 18$) con períodos en el rango de $300 - 3000$ s. Esta clase de estrellas variables está formada por dos subclases: las PNNV y las DOVs. Las estrellas PNNV (*planetary nebula nuclei variable*) aún se encuentran rodeadas por su nebulosa planetaria, formada en la etapa posterior a la AGB, luego de la eyección de las capas más externas de la estrella pre-enana blanca. Por otro lado, las estrellas DOV, con luminosidades más bajas que las estrellas PNNV (ver figura 1.6) no muestran una nebulosa planetaria. En la actualidad se conocen 10 estrellas PNNV y 6 DOVs, haciendo un total de 16 estrellas GW Vir conocidas. En particular, la estrella prototipo de esta clase, PG 1159–035, es la estrella que más períodos observados tiene, 198 en total (Costa et al. 2008), después del Sol.

El mecanismo de excitación asociado a la inestabilidad de las estrellas GW Vir es el mecanismo κ debido a la ionización parcial de carbono y oxígeno en las capas externas (Sarrfield et al. 1983; Gautschy et al 2005; Córscico et al. 2006; Quirión et al. 2007). Estudios realizados por varios autores, basados en datos recientes de opacidades, demostraron que las inestabilidades pulsacionales pueden ser excitadas en el rango adecuado de temperatura efectiva, gravedad superficial y períodos, en modelos con envolturas químicamente homogéneas, siempre que la abundancia de helio no sea muy alta (envenenamiento por helio) (Saio et al. 1996; Gautschy et al 1997; Quirión et al. 2004, 2007). De esta manera, la presencia de estrellas PG 1159 no variables en la banda de inestabilidad de las estrellas GW Vir se puede explicar a

partir de abundancias altas de helio (Quirión et al. 2004), dando lugar a una banda de inestabilidad intrínsecamente impura.

V777 Her: enanas blancas DB variables

Las estrellas DB variables, o V777 Her, poseen envolturas dominadas en helio y temperaturas efectivas y gravedades superficiales en el rango de $22\,000\text{K} \leq T_{\text{eff}} \leq 29\,000\text{K}$ y $7.6 \leq \log g \leq 8.2$, respectivamente. Pulsan en modos de gravedad no-radiales con períodos entre 100 y 2000 s. Actualmente se conocen 21 estrellas DB variables, 9 de ellas fueron descubiertas en el marco del proyecto SDSS (Nitta et al. 2009), 2 fueron reportadas por Kilkenny et al. (2009) y la última fue descubierta por la misión Kepler (Østensen et al. 2011). La más estudiada en esta clase utilizando herramientas astrosismológicas es la estrella GD 358 (Bradley & Winget 1994; Metcalfe et al. 2000, 2001, 2002).

El mecanismo de excitación que actúa en las estrellas V777 Her es el mecanismo $\kappa - \gamma$ asociado a la ionización parcial de helio en la base de la zona convectiva exterior. En particular, la posición del borde azul de la banda de inestabilidad es fuertemente dependiente de eficiencia convectiva que se adopta para la envoltura de los modelos teóricos (ver por ejemplo Córscico et al. 2009a). Además existe una incerteza adicional dada en la determinación de los parámetros espectroscópicos, producto de la presencia de trazas de hidrógeno en las envolturas ricas en helio de estas estrellas. Específicamente, los modelos de atmósferas que contienen hidrógeno dan lugar a temperaturas efectivas más bajas que aquellos modelos que no contienen hidrógeno (Beauchamp et al. 1999; Castanheira et al. 2006; Voss et al. 2007), con lo cual se hace difícil la determinación de la temperatura efectiva en presencia de trazas no detectables de hidrógeno, probablemente producto de la acreción de material del medio interestelar con tasas de acreción del orden de $10^{-19} - 10^{-21} M_{\odot}/\text{año}$.

Enanas blancas *hot* DQ variables

Las estrellas enanas blancas *hot* DQ variables son estrellas con atmósferas dominadas en carbono y temperaturas efectivas en el rango $18\,000 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 24\,000\text{K}$ (Dufour et al. 2008a), que pulsan en modos g no radiales con períodos entre 150 y 1100 s. Esta clase de enanas blancas pulsante es la más nueva entre los pulsadores degenerados. De una muestra de catorce enanas blancas *hot* DQ descubiertas en el marco del SDSS (Dufour et al. 2010), actualmente se conocen cinco variables.

La primera DQV, SDSS J1242625.70+575218.4, fue descubierta por Montgomery et al. (2008), y está caracterizada por una temperatura efectiva de $\sim 19\,800\text{K}$ y $\log g \sim 9$ y un período confirmado de 418 s. Poco después, Barlow et al. (2008) reportó el descubrimiento de dos nuevas variables, SDSS J220029.28-074121.5 ($\log g \sim 8$, $T_{\text{eff}} \sim 21\,240\text{K}$) y SDSS J234843.30-09245.3 ($\log g \sim 8$, $T_{\text{eff}} \sim 21\,550\text{K}$), con períodos de $\Pi \simeq 656\text{ s}$ y $\Pi \simeq 1052\text{ s}$, respectivamente. El carácter pulsante de estas estrellas fue confirmado por Fontaine et al. (2009) luego del descubrimiento de un período adicional en SDSS J142625.70+575218.4 alrededor de los 319 s. Por otro lado, Dufour et al. (2009) encontraron dos nuevas periodicidades a 254.7 s y 577.6 s para SDSS J220029.28-074121.5 y a 417 s para SDSS J234843.30-09245.3.

Dunlap et al. (2010) reportaron el descubrimiento de una cuarta variable, SDSS J133710.19–002643.6, con dos períodos de ~ 340 y 169 s. Finalmente, Dufour et al. (2011) a partir de observaciones en el ultravioleta con el HST, encontraron una estrella *hot* DQ variable adicional, SDSS J115305.54–005646.2, con períodos de 159 y 374 s. Una breve reseña histórica del descubrimiento y estudio de las estrellas *hot* DQ variables se puede ver en los trabajos de Fontaine & Brassard (2008) y Althaus et al. (2010a).

El estudio teórico de la variabilidad de las estrellas *hot* DQ comenzó con el trabajo de Fontaine et al. (2008). A partir de un análisis no adiabático encontraron que se pueden excitar pulsaciones en modos g en el rango de temperatura efectiva adecuadas solo si los modelos estelares estaban caracterizados por abundancias de helio considerables ($X_{\text{He}} \geq 0.25$) en la envoltura rica en carbono. Recientemente, Córscico et al. (2009c) presentaron un nuevo análisis pulsacional no-adiabático, empleando modelos evolutivos completos, en acuerdo con la hipótesis de mezcla convectiva/difusiva para la formación de las enanas blancas *hot* DQ, presentados por Althaus et al. (2009a). De acuerdo con los resultados de Córscico et al. (2009c), el mecanismo de excitación es el mecanismo κ debido al pico en la opacidad asociado a la ionización parcial de carbono, siendo el efecto de la ionización parcial de helio menos relevante en la desestabilización.

ZZ Ceti: enanas blancas DA variables

Además de ser la primera clase de estrellas enanas blancas variables en ser descubierta, las estrellas ZZ Ceti o DA variables son también la clase más numerosa. Actualmente se conocen alrededor de 148 estrellas ZZ Ceti (Castanheira et al. 2010), la mayoría de ellas descubiertas en el marco del SDSS desde el año 2004 (Mukadam et al. 2004; Mullally et al. 2005; Kepler et al. 2005b; Castanheira 2006, 2007, 2010).

Las estrellas ZZ Ceti poseen atmósferas de hidrógeno (tipo DA) y se encuentran en un rango más bien delgado de temperatura efectiva ($10\,800\text{K} \leq T_{\text{eff}} \leq 12\,500\text{K}$) y gravedad superficial ($7.8 \leq \log g \leq 8.8$). Pulsan en modos de gravedad de bajo grado armónico ($\ell \leq 2$) y orden radial bajo o intermedio, con períodos entre 100 y 1200 s. En particular, se han realizado varios estudios teóricos acerca de la posible presencia de modos radiales o modos p no radiales en estrellas enanas blancas DA (Vauclair 1971; Saio et al. 1983), los cuales tendrían períodos del orden de los 10 s. Sin embargo, hasta ahora, no se han detectado modos de alta frecuencia en enanas blancas DA (Silvotti et al. 2007).

A lo largo de la banda de inestabilidad pulsacional, las estrellas ZZ Ceti se pueden agrupar en dos categorías: Las estrellas que se encuentran cerca del borde azul, a temperaturas efectivas altas, y las más frías, que se encuentran cerca del borde rojo. Las ZZ Ceti azules muestran espectros de pulsación con pocos modos excitados y períodos cortos. Las variaciones en luminosidad son de baja amplitud y las curvas de luz tienen una forma sinusoidal. Por otro lado, en el borde rojo, las estrellas ZZ Ceti exhiben espectros muy ricos, con muchos modos excitados y períodos más largos. Las curvas de luz tienen una estructura más compleja, con variaciones de gran amplitud, donde aparecen armónicos y combinaciones de frecuencias de modos reales. En particular, existe una correlación entre la temperatura efectiva y los períodos de

pulsación excitados en las estrellas ZZ Ceti, tal que los períodos detectados son más largos para estrellas más frías (Mukadam et al. 2006).

El mecanismo de excitación que actúa en las estrellas DA variables, se cree es el mecanismo $\kappa - \gamma$ asociado al pico en la opacidad debido a la ionización parcial de hidrógeno (Dolez & Vauclair 1981; Dziembowski & Koester 1981; Winget et al. 1982a). Por otro lado, Brickhill (1991) propuso un mecanismo de excitación alternativo, llamado *convective driving*, asociado a la presencia de la región convectiva exterior (Goldreich & Wu 1999).

Actualmente, existe una fuerte evidencia observacional que indica la pureza de la banda de inestabilidad de las estrellas ZZ Ceti (Winget & Kepler 2008), es decir, que todas las estrellas enanas blancas DA que se encuentran dentro de la banda de inestabilidad serían estrellas pulsantes, convirtiendo a las ZZ Ceti en una etapa de la evolución por la cual pasarían todas las estrellas enanas blancas DA. La determinación observacional de la banda de inestabilidad está ligada a dos factores. El primero corresponde a la precisión y sensibilidad de las curvas de luz, dadas por el límite de detección de los instrumentos utilizados. Y el segundo, a la precisión con que se determinan la temperatura efectiva y la gravedad superficial. Hasta el momento, las observaciones confirman la pureza de la banda de inestabilidad de las estrellas ZZ Ceti.

Esta Tesis está dedicada al estudio de las estrellas enanas blancas DA variables utilizando herramientas astrosismológicas y basado en modelos evolutivos detallados. En particular, se analiza una muestra de estrellas ZZ Ceti brillantes o clásicas, aquellas anteriores al SDSS.

1.5.3. Identificación de modos

La determinación del valor de ℓ y m para los modos esferoidales mediante técnicas observacionales, es un aspecto muy importante desde el punto de vista astrosismológico, dado que es el nexo entre las observaciones y los modelos teóricos. La asignación de k , ℓ y m para un modo observado no es en general una tarea simple. En particular, el orden radial k no es una magnitud observada y la asignación del orden radial a un dado modo se realiza usualmente mediante un ajuste astrosismológico. Sin embargo, existen algunas técnicas para determinar observacionalmente el valor del grado armónico y del orden azimutal. La primera se relaciona con la influencia de la rotación sobre los períodos de pulsación. Como mencionamos en la sección 1.3.6, en presencia de rotación, la degeneración dada por la ausencia de un eje preferencial de simetría se rompe y las frecuencias se separan en sus $(2\ell + 1)$ componentes. De esta manera, los modos dipolares ($\ell = 1$) muestran tres componentes, los modos cuadripolares ($\ell = 2$) cinco componentes, etc. En algunos casos es posible asignar un valor de m a cada componente. También puede ocurrir que no todas las componentes de multiplete alcancen amplitudes observables, con lo cual no se observa el mutiplete completo.

También se puede determinar el valor de ℓ a partir del espaciamiento asintótico de períodos. Esta técnica es útil en el caso de los modos de gravedad, dado que $\Delta\Pi_\ell^g$ depende explícitamente del grado armónico (ver ec. 1.8). Comparando el valor

observado del espaciamiento medio de períodos consecutivos ($\Delta\Pi = \Pi_{k+1} - \Pi_k$) con el valor del espaciamiento asintótico $\Delta\Pi_\ell^a$, se puede obtener el valor de ℓ . Esta técnica también se utiliza para obtener una estimación de la masa estelar, dado que el espaciamiento asintótico de períodos para los modos de gravedad tiene una fuerte dependencia con este parámetro. Varios ejemplos de la aplicación de estas técnicas en estrellas enanas blancas pulsantes se pueden encontrar en los trabajos de Winget et al. (1991) y Kawaler et al. (1995) para las estrellas DOV PG 1159–035 y PG 2131+066, respectivamente, así como también en Winget et al. (1994) para la estrella DBV GD 358. Además Kawaler et al. (2004) y Handler et al. (2003) utilizaron una estimación del espaciamiento asintótico de períodos para determinar el valor del grado armónico de varios modos presentes en las estrellas PG 1701+427 (DOV) y PG 1654+60 (DBV), respectivamente. En particular, estas técnicas para la determinación de ℓ son muy útiles en los casos donde se cuenta con un gran número de períodos medidos, además de una buena resolución en frecuencia para poder separar las componentes de los multipletes. Esto ocurre en el caso de las enanas blancas DOV o DBV. Por lo general, en el caso de las enanas blancas DAV que se encuentran cerca del borde azul de la banda de inestabilidad, se cuenta con un número reducido de períodos observados, caracterizados por ordenes radiales bajos, con lo cual se debe recurrir a otras técnicas para la determinación de ℓ o m .

Robinson et al. (1995) diseñaron una técnica para la identificación de modos, llamada espectroscopía ultravioleta con resolución temporal⁷, basada en la dependencia de las amplitudes de oscilación con el obscurecimiento al limbo. Para un modo no-radial, la amplitud observada es un promedio sobre todas las regiones brillantes y oscuras en la superficie de la estrella. Como ya mencionamos, para modos de alto grado armónico, la superficie estelar queda dividida en muchas regiones de fase opuesta, dando lugar a un efecto de cancelación geométrica y a la reducción de la amplitud de variación observada. En el rango ultravioleta, a longitudes de onda cortas, el obscurecimiento al limbo es importante, tal que las superficie total de la enana blanca observada es menor, disminuyendo la cantidad de zonas en fase opuesta en brillo. De esta manera, las amplitudes para modos con ℓ altos son más grandes, dado que los efectos de cancelación geométrica son menores. En el rango óptico, el obscurecimiento al limbo es más débil y las amplitudes de pulsación para los modos de alto grado armónico se reducen. De esta manera, la amplitud en el ultravioleta difiere que aquella observada en el óptico de una forma que depende de valor de ℓ . Robinson et al. (1995) aplicaron esta técnica para determinar el grado armónico del modo dominante en la estrella ZZ Ceti G117–B15A, con un período en 215 s, que resultó ser un modo con $\ell = 1$. También fue aplicada a dos estrellas DAVs, G226–29 y G185–32, y a una estrella DBV, PG 1352+489, por Kepler et al. (2000), quienes obtuvieron una identificación $\ell = 1$ para todos los modos. En particular, G185–32 fue analizada por Castanheira et al. (2004) con la misma técnica, utilizando nuevas observaciones. Como resultado encontraron un espectro de modos con valores de $\ell = 1$ y 2. Nitta et al. (1998) emplearon esta técnica en la determinación del grado armónico para tres modos correspondientes a la estrella DBV GD 358, restringiendo el valor de ℓ a 1 o 2.

⁷*time-resolved ultraviolet spectroscopy*

Posteriormente, van Kerkwijk et al. (2000) y Clemens et al. (2000) propusieron una variante del método presentado por Robinson et al. (1995) para la determinación de ℓ . Este método está basado en los cambios en la amplitud de pulsación dentro de las líneas de Balmer únicamente en el rango óptico. En particular, estos autores aplicaron esta técnica de espectroscopía con resolución temporal en el óptico a la estrella DAV G29–38 y encontraron que cinco de las seis modos eran $\ell = 1$, mientras que el modo restante era $\ell = 2$. Recientemente, Thompson et al. (2008) estudiaron esta estrella utilizando la misma técnica. En su análisis confirmaron los resultados previos y añadieron cuatro nuevas identificaciones, que incluyen un modo $\ell = 2$ y un probable $\ell = 4$. Otras estrellas fueron analizadas utilizando la técnica de espectroscopía con resolución temporal en el óptico. Entre ellas, una DAV, HS 0507+0434B (Kotak et al. 2002), que muestra modos en su mayoría $\ell = 1$ y la estrella DBV GD 358 (Kotak et al. 2003) con un espectro de modos con el mismo valor del grado armónico, probablemente $\ell = 1$. Finalmente, Kotak et al. (2004) estudiaron la dependencia de las amplitudes de pulsación con la longitud de onda con modelos teóricos, y encontraron que el modo dominante de G117–B15A, en 215 s, es un modo dipolar, confirmando los resultados previos de Robinson et al. (1995). Por otro lado, no pudieron determinar con certeza el grado armónico del modo con período 272 s.

Finalmente, la presencia de armónicos o de combinaciones de frecuencias se puede utilizar para inferir el valor del grado armónico de los modos reales que los producen. En estrellas ZZ Ceti, los efectos no lineales que se observan en las pulsaciones, además de la dependencia del flujo con la temperatura (T^4), muestran una dependencia con la zona convectiva superficial (Brickhill 1992, Goldreich & Wu 1999), dando lugar a la presencia de armónicos y combinaciones de frecuencias, que a su vez dependen de la frecuencia, la amplitud, y el valor de ℓ y m de los modos originales, entre otros parámetros. Una ventaja es que esta técnica está basada en observaciones fotométricas solamente y no depende de la espectroscopía. Wu (2001) derivó expresiones aproximadas para las amplitudes de las combinaciones de frecuencias y armónicos en función de los distintos parámetros y comparó sus predicciones teóricas con las observaciones de combinaciones de frecuencias y armónicos en dos estrellas enanas blancas, GD 358 y G29-38, encontrando una buena correspondencia. De la misma forma, Yeates et al. (2005) aplicaron esta técnica a ocho estrellas ZZ Ceti cercanas al borde azul de la banda de inestabilidad para determinar el valor del grado armónico de los modos reales.

1.6. Astrosismología de estrellas ZZ Ceti

1.6.1. Breve Reseña Histórica del Modelado de las Estrellas ZZ Ceti

El modelado con fines astrosismológicos de estrellas enanas blancas DA, comienza con Tassoul et al. (1990), quienes presentaron una grilla de modelos representativos de estrellas DA y DB, cubriendo un amplio espacio de parámetros. Las propiedades pulsacionales de estos modelos fueron exploradas poco después en una serie de importantes trabajos por Brassard et al. (1991, 1992ab). Estos modelos fueron por varios

años los modelos de referencia en el área de la astrosismología de enanas blancas DA y DB. Sin embargo, estos modelos sufren de algunos defectos importantes. El primero es que poseen núcleos de carbono puro, cuando los cálculos evolutivos predicen una mezcla de carbono y oxígeno en proporciones variables dependiendo de la masa estelar. Por otro lado, las transiciones químicas están modeladas bajo la hipótesis de equilibrio difusivo bajo la aproximación de *trace element*. Esta aproximación da lugar a cambios abruptos en el perfil químico que se traducen en picos pronunciados en la frecuencia de Brunt-Väisälä, haciendo que los efectos del atrapamiento de modos sean exagerados (Córscico et al. 2002ab). Este conjunto de modelos fue empleado en estudios asterosismológicos de las estrellas DA G226–29 (Fontaine et al. 1992) y GD 154 (Pfeiffer et al. 1996). Una versión actualizada de los modelos presentados por Tassoul et al. (1990), aunque con las mismas desventajas, fueron utilizados para análisis astrosismológicos de las estrellas HLTau 76 (Pech. et al. 2006) y G185–32 (Pech & Vauclair 2006).

El siguiente conjunto de modelos representativos de enanas blancas DA fue presentado por Bradley (1996). Estos modelos cuentan con una ecuación de estado y opacidades actualizadas (OPAL) (Wood 1992; Bradley et al. 1993). La primera mejora fue una composición del núcleo dada por una mezcla de carbono y oxígeno en proporciones variables que van desde un núcleo de carbono puro a uno de oxígeno puro. Además las interfaces químicas se modelan en forma más realista. En particular, la interfase de helio/hidrógeno se modela como una doble exponencial de acuerdo con las predicciones del equilibrio difusivo. Una simplificación importante proviene del perfil tipo rampa con el que se modela la transición de carbono/oxígeno en la frontera exterior del núcleo central. Estos modelos fueron utilizados en estudios astrosismológicos de las estrellas ZZ Ceti G29-38 (Bradley & Kleinman 1997), G117–B15A y R 548 (Bradley 1998), L19–2 y GD 165 (Bradley 2001) y G185–32 (Bradley 2006).

Una mejora importante en el modelado de las enanas blancas DA fue introducida unos años después por el grupo de Evolución y Pulsaciones Estelares de La Plata (ver por ejemplo Córscico et al. 2002a y Benvenuto et al. 2002a). Estos autores consideraron procesos de difusión dependiente del tiempo para modelar la transición química de helio/hidrógeno, que incluye los procesos de asentamiento gravitacional y difusión química (Althaus & Benvenuto 2000). A partir de un estudio de las propiedades de atrapamiento de modos, demostraron que la hipótesis de equilibrio difusivo bajo la aproximación de *trace element* era inapropiada para modelar la forma de las interfaces químicas en estrellas enanas blancas. El perfil del núcleo central fue extraído de los cálculos evolutivos de Salaris et al. (1997) y escaleado de acuerdo con el valor de la masa estelar. Una diferencia importante entre estos modelos y aquellos presentados por Bradley (1996) es la ausencia de una zona de carbono puro, rodeando el núcleo central. En su lugar, aparece una región rica en carbono y oxígeno. Aunque los modelos de Córscico et al. (2002a) constituyeron un gran avance en el modelado de enanas blancas DA, no son modelos evolutivos, sino que provienen de modelos iniciales obtenidos de manera artificial. Estos modelos fueron empleados en el estudio astrosismológico de G117–B15A (Benvenuto et al. 2002a).

Más recientemente, Castanheira & Kepler (2008, 2009) realizaron un estudio as-

trosismológico sobre una muestra de 87 estrellas ZZ Ceti, incluyendo la mayoría de las estrellas ZZ Ceti clásicas y otras descubiertas en el marco del SDSS. Para ello emplearon modelos de enanas blancas similares a los de Bradley (1996), provenientes de modelos iniciales artificiales en etapas previas a la fase de enana blanca. La forma de la interface de helio/hidrógeno está modelada según las predicciones de la difusión dependiente del tiempo (Althaus et al. 2003), mientras que la composición central se mantiene constante en 50 % de carbono y 50 % de oxígeno. El resultado más importante de estos trabajos es tal vez la predicción de la existencia de un rango de espesores para la envoltura de hidrógeno. Los resultados astrosismológicos indican un rango de $10^{-4} \gtrsim M_H/M_* \gtrsim 10^{-10}$, sugiriendo la existencia de un conjunto de enanas blancas DA con envolturas más delgadas que aquellas predichas por la evolución estelar estandar.

Finalmente, casi al mismo tiempo que los trabajos de Castanheira & Kepler (2008, 2009) pero de manera independiente, Bischoff-Kim et al. (2008a) presentaron un estudio astrosismológico aplicado a las estrellas ZZ Ceti G117–B15A y R 548, utilizando modelos similares a los empleados por Castanheira & Kepler (2008, 2009) pero con perfiles del núcleo extraídos de los cálculos evolutivos de Salaris et al. (1997). Los resultados obtenidos por estos autores se encuentran en buen acuerdo con los resultados previos, aunque la masa estelar y la temperatura efectiva astrosismológicas de G117–B15A resultan ser algo altas. Estos modelos fueron utilizados en el estudio astrosismológico de la estrella ZZ Ceti KUV 02464+3239 por Bognár et al. (2009). Posteriormente, Bischoff-Kim et al. (2009) utilizó una versión simplificada, con un perfil de rampa para la transición externa del núcleo de carbono y oxígeno, para el estudio de dos estrellas ZZ Ceti que exhiben muchos períodos, G38–29 y R808.

Es importante notar la ausencia en la literatura de modelos de estrellas enanas blancas DA con una estructura interna detallada y consistente, desde el núcleo hasta la envoltura y producto de cálculos evolutivos completos desde la Secuencia Principal de Edad Cero (ZAMS), imprescindibles a la hora de realizar estudios astrosismológicos de estos objetos. Como explicaremos más adelante, esta es la motivación principal de esta Tesis.

1.6.2. Estudios Astrosismológicos Previos

A continuación presentamos un resumen de los resultados astrosismológicos de algunas estrellas ZZ Ceti que fueron objeto de estudios individuales.

- **G226–29:** El primer estudio astrosismológico aplicado a una estrella ZZ Ceti fue realizado por Fontaine et al. (1992) aplicado a G226–29. Esta estrella se encuentra entre las ZZ Ceti azules ($T_{\text{eff}} \approx 12\,300$ K) y muestra un único modo con período corto en ~ 109 s, correspondiente a la componente central de un triplete $\ell = 1$ (Kepler, Robinson & Nather 1983). En este primer ajuste, se determinó la masa estelar a partir de los parámetros espectroscópicos de temperatura efectiva y gravedad superficial utilizando los tracks evolutivos de Wood (1990) y a partir de allí, se encontró un modelo de mejor ajuste con una envoltura de hidrógeno $\log(M_H/M_*) = -4.4$ para una $T_{\text{eff}} = 14\,000$ K. Luego, Kepler et al. (1995), a partir de observaciones con el WET, confirmaron la existencia de un

triplete con $\ell = 1$, producto de la rotación de la estrella. Como resultado, obtuvieron una masa estelar de $\sim 0.70M_{\odot}$, una envoltura $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -4$ y un período de rotación de 8.9 horas. Finalmente, Castanheira & Kepler (2008), encontraron un modelo astrosismológico, a partir de un ajuste período a período, caracterizado por $M_{*} = 0.79M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -4.5$. Todos estos resultados apuntan a que G226–29 estaría caracterizada por una masa alta y una envoltura gruesa.

- **GD 165:** A partir de fotometría de alta velocidad, Bergeron et al. (1993) realizaron la primera estimación de los parámetros estructurales de GD 165 usando los períodos observados. En particular, a partir de los valores espectroscópicos de la temperatura efectiva y la gravedad superficial y los tracks de Wood (1990), obtuvieron una masa estelar de $M_{*} = (0.56 \pm 0.03)M_{\odot}$. Luego, utilizando el período más corto en ~ 120 s, obtuvieron dos posibles valores de la masa de la envoltura, dependiendo del valor de ℓ para este modo: $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -3.7 \pm 0.2$ si $\ell = 1$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -6.4 \pm 0.2$ si $\ell = 2$. Posteriormente, Bradley (2001) realizó un ajuste astrosismológico de GD 165, usando cuatro períodos observados, y obtuvo soluciones sismológicas con masas $M_{*} = 0.65 - 0.68M_{\odot}$, $M_{\text{H}}/M_{*} = (1.9 - 2) \times 10^{-4}$ y una composición central de C:O de 20:80.
- **GD 154:** Esta estrella ZZ Ceti forma parte del borde rojo de la banda de inestabilidad. Pfeiffer et al. (1996), a partir de una masa espectroscópica de $\sim 0.70M_{\odot}$, infirieron una envoltura delgada de $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -9.4$ usando el espaciamiento asintótico de períodos. Castanheira & Kepler (2009) también encuentran un modelo de mejor ajuste con una envoltura de hidrógeno delgada $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -9.5$, pero con una masa sismológica algo más alta, $M_{*} = 0.73M_{\odot}$.
- **G29–38:** El primer estudio astrosismológico de G29–38 fue realizado por Kleinman et al. (1998), basado en observaciones recopiladas durante diez años. Analizando el espaciamiento de períodos encontraron evidencia que apuntaba a un espectro dominado por modos con $\ell = 1$. De hecho, la mayoría de los multipletes resultaron tener tres componentes, en acuerdo con lo esperado en presencia de rotación. A partir del espaciamiento asintótico de períodos, y utilizando los modelos teóricos de Bradley (1996), encontraron una posible solución sismológica con $M_{*} = 0.6M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -4$, aunque el ajuste período a período no era muy bueno. Más recientemente, Castanheira & Kepler (2009) realizaron un ajuste astrosismológico aplicado a G29–38, utilizando el espectro de modos presentado por Kleinman et al. (1998), y encontraron una solución de mejor ajuste caracterizada por $M_{*} = 0.665M_{\odot}$ y una envoltura delgada $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -8$.
- **G117–B15A:** G117–B15A es la estrella arquetípica de la clase de pulsantes ZZ Ceti, y por lo tanto es también la más estudiada. Esta estrella muestra tres períodos reales de bajo orden radial, típico de estrellas del borde azul,

en ~ 215 s, ~ 270 s y ~ 304 s. El primer ajuste astrosismológico fue realizado por Bradley (1998), quien obtuvo dos familias de soluciones posibles con $M_* \approx 0.6M_\odot$, dependiendo del orden radial asignado a los tres modos observados: Si la identificación es $k = 1, 2, 3$, entonces $-\log(M_H/M_*) = 6.3 - 7.3$, y si $k = 2, 3, 4$ entonces $-\log(M_H/M_*) = 3.8 - 5$, siempre considerando que los tres modos son dipolares. Benvenuto et al. (2002b) encontró la misma ambigüedad en la solución astrosismológica. Estos autores eligieron la solución de envoltura gruesa ($\log(M_H/M_*) = -3.83$) dado que ajustaba mejor los valores espectroscópicos de la temperatura efectiva y la gravedad superficial. En particular, la masa sismológica para ambas familias resulta ser de $\sim 0.5M_\odot$. Estas dos familias de soluciones con envolturas de hidrógeno tan distintas también se obtiene en los trabajos recientes de Castanheira & Kepler (2008) y Bischoff-Kim et al. (2008). Las soluciones con envolturas delgadas están asociadas con una identificación del orden radial de $k = 1, 2, 3$, mientras que una identificación $k = 2, 3, 4$ se asocia con una envoltura gruesa. La masa sismológica resulta ser un poco más alta que en estudios previos, de $0.615M_\odot$ para el modelo de mejor ajuste de Castanheira & Kepler (2008) y de $0.60 - 0.68M_\odot$ para las soluciones de Bischoff-Kim et al. (2008a). En particular, según los resultados de Bischoff-Kim et al. (2008a), las soluciones de envoltura gruesa resultan tener una envoltura más delgada ($\sim 10^{-7}M_*$) que en estudios anteriores. En la sección 5.2 se realiza una descripción más detallada de los resultados sismológicos previos de esta estrella.

- **R 548:** Esta estrella fue la segunda enana blanca DA pulsante en ser descubierta, además de darle el nombre a la clase (R 548 = ZZ Ceti). El primer ajuste astrosismológico fue realizado por Bradley (1998), junto con G117–B15A. Usando dos modos en ~ 213 s y ~ 274 s, obtuvo la misma ambigüedad en la masa de hidrógeno remanente, que se observa en G117–B15A. Mediante un análisis de las componentes del *splitting* rotacional del modo con ~ 213 s y los valores de $C_{k\ell}$ este autor infirió un orden radial $k = 2$ para este modo, con lo cual privilegió la solución con envoltura gruesa ($\log(M_H/M_*) = -3.82$). Bischoff-Kim et al. (2008a), utilizando ahora cinco períodos observados, encontró una única familia de soluciones con $M_* \sim 0.62 - 0.65M_\odot$ y $-\log(M_H/M_*) = 7.4 - 8$. Por otro lado, Castanheira & Kepler (2009) encuentran una solución astrosismológica con una envoltura gruesa $-\log(M_H/M_*) = 4.5$ y una masa de $0.635M_\odot$. En particular, la identificación de ℓ y k para los modos no es la misma que en Bischoff-Kim et al. (2008a).
- **L19–2:** El primer ajuste astrisimológico de L19–2 fue realizado por Bradley (2001). Haciendo uso de la identificación del grado armónico de Bradley (1993) para los cinco modos, obtuvo un modelo sismológico con una masa de $0.72M_\odot$ y una envoltura de $\log(M_H/M_*) = -4$. Además, a partir del análisis del *splitting* rotacional, obtuvieron un período de rotación de 13 horas. Más recientemente, Castanheira & Kepler (2009) realizaron un nuevo ajuste astrosismológico obteniendo una solución similar a la de Bradley (2001).

- **G185–32**: La identificación del grado armónico para los modos que exhibe G185–32 no es algo que esté aún establecido (ver por ejemplo Castanheira & Kepler 2008). Bradley (2006) sugiere que el modo con período más corto es un modo con $\ell = 4$, obteniendo un modelo de mejor ajuste con $M_* = 0.63M_\odot$ y $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -5.7$. Pech & Vauclair (2006) obtienen un modelo astrosismológico con $M_* = 0.638M_\odot$ y $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -3.77$, sugiriendo que esta estrella pulsa, en su mayoría, en modos con $\ell = 2$. Por otro lado, Castanheira & Kepler (2008), utilizando una muestra de períodos observados algo distinta que Pech & Vauclair (2006), obtienen una solución astrosismológica con $M_* = 0.655M_\odot$ y $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -7$, con una temperatura efectiva ~ 900 K más baja.
- **HLTau 76**: HLTau 76 fue la primera estrella enana blanca pulsante en ser descubierta (Landolt 1968). Es una estrella más bien fría, con una buena cantidad de períodos observados. Pech et al. (2006) realizaron el primer ajuste de períodos, con una muestra de 12 modos, obteniendo un modelo astrosismológico con $M_* = 0.575M_\odot$ y $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -3.63$ y una temperatura efectiva cerca del borde rojo de la banda de inestabilidad ($\sim 11\,400$ K), en acuerdo con los valores espectroscópicos. Castanheira & Kepler (2008), utilizando 8 períodos observados, obtuvieron un modelo de mejor ajuste con una masa y temperatura efectiva similares a las de Pech et al. (2006), pero con una envoltura cuatro ordenes de magnitud más delgada.
- **KUV 02464+3239**: Esta estrella fue analizada recientemente por Bognár et al. (2009). Utilizando seis períodos observados encontraron un modelo de mejor ajuste con $M_* = 0.645M_\odot$, $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -5.2$, $T_{\text{eff}} = 11\,400$ K y una abundancia central de oxígeno de 90 %.
- **R808**: Esta estrella se encuentra en el borde rojo de la banda de inestabilidad. Primero fue analizada por Castanheira & Kepler (2009), dentro de un conjunto de ~ 80 estrellas ZZ Ceti. Utilizando una muestra de 8 períodos reales, obtuvieron un modelo astrosimológico con $M_* = 0.65M_\odot$, $T_{\text{eff}} = 11\,000$ K, y $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -9.5$. Poco después, Bischoff-Kim et al. (2009), utilizando observaciones de Thompson et al. (2009), realizaron un ajuste astrosimológico de R808 con un total de 18 modos. Como resultado obtuvieron un modelo con $M_* = 0.675M_\odot$, $T_{\text{eff}} = 11\,250$ K, y $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -4.62$, y con una composición central de oxígeno del 10 %. También calcularon un período de rotación de 18 horas.
- **G38–29**: G38–29 forma el borde rojo de la banda de inestabilidad de las ZZ Ceti junto con R808 y GD 154. El único estudio astrosismológico, hasta ahora, fue realizado por Bischoff-Kim et al. (2009). A partir de 15 modos clasificados como posibles modos reales por Thompson et al. (2009), obtuvieron un modelo de mejor ajuste con $M_* = 0.642M_\odot$, $T_{\text{eff}} = 11\,550$ K, y $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -4.16$. Este modelo es similar al modelo de mejor ajuste obtenido para R808, salvo que la abundancia central de oxígeno es del 80 %.

- **GD 244:** GD 244 fue analizada primero por Castanheira & Kepler (2009), obteniendo un modelo de mejor ajuste con $M_* = 0.68M_\odot$, $T_{\text{eff}} = 12\,200\text{ K}$, y $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -7$. Recientemente, Bognár & Paparó (2010), realizaron un nuevo ajuste restringiendo el grado armónico con los resultados de Yeates et al. (2005). Estos autores encontraron una familia de soluciones con $M_* = 0.63 - 0.65M_\odot$ y $-\log(M_{\text{H}}/M_*) = 5 - 6$, a una $T_{\text{eff}} \sim 11\,600\text{ K}$.

1.6.3. Propiedades del Conjunto de las Estrellas ZZ Ceti

Dado el gran número de estrellas que forman parte de la clase ZZ Ceti (148 miembros, Castanheira et al. 2010), resulta tentador analizar las propiedades de estas estrellas como un grupo. Aunque la estructura global de las enanas blancas DA debe ser aproximadamente la misma en todos los casos, es esperable encontrar cierta dispersión en la masa estelar y en la masa de la envoltura de hidrógeno. En este sentido, el estudio de las características de grupo puede dar información valiosa.

El primer estudio de las estrellas ZZ Ceti como una clase de estrellas pulsantes, luego del trabajo de McGraw (1977), fue realizado por Clemens (1993) con una muestra de ~ 20 objetos observados. En su análisis solamente consideró períodos identificados como reales, descartando las combinaciones de modos y la presencia de armónicos. Clemens encontró una relación entre los períodos y la temperatura efectiva, tal que los períodos excitados son más largos a medida que consideramos estrellas más frías. Esto es consecuencia del aumento en la escala temporal térmica a medida que la región de ionización parcial se hace más profunda. En particular, encontró que el período medio ponderado (WMP)⁸ es casi inversamente proporcional a la temperatura efectiva. Usando el WMP clasificó a las estrellas ZZ Ceti en calientes (WMP bajos) y frías (WMP altos). Analizando los espectros de períodos de las estrellas ZZ Ceti de la muestra, encontró que los períodos se pueden clasificar en seis grupos (ver fig. 6 y 7 de Clemens 1993) con períodos alrededor de $\sim 120, 200, 260, 300, 350$ y 400 s y con una identificación $\ell = 1, k = 1, \dots, 6$. Finalmente, comparando estos resultados con los modelos teóricos de la época, concluyó que la masa de la envoltura de las estrellas ZZ Ceti debería ser del orden de $\sim 10^{-4}M_*$. Este resultado se encuentra en contradicción con los ajustes astrosismológicos descritos en la sección anterior, para los cuales se obtuvieron valores de envoltura de hidrógeno en un rango de $-\log(M_{\text{H}}/M_*) \sim 4 - 10$.

Mukadam et al. (2006) realizaron un análisis de la clase de estrellas ZZ Ceti utilizando una muestra de ~ 80 enanas blancas DAV, 41 de las cuales fueron descubiertas por el SDSS. En este estudio confirmaron la dependencia del WMP con el enfriamiento, introduciendo esta relación como posible indicador de temperatura efectiva. En particular, sugieren una nueva clasificación para las estrellas ZZ Ceti, dependiendo del valor del WMP, como DAV calientes ($\text{WMP} < 350\text{ s}$), DAV intermedias ($350 < \text{WMP} < 650\text{ s}$), y DAV frías ($\text{WMP} > 650\text{ s}$).

Castanheira & Kepler (2008, 2009) realizaron el primer estudio astrosismológico de estrellas ZZ Ceti basado en una gran muestra de ~ 130 estrellas. Este grupo

⁸WMP = $\sum_i P_i A_i / \sum_i A_i$, donde P_i es el período y A_i la correspondiente amplitud (Clemens 1993).

comprende mayoría de las DAVs clásicas y un gran número de DAVs descubiertas en el marco del SDSS. Utilizando una amplia grilla de modelos sencillos (ver sección 1.6.1), cubriendo un amplio espacio de parámetros, realizaron ajustes de períodos de 87 estrellas, determinando en cada caso un modelo astrosismológico de mejor ajuste. Estos autores dividieron la muestra de estrellas ZZ Ceti en grupos, suponiendo que las estrellas que tienen una masa estelar, una temperatura efectiva y un espectro de períodos excitados similares, deben tener una estructura similar. Las estrellas ZZ Ceti que se encuentran cerca del borde azul se agruparon de acuerdo con el período excitado de mayor amplitud. Por último, utilizaron determinaciones independientes de temperatura efectiva y masa estelar para restringir las familias de soluciones astrosismológicas posibles. Como ya mencionamos, el resultado más importante del estudio de Castanheira & Kepler (2008, 2009) es la existencia de un rango de masas de la envoltura de hidrógeno, $-9.5 \leq \log(M_{\text{H}}/M_{*}) \leq -4$, con un valor medio en $M_{\text{H}}/M_{*} = 5 \times 10^{-7}$, casi dos ordenes de magnitud más bajo que el valor predicho por la evolución estelar. Esto implica que una fracción de las estrellas ZZ Ceti, y por lo tanto de las estrellas enanas blancas DA, sufren pérdidas de masa superiores a las consideradas por cálculos evolutivos estándar, durante las etapas previas a la curva de enfriamiento.

1.7. Motivación de esta Tesis

El estudio astrosismológico de las estrellas enanas blancas pulsantes, y en general de cualquier tipo de estrella variable, requiere de dos ingredientes fundamentales: observaciones y modelos teóricos. En los últimos años el número de descubrimientos de estrellas enanas blancas pulsantes ha aumentado vertiginosamente, debido al SDSS, constituyendo un gran avance en el área observacional. Por otro lado, observaciones con el WET han dado lugar a una mejora sustancial en las curvas de luz, y por consiguiente en la resolución en el espectro de períodos. La interpretación de las observaciones a partir de modelos teóricos es la otra mitad que completa el estudio de las estrellas pulsantes. Actualmente, existen dos enfoques teóricos distintos a la hora de analizar los resultados observacionales: 1) utilizando un gran número de modelos teóricos sencillos y estáticos, con una estructura interna simplificada, o 2) un número reducido de modelos representativos, pero con una estructura interna detallada, proveniente de cálculos evolutivos (Metcalf 2007).

Utilizando modelos sencillos se puede explorar un espacio de parámetros muy amplio, dado que el costo computacional para el cálculo de cada modelo es bajo. Si además se analiza una muestra de estrellas considerable, se puede obtener información sobre las propiedades generales, aún cuando los modelos tienen una estructura interna simplificada. Por ejemplo, Bischoff-Kim & Østensen (2011) realizaron un estudio pulsacional aplicado a una estrella DBV, utilizando la técnica de *fast white dwarf asteroseismology* (astrosismología rápida de enanas blancas), donde suponen y parametrizan el perfil interno de la composición química y construyen modelos estáticos.

En el marco de las estrellas ZZ Ceti, este enfoque fue utilizado por Castanheira & Kepler (2008, 2009). En este caso realizaron un ajuste astrosismológico de una

muestra de 87 estrellas enanas blancas DA. Los modelos teóricos provienen de modelos cuasi-estáticos en la etapa de pre-enana blanca, que luego se enfrían utilizando el código evolutivo descrito en Wood (1990). Los parámetros libres son la masa estelar, la temperatura efectiva y las masas de helio e hidrógeno remanente. La composición central se mantiene fija en 50 % de carbono y 50 % de oxígeno. Actualmente, los modelos representativos de estrellas enanas blancas DA presentan algún tipo de simplificación en el cálculo de la estructura interna (ver sección 1.6.1), ya sea en el núcleo o en la envoltura.

Aunque se puede obtener mucha información, en algún punto el uso de modelos simplificados comenzará a mostrar limitaciones. El siguiente paso es construir modelos detallados, que incorporen ingredientes físicos más precisos. Obviamente estos modelos requieren de un tiempo de cálculo superior a los anteriores y por lo tanto el espacio de parámetros explorado se ve limitado. El análisis es local, pero con modelos más realistas y más confiables. Para el cálculo de modelos detallados se deben tener en cuenta dos factores, el primero es la incorporación en los cálculos de ingredientes físicos detallados y actualizados. Un ejemplo reciente de este enfoque se puede encontrar en Córscico et al. (2004), aplicado al estudio de las diferencias astrosismológicas entre modelos parcialmente cristalizados de enanas blancas DAV con distintas composiciones centrales. El otro factor importante, es el cálculo de la evolución previa. Es decir obtener modelos de enanas blancas provenientes de estrellas progenitoras para las cuales se calcula toda la evolución previa. Esto representa un aspecto crítico a la hora de realizar un análisis astrosismológico aplicado a estrellas enanas blancas pulsantes, ya que provee de manera consistente el perfil químico interno, el cual se forma en las etapas previas a la curva de enfriamiento, especialmente en la etapa de combustión central de helio y en la etapa de pulsos térmicos. Este enfoque fue explorado por Althaus et al. (2005a), quienes calcularon la evolución completa de una estrella de $2.7M_{\odot}$ en la Secuencia Principal hasta la curva de enfriamiento, dando como resultado una enana blanca deficiente en hidrógeno. Estos modelos se utilizaron poco después para explorar las propiedades pulsacionales de las estrellas GW Virginis (ver, por ejemplo Córscico & Althaus 2006; Córscico et al. 2007ab).

En resumen, a la hora de realizar estudios astrosismológicos de estrellas enanas blancas pulsantes se han explorado dos enfoques distintos. El primero consiste en utilizar un gran volumen de modelos sencillos, que cubren ampliamente el espacio de parámetros, masa, temperatura efectiva, masa de hidrógeno, masa de helio, abundancia central de carbono y oxígeno, etc. Este enfoque permite obtener algunas inferencias globales de las propiedades de las estrellas enanas blancas. El segundo enfoque consiste en calcular un número reducido de modelos evolutivos, pero con un tratamiento detallado de los procesos que dan lugar a la estructura interna. Aunque el espacio de parámetros es limitado, la física detallada permite obtener información específica y más confiable.

Lo ideal sería poder combinar ambos enfoques, calculando un volumen considerable de modelos teóricos, pero considerando ingredientes físicos detallados, y provenientes de cálculos evolutivos completos para la estrella progenitora. En esta Tesis se realiza el primer paso en esta dirección. Con este fin, calculamos un conjunto relativamente grande ($\sim 20\,000$) de modelos de estrellas enanas blancas DA con

perfiles químicos del núcleo y envoltura en forma consistente, para varios valores de la masa estelar, apropiados para ajustes astrosismológicos detallados de estrellas ZZ Ceti. Estos perfiles resultan de la evolución completa de estrellas progenitoras desde la ZAMS, pasando por la etapa de pulsos térmicos en la AGB, y utilizando un tratamiento de la difusión química dependiente del tiempo durante la evolución en la etapa de enana blanca. Además, exploramos el potencial de este conjunto de modelos realizando ajustes astrosismológicos de una muestra de 45 estrellas ZZ Ceti, obteniendo en cada caso un modelo sismológico representativo. Dado el número considerable de estrellas analizadas, realizamos un análisis de las propiedades globales de las estrellas ZZ Ceti a partir de los resultados astrosismológicos.

En este capítulo se realiza una breve descripción de los códigos numéricos utilizados para los cálculos evolutivos y pulsacionales que se presentan en esta Tesis. Comenzamos con una breve descripción del código evolutivo LPCODE, el cual fue utilizado para el cálculo de todas las secuencias evolutivas completas. En particular, se realiza una descripción detallada de los ingredientes utilizados para el modelado en todas las etapas de la evolución estelar por el código LPCODE, haciendo especial hincapié en los detalles de modelado en la etapa de enana blanca. Luego se describe el código de pulsaciones adiabático, utilizado para el cálculo del espectro de períodos y demás cantidades pulsacionales, necesarias para el estudio de las estrellas enanas blancas variables.

2.1. Código Evolutivo

2.1.1. LPCODE

Los cálculos evolutivos presentados en esta Tesis fueron realizados con el código LPCODE. Este código fue desarrollado completamente por el Grupo de Evolución y Pulsaciones Estelares, en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas (Althaus et al. 2003). El código LPCODE ha sido empleado en numerosos estudios de estrellas compactas, como por ejemplo, en el estudio de las propiedades evolutivas de las estrellas enanas blancas de baja masa, así como en la formación y evolución de estrellas enanas blancas de tipo PG 1159, y estrellas de la rama horizontal extrema (Althaus et al. 2005b, 2009b; Miller Bertolami & Althaus 2006; Miller Bertolami et al. 2008). Más recientemente, se ha utilizado para estudiar la formación de enanas blancas *hot* DQ (Althaus et al. 2009a), la evolución de estrellas enanas blancas con núcleo de helio y progenitores de metalicidad supra-solar (Althaus et al. 2009c), y la evolución de enanas blancas deficientes de hidrógeno (Althaus et al. 2009d). Una descripción detallada del código LPCODE se puede encontrar en estos trabajos, así como también en los trabajos de Tesis Doctoral de Serenelli (2002) y Miller Bertolami (2009). A continuación describiremos brevemente el funcionamiento del código de

evolución estelar.

El código LPCODE está basado en un esquema tipo Henyey para el cálculo de la evolución estelar. Este tipo de esquema es el más difundido entre los códigos de evolución estelar. Para mayores detalles se recomienda consultar a Kippenhahn, Weigert & Hofmeister (1976). La implementación de dicho esquema en el código de evolución se realiza a través de una linealización implícita del sistema de ecuaciones de estructura y evolución de una configuración con simetría esférica (ver, por ejemplo, Kippenhan & Weigert 1990). Estas ecuaciones corresponden a la ecuaciones de equilibrio hidrostático, conservación de la masa, conservación de la energía y transporte de energía. El sistema algebraico resultante de dicha linealización se resuelve iterativamente utilizando el método de Newton-Raphson. La variable independiente es una variable de tipo lagrangiana definida como $\xi = \ln(1 - m_r/M_*)$ y las variables dependientes son el radio (r), la presión (P), la luminosidad (l) y la temperatura (T). Las condiciones de borde externas se especifican mediante integraciones de la envoltura, comenzando desde la fotosfera hacia el interior del modelo. Dados los valores de las distintas variables físicas a un tiempo t_n se pueden calcular las variables en un paso de tiempo Δt posterior, es decir a un tiempo t_{n+1} , como:

$$\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)} + \ln(1 + u_\theta) \quad (2.1)$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} + \ln(1 + u_p) \quad (2.2)$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \ln(1 + u_x) \quad (2.3)$$

$$l^{(n+1)} = l^{(n)} + u_l \quad (2.4)$$

donde $u_\theta = \Delta T/T^{(n)}$, $u_p = \Delta P/P^{(n)}$, $u_x = \Delta r/r^{(n)}$ y $u_l = \Delta l$ son las cantidades a ser iteradas, y $\theta = \ln T$, $p = \ln P$ y $x = \ln r$ son las variables dependientes en la forma adimensional dentro del código.

La composición química dentro de un modelo estelar está dada por un sistema de I ecuaciones diferenciales acopladas que describe la evolución temporal de las I especies químicas presentes, debida a los cambios en la composición por los procesos de combustión nuclear y de mezcla, como convección, difusión microscópica o por inestabilidades de Rayleigh-Taylor.

En los códigos evolutivos las ecuaciones de estructura no se resuelven en forma simultánea con las ecuaciones de composición química. En el código LPCODE el procedimiento iterativo para la resolución de las ecuaciones de estructura y evolución química se puede describir de la siguiente manera: Conociendo el valor de T , P , r y l a un tiempo t_n , se calcula la composición química a un tiempo t_{n+1} . Luego, con esta composición química, se calculan las variables de estructura a un tiempo t_{n+1} , para luego utilizarla en el cálculo de la composición química a t_{n+2} , y así sucesivamente. La resolución simultánea no es necesaria si se consideran pasos temporales pequeños, que además son necesarios para que la linealización de las ecuaciones siga siendo válida.

El tratamiento numérico de las ecuaciones de evolución química no es el mismo para las diferentes etapas evolutivas. En cada etapa distintos procesos físicos se vuelven más importantes a la hora de determinar la composición química.

Es importante aclarar que el código LPCODE fue utilizado para el cálculo completo de todas las secuencias evolutivas presentadas en esta Tesis, tanto en la etapa de enana blanca, como en todas las etapas previas de la evolución de la estrella progenitora.

2.1.2. Física Constitutiva

A continuación se enumeran los aspectos físicos relevantes para los cálculos evolutivos presentados en esta Tesis – ver Althaus et al. (2005a) para más detalles.

Las opacidades empleadas en los cálculos evolutivos son aquellas del proyecto OPAL (Iglesias & Rogers 1996) incluyendo composiciones ricas en carbono y oxígeno, complementadas a bajas temperaturas con las opacidades moleculares de Alexander & Ferguson (1994). Se adoptaron las opacidades conductivas de Cassisi et al. (2007) que cubren todo el régimen donde dichas opacidades son relevantes. Las tasas de emisión de neutrinos por reacciones de pares, producción de pares por fotones y Bremsstrahlung son aquellas de Itoh et al. (1996), mientras que para los procesos de plasma se utiliza el tratamiento presentado en Haft et al. (1994).

Respecto a la evolución de las especies químicas, el código evolutivo LPCODE considera el tratamiento simultáneo de los procesos de mezcla no instantánea y de combustión nuclear de los elementos. Específicamente, los cambios en las abundancias químicas son descritos por el sistema de ecuaciones:

$$\left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right) = \left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial t}\right)_{\text{nuc}} + \frac{\partial}{\partial M_r} \left[(4\pi r^2 \rho) D \frac{\partial\vec{X}}{\partial M_r} \right] \quad (2.5)$$

donde \vec{X} es un vector que contiene las abundancias de todos los elementos considerados. En esta ecuación el primer término describe la evolución nuclear y está completamente acoplado a los cambios en la composición química debidos a los procesos de mezcla, representados por el segundo término. La eficiencia de la mezcla convectiva está descrita por el coeficiente de difusión D , dado por la teoría de longitud de mezcla. La red nuclear está compuesta por 16 elementos: ^1H , ^2H , ^3He , ^4He , ^7Li , ^7Be , ^{12}C , ^{13}C , ^{14}N , ^{15}N , ^{16}O , ^{17}O , ^{18}O , ^{19}F , ^{20}Ne y ^{22}Ne , junto con las 34 tasas de combustión termonuclear correspondientes a las tres cadenas pp , el ciclo CNO, la combustión de helio y la ignición de carbono (Althaus et al. 2005a). Las tasas de las reacciones $^{12}\text{C} + p \rightarrow ^{13}\text{N} + \gamma \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e$ y $^{13}\text{C}(p, \gamma)^{14}\text{N}$ se obtienen del trabajo de Angulo et al. (1999). En particular, la tasa de reacción del proceso $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$, que es de especial relevancia en la estratificación del núcleo de carbono/oxígeno de la enana blanca resultante, es también aquella de Angulo et al. (1999).

Durante las etapas evolutivas previas a los pulsos térmicos en la Rama Asintótica de las Gigantes, se consideran los episodios de mezcla extra, más allá de cada borde convectivo, siguiendo la prescripción dada por Herwig et al. (1997). La presencia de episodios de mezcla extra es relevante para la estratificación química final de las enanas blancas, en particular durante las etapas tardías de combustión de helio (Prada Moroni & Straniero 2002, Straniero et al. 2003). En el código evolutivo se trata el proceso de mezcla extra como un proceso de difusión dependiente del tiempo,

suponiendo que las velocidades de mezcla decaen exponencialmente más allá de cada borde convectivo, con un coeficiente de difusión dado por

$$D_{\text{ME}} = D_0 \exp(-2z/fH_P) \quad (2.6)$$

donde H_P es la escala de altura de presión en el borde convectivo, D_0 es el coeficiente de difusión de las regiones inestables cerca de la frontera convectiva, y z es la distancia geométrica desde el límite del borde convectivo. Para todas las secuencias calculadas en esta Tesis se considera $f = 0.015$, un valor inferido a partir del ancho de la Secuencia Principal superior.

Durante la etapa de pulsos térmicos al final de la AGB, fueron suprimidos los procesos de mezcla extra. En particular, una reducción significativa de los procesos de mezcla extra en la base de la zona convectiva donde ocurre el flash termonuclear, estaría en acuerdo con simulaciones de patrones de abundancia correspondientes a los elementos producido en procesos lentos de captura de neutrones (Lugaro et al. 2003), así como también por inferencias observacionales de la relación masa inicial – masa final (Salaris et al. 2009). Como resultado, se espera que la masa del núcleo libre de hidrógeno de las secuencias calculadas aumente su tamaño gradualmente durante la evolución en la etapa de pulsos térmicos. Esto se debe a que, una reducción o supresión de los episodios de mezcla en la base de la región convectiva donde ocurre la inestabilidad termonuclear, inhibe la ocurrencia del tercer *dredge up*, favoreciendo el crecimiento del núcleo libre de hidrógeno. Las posibles implicaciones de este tratamiento se analizan en Renedo et al. (2010), Salaris et al. (2009) y Weiss & Ferguson (2009), para el caso de estrellas enanas blancas DA.

Se considera pérdida de masa durante la combustión central de helio y la rama de gigantes rojas siguiendo la prescripción de Schröder & Cuntz (2005). Durante las etapas de AGB y TP-AGB se considera la prescripción de Vassiliadis & Wood (1993). Para las secuencias evolutivas de estrellas enanas blancas DA, calculadas en esta Tesis, donde se suprime el tercer *dredge up*, la pérdida de masa tiene un rol dominante en la determinación de la masa final del núcleo libre de hidrógeno al final de la fase de pulsos térmicos. En particular, la pérdida de masa erosiona la envoltura rica en hidrógeno de la estrella, limitando así el crecimiento de la masa del núcleo durante la TP-AGB. Una situación distinta se obtiene si no se suprime el tercer *dredge up*. En este caso la masa final del núcleo al final de la fase de TP-AGB no es muy diferente de aquella en el primer pulso térmico (Weiss & Ferguson 2009), y el papel de la pérdida de masa es menos relevante.

Evolución en la Curva de Enfriamiento

Para los cálculos evolutivos en la curva de enfriamiento de las enanas blancas, la física constitutiva considerada en el código de evolución LPCODE fue revisada y actualizada respecto de estudios previos. Para el régimen de baja densidad se utiliza una versión actualizada de la ecuación de estado de Magni & Mazzitelli (1979), mientras que, para el régimen de alta densidad se utiliza la ecuación de estado de Segretain et al. (1994), la cual incluye los efectos de cristalización, considerando las contribuciones tanto de la fase líquida como de la fase sólida (Althaus et al. 2007).

Las opacidades radiativas y conductivas se obtienen de los trabajos de Iglesias & Rogers (1996) y Alexander & Ferguson (1994), respectivamente, como ya se mencionó. En particular, las opacidades conductivas se toman en cuenta para densidades más altas que aquellas donde los componentes químicos mayoritarios se encuentran completamente ionizados. Durante la fase de enana blanca la fracción de masa de los metales (Z) en la envoltura no está fija, sino que se especifica en forma consistente de acuerdo a las predicciones de la difusión química. De esta manera, se utilizan las tablas de opacidades OPAL para metalicidades arbitrarias. En el tratamiento de la convección se utiliza el formalismo de la teoría de longitud de mezcla, dada por la parametrización ML2 (Tassoul et al. 1990).

Durante la evolución en la etapa de enana blanca, varios procesos físicos modifican la distribución de las abundancias químicas a lo largo de la estrella. En particular, en los cálculos presentados en esta Tesis, se toman en cuenta los cambios en el perfil químico de las capas más externas de la estrella dados por los procesos de difusión. Como resultado, las secuencias desarrollan una envoltura pura en el elemento más liviano, en este caso hidrógeno, cuyo ancho aumenta gradualmente a lo largo de la evolución en la curva de enfriamiento. Se consideran los procesos de asentamiento gravitacional y de difusión química de ^1H , ^3He , ^4He , ^{12}C , ^{13}C , ^{14}N y ^{16}O (Althaus et al. 2003). No se considera levitación radiativa dado que es relevante solamente para temperaturas efectivas altas. El tratamiento de la difusión dependiente del tiempo utilizado está basado en un tratamiento de un gas de muchas componentes presentado por Burgers (1969). En el código de evolución LPCODE, la difusión comienza a operar una vez que se alcanza el límite de vientos a altas temperaturas efectivas (Unglaub & Bues 2000). Suponemos que esto ocurre cuando la gravedad superficial del modelo es $g > g_{\text{dif}}$, donde $g_{\text{dif}} = 7$ si $T_{\text{eff}} > 90\,000$ K y $g_{\text{dif}} = 6.4 + T_{\text{eff}}/150\,000$ K si $T_{\text{eff}} < 90\,000$ K. Para gravedades superficiales menores la pérdida de masa por vientos es suficientemente alta para suprimir los procesos de difusión química. Otro proceso responsable de cambios en la composición química de las estrellas enanas blancas es la separación de fase de un plasma de carbono y oxígeno por cristalización. En este caso, la liberación de energía gravitacional resultante tiene un efecto importante sobre los tiempos de enfriamiento de las enanas blancas. También se deben tener en cuenta los efectos de combustión nuclear residual, sobre todo en las etapas de alta temperatura, así como también la mezcla convectiva. En particular, la liberación de energía por la reacción pp se considera hasta $\log(L/L_{\odot}) \simeq -4$. Finalmente, se considera la rehomogeneización química del perfil interno de carbono/oxígeno inducida por la inestabilidad de Rayleigh-Taylor siguiendo la prescripción de Salaris et al. (1997). Estas inestabilidades se deben a la presencia de gradientes positivos en el peso molecular que aparecen en la frontera externa del núcleo de carbono/oxígeno, debido a la acción de la convección durante la combustión central de helio.

Por último, se incluye la existencia de fuentes de energía producto de la cristalización del núcleo de la estrella. Esto comprende la liberación de calor latente y de energía gravitacional asociadas con el cambio del perfil de carbono y oxígeno inducido por la cristalización. La inclusión de estas fuentes adicionales de energía se realiza en forma completamente consistente y acoplada con el conjunto completo de ecuaciones de evolución estelar. Es decir, se calcula la estructura y evolución de la

enana blanca considerando el cambio en el perfil químico y con la ecuación para la luminosidad apropiadamente modificada para tener en cuenta la contribución local de la energía liberada por la redistribución química en el núcleo y por el calor latente. Esto constituye una mejora respecto de los cálculos previos presentados por Salaris et al. (2000), para incluir la energía liberada por la separación de fase en códigos de evolución estelar. En resumen, en cada paso evolutivo se calcula la temperatura de cristalización imponiendo $\Gamma = 180$, donde $\Gamma = \langle Z^{5/3} \rangle e^2 / a_c k_B T$ es la constante de acoplamiento de ion, a_c es la distancia entre electrones, y también teniendo en cuenta la composición química correcta del fluido. El cambio en la composición química resultante de la separación de fase se calcula usando el diagrama de fase de Segretain & Chabrier (1993). Luego de calcular la composición química de las fases líquida y sólida, se evalúa la energía neta liberada en el proceso siguiendo la prescripción de Isern et al. (1997), y sumando la contribución del calor latente, de orden $0.77k_B T$ por cada ion, que es usualmente más pequeña. En el caso de los modelos de estrellas enanas blancas DA, dado que la temperatura de cristalización está relacionada con la masa estelar, las estrellas más masivas cristalizan el núcleo a temperaturas efectivas más altas. Entonces, solamente las secuencias de mayor masa alcanzan la temperatura de cristalización dentro de la banda de inestabilidad de las estrellas ZZ Ceti.

2.2. Código de Pulsaciones

Para realizar los cálculos de pulsaciones en la aproximación adiabática, se utilizó el código de pulsaciones no radiales adiabáticas. Este código, desarrollado en el Grupo de Evolución Estelar y Pulsaciones por el Dr. Córscico en el marco de su Tesis Doctoral (Córscico 2003), ha sido empleado en numerosos estudios pulsacionales de estrellas enanas blancas variables. Algunos resultados publicados se pueden encontrar en Córscico et al. (2001) y Córscico & Benvenuto (2002). Una versión actualizada se empleó en el estudio sismológico de estrellas GW Virginis (Córscico & Althaus 2006; Córscico et al. 2006, 2007ab, 2008, 2009ab). Además se empleó en estudios adiabáticos de otras estrellas compactas como las subenanas B (Romero 2007; Miller Bertolami et al. 2011).

El código de pulsaciones adiabático está basado en una modificación de la técnica de Newton-Raphson generalizada presentada en Kippenhahn, Weigert & Hofmeister (1967) para resolver un conjunto de ecuaciones en diferencias que representan las ecuaciones diferenciales de oscilaciones no-radiales, lineales y adiabáticas para estrellas esféricamente simétricas. Este sistema de ecuaciones está dado por las ecuaciones (A.53)-(A.56) del Apéndice A. El sistema de ecuaciones adimensionales (A.53)-(A.56), junto con las condiciones de contorno adecuadas en el centro y la superficie de la estrella (ec. A.61 y A.62), constituye un problema lineal de autovalores de cuarto orden, el cual en general se debe resolver numéricamente. Un esquema detallado de la resolución numérica empleada en el código de pulsaciones adiabático se puede encontrar en Córscico & Benvenuto (2002), así como en Córscico (2003).

Para cada modo, el código de pulsaciones calcula la frecuencia adimensional ω_k , donde k es el orden radial del modo correspondiente, y las autofunciones adimensionales y_1 , y_2 , y_3 y y_4 (ecs. A.51). A partir de estas cantidades básicas, el código de

pulsación calcula los períodos de pulsación, Π_k ,

$$\Pi_k = 2\pi/\sigma_k \quad (2.7)$$

la energía cinética de oscilación, E_{kin} ,

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(GM_*R_*^2)\omega_k^2 \int_0^1 x^2 \rho \left[x^2 y_1^2 + x^2 \frac{\ell(\ell+1)}{(C_1\omega_k^2)^2} y_2^2 \right] dx, \quad (2.8)$$

la función de peso, W_k ,

$$W_k(x) = (4\pi GR_*^2) \frac{x^2 \rho^2}{U} \left[A^* y_1^2 + V_g (y_2 - y_3)^2 - \frac{1}{U} [\ell(\ell+1)y_3 + y_4]^2 \right], \quad (2.9)$$

y finalmente, los coeficientes de *splitting* rotacional, C_k ,

$$C_k = \frac{(GM_*R_*^2)}{2E_{\text{kin}}} \int_0^1 \frac{x^2 \rho}{C_1} \left[2x^2 y_1 y_2 + \frac{x^2}{C_1 \omega_k^2} y_2^2 \right] dx. \quad (2.10)$$

Los coeficientes involucrados en las ecuaciones anteriores se encuentran definidos en el apéndice A.

2.2.1. Tratamiento de “Ledoux modificado”

Para el cálculo de la frecuencia de Brunt-Väisälä, el código de pulsaciones adiabático emplea el tratamiento de “Ledoux modificado” (Tassoul et al 1990) generalizado en forma apropiada para incluir los efectos de tener tres especies nucleares (oxígeno, carbono y helio) variando en abundancia (Kawaler & Bradley 1994). En este tratamiento numérico la contribución a la frecuencia de Brunt-Väisälä debida a cualquier cambio en la composición química está contenida casi completamente en el término de Ledoux B . En particular, este método es útil para inferir los pesos relativos que tiene cada una de las regiones de transición química sobre las propiedades de atrapamiento de modos del modelo. Específicamente, la frecuencia de Brunt-Väisälä se calcula como:

$$N^2 = \frac{g^2 \rho}{p} \frac{\chi_T}{\chi_\rho} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla + B) \quad (2.11)$$

y

$$B = -\frac{1}{\chi_T} \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{X_i} \frac{d \ln X_i}{d \ln p} \quad (2.12)$$

donde

$$\chi_T = \left[\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right]_p, \quad \chi_\rho = \left[\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right], \quad \chi_{X_i} = \left[\frac{\partial \ln p}{\partial \ln X_i} \right]_{\rho, T, X_{j \neq i}} \quad (2.13)$$

CAPÍTULO 3

Modelos Evolutivos de Estrellas Enanas Blancas DA

En este capítulo se describen las propiedades evolutivas y estructurales de los modelos de estrellas enanas blancas obtenidos en este trabajo. Los resultados presentados aquí han sido publicados en Renedo et al. (2010) y Althaus et al. (2010b).

3.1. Secuencias Evolutivas

Brevemente, la evolución comienza en la Secuencia Principal durante la cual la estrella quema hidrógeno en helio en el núcleo en forma estable. Esta etapa es una de las más largas en la vida de la estrella, siendo el tiempo de vida en la Secuencia Principal de $\sim 10^{10}$ años para una estrella de $1M_{\odot}$ y de $\sim 2 \times 10^8$ años para una estrella de $5 M_{\odot}$. Luego de la etapa de combustión central de hidrógeno, la estrella evoluciona hacia la región de las gigantes rojas, donde comienza la combustión central de helio. En esta etapa se construye la composición de carbono y oxígeno que caracterizará a la futura enana blanca. Una vez finalizada esta etapa, la evolución sigue hacia la AGB. Aquí la cáscara de helio en combustión se vuelve inestable y la estrella sufre una serie de inestabilidades térmicas comúnmente conocidas como Pulsos Térmicos. A medida que prosigue la evolución en la AGB la masa del núcleo de carbono y oxígeno aumenta considerablemente debido a la capa de helio en combustión que se mueve hacia el exterior. Además, la mayor parte de la envoltura de hidrógeno se eyecta al medio interestelar como resultado de las fuertes pérdidas de masa. Cuando la masa de la envoltura remanente alcanza $10^{-3}M_{\odot}$, la estrella evoluciona rápidamente hacia temperaturas efectivas más altas, alcanzando el dominio de las nebulosas planetarias. Cuando la envoltura remanente se reduce a $\sim 10^{-4}M_{\odot}$, la generación de energía nuclear es prácticamente nula. La luminosidad superficial decrece rápidamente y la estrella entra en la curva de enfriamiento de las enanas blancas.

Dada la ausencia de fuentes de energía nuclear, la evolución de la enana blanca está regida por la liberación de energía gravitacional y térmica – ver por ejemplo Althaus et al. (2010a) para los detalles de las fuentes de energía en la etapa de enana blanca. Dado que los electrones del núcleo están degenerados, la contracción, aunque

Tabla 3.1: Masas estelares iniciales y finales (en unidades solares). Masa total de hidrógeno y helio remanente en la enana blanca. Tiempos de vida en la Secuencia Principal (en Gyrs). Masa total que pierde la estrella en la AGB. La masa del contenido remanente de hidrógeno y helio se toman en el punto de máxima temperatura efectiva al comienzo de la curva de enfriamiento de las enanas blancas.

M_{ZAMS}	M_{WD}	$\log M_{\text{H}}$	$\log M_{\text{He}}$	t_{MS}	ΔM_{AGB}
1.00	0.525	-3.586	-1.589	9.040	-0.104
1.50	0.570	-3.839	-1.703	2.236	-0.795
1.75	0.593	-3.950	-1.851	1.444	-1.081
2.00	0.609	-4.054	-1.826	0.974	-1.357
2.25	0.632	-4.143	-1.957	0.713	-1.601
2.50	0.659	-4.244	-2.098	0.543	-1.825
3.00	0.705	-4.400	-2.270	0.341	-2.279
3.50	0.767	-4.631	-2.376	0.232	-2.688
4.00	0.837	-4.864	-2.575	0.166	-3.104
5.00	0.878	-4.930	-2.644	0.099	-4.029

no despreciable, es pequeña. Entonces, la estrella evoluciona a radio casi constante a lo largo de una línea diagonal en el diagrama H-R.

La evolución en el diagrama H-R para las secuencias evolutivas calculadas desde la ZAMS pasando por las etapas de combustión central de hidrógeno y helio, la etapa de pulsos térmicos en la AGB y finalmente por la curva de enfriamiento, donde se encuentran las estrellas enanas blancas DA, se muestra en la figura 3.1. También se indican algunas fases de la evolución.

En este estudio se calcularon diez secuencias evolutivas completas. El rango de masas en la ZAMS va desde $1M_{\odot}$ hasta $5M_{\odot}$, dando como resultado modelos de enanas blancas con masas desde $0.525 M_{\odot}$ hasta $0.878 M_{\odot}$. Notar que la secuencia de menor masa experimenta un sub-flash de hidrógeno antes de entrar en la curva de enfriamiento. En todos los casos se adoptó una metalicidad $Z = 0.01$, con $Y = 0.254$. Las masas iniciales en la ZAMS y la masa de la enana blanca para estas secuencias se pueden encontrar en la tabla 3.1. En esta tabla, también se incluyen los tiempos de vida en la Secuencia Principal, los cuales resultan ser más largos que aquellos publicados por Wiess & Ferguson (2009). Sin embargo, las diferencias son menores al 8 %, excepto en el caso de la secuencia de $1M_{\odot}$, el cual es un 25 % mayor. Una de las razones de esta discrepancia se debe al tratamiento simplificado de la ecuación de estado empleada en nuestros cálculos en las etapas evolutivas previas a la etapa de enana blanca. En la tabla 3.1 también se muestra la masa total residual de hidrógeno y helio presente en la enana blanca en el momento de máxima temperatura efectiva en el diagrama H-R. Lo que se observa es que la masa remanente de hidrógeno disminuye cuando aumenta la masa de la enana blanca, un resultado ya bien conocido. Para las secuencias calculadas la masa de hidrógeno varía un factor 20 en el rango de masas estelares considerado. Esta tendencia también se observa para la masa remanente

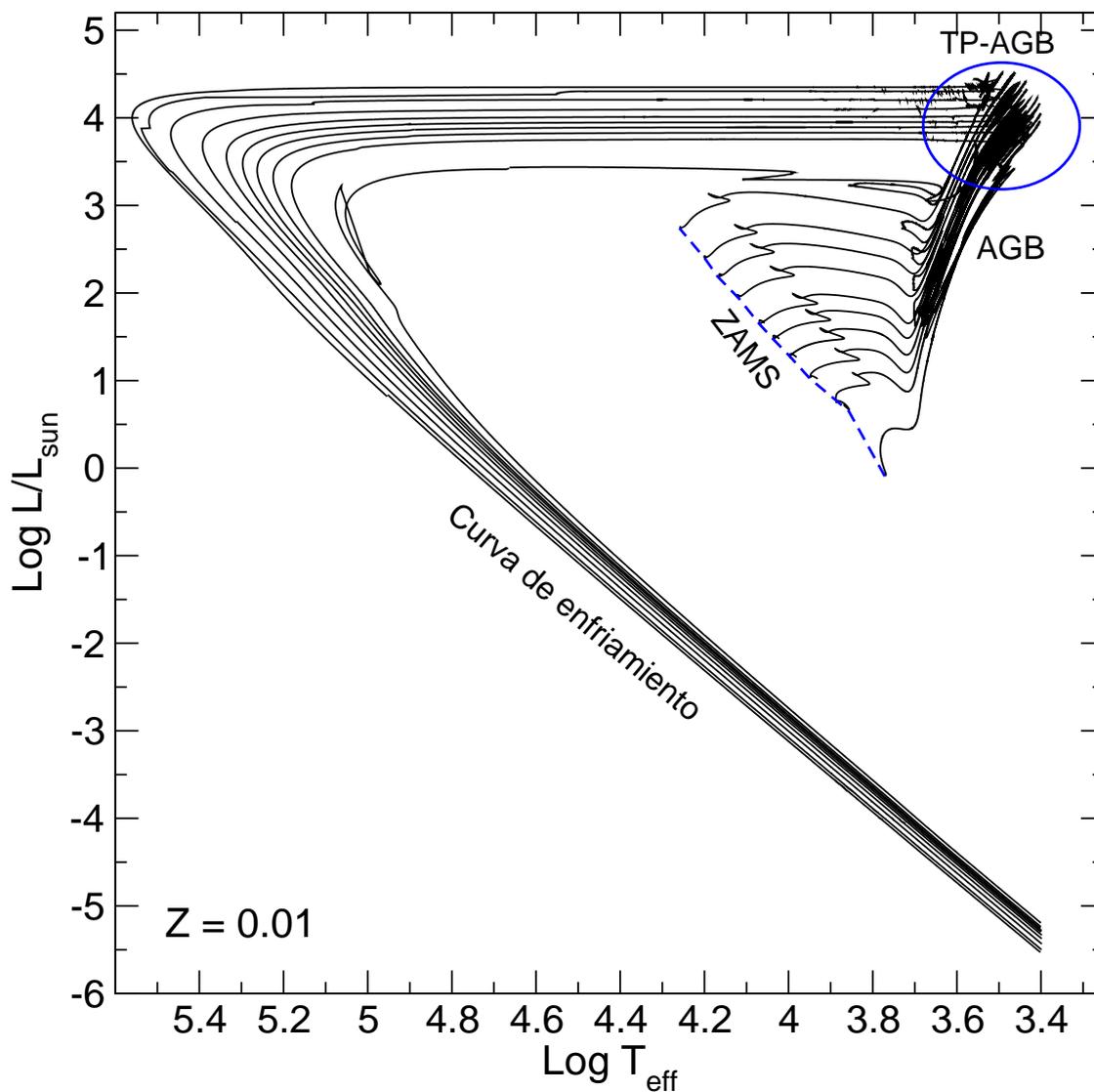


Figura 3.1: Diagrama de Hertzsprung-Russell para las diez secuencias evolutivas calculadas. Desde abajo hacia arriba las masas iniciales en la ZAMS son : $1.0 M_{\odot}$, $1.5 M_{\odot}$, $1.75 M_{\odot}$, $2.0 M_{\odot}$, $2.25 M_{\odot}$, $2.5 M_{\odot}$, $3.0 M_{\odot}$, $3.5 M_{\odot}$, $4.0 M_{\odot}$ y $5 M_{\odot}$. Los tracks evolutivos muestran la evolución desde la ZAMS (línea azul a trazos) hasta etapas avanzadas en la curva de enfriamiento de las enanas blancas. También se indica, con un círculo azul, la etapa de Pulsos Térmicos. Notar que la secuencia de menor masa experimenta un subflash de hidrógeno antes de entrar en la curva de enfriamiento.

de helio, que va desde 0.025 a 0.0022 M_{\odot} . Las masas remanentes de hidrógeno y helio que se muestran en la tabla 3.1 deben ser consideradas como límites superiores para el contenido máximo que permanece en la enana blanca como resultado de la evolución de una estrella aislada. Por ejemplo, la ocurrencia de un pulso térmico luego de que la estrella sale de la TP-AGB podría reducir considerablemente la masa de hidrógeno (Althaus et al. 2005a).

Por completitud se muestra en la figura 3.2 los tracks evolutivos de las secuencias calculadas en el plano $\log g - T_{\text{eff}}$ cuando ya se encuentran en la etapa de enana blanca. Además, se incluye una secuencia adicional, con una masa estelar de $0.548 M_{\odot}$ (ver capítulo 4). Con líneas rojas se indica el borde azul teórico de la banda de inestabilidad predicho por los cálculos no-adiabáticos de Fontaine et al. (2003) y Fontaine & Brassard (2008), así como también el borde azul empírico obtenido por Gianninas et al. (2005) en base a una muestra de estrellas ZZ Ceti clásicas. Los círculos azules indican la posición de 139 estrellas ZZ Ceti, que incluyen las estrellas DAV brillantes y las descubiertas en el marco del SDSS (Castanheira & Kepler 2008, 2009, B. Castanheira comunicación privada). A partir de este gráfico se observa que la mayoría de las estrellas ZZ Ceti de la muestra se encuentran dentro del rango de masas estelares consideradas en este estudio y están bien representadas por nuestros tracks.

3.2. Perfiles Químicos Internos

A continuación se describen las características estructurales y químicas de los modelos representativos de estrellas enanas blancas DA. Los perfiles químicos de algunos modelos seleccionados se presentan en la figura 3.3. En esta figura se grafican las distribuciones de las abundancias químicas para modelos representativos con masas estelares de 0.525, 0.609 y 0.878 M_{\odot} , en términos de la coordenada $-\log(1 - M_r/M_*)$. En particular, esta coordenada espacial expande la región de la envoltura. Para cada masa estelar se grafican, con líneas delgadas, las abundancias de los elementos químicos en etapas tempranas de la evolución en la curva de enfriamiento, mientras que con líneas gruesas se grafica la situación a etapas avanzadas de la evolución, cerca de la banda de inestabilidad de las estrellas ZZ Ceti.

En las regiones más externas de los modelos de enanas blancas, el perfil químico en etapas tempranas de la curva de enfriamiento se construye por la acción de procesos de mezcla convectiva y por combustión nuclear en una cáscara durante los pulsos térmicos, en la etapa de AGB. Sin embargo, el perfil químico en las regiones externas se ve modificado posteriormente por la difusión química, presente durante la evolución en la curva de enfriamiento. Este efecto es mucho mayor para los modelos de mayor masa, donde los procesos de difusión química y asentamiento gravitacional son notablemente más eficientes.

Los efectos de la evolución a través de los pulsos térmicos son claramente visibles, en particular por la formación de una región rica en helio, conocida como buffer de helio, y la zona rica en carbono y helio debajo del mismo, que surge a partir del episodio de mezcla en el último pulso térmico. La presencia de carbono en esta región rica en carbono y helio, que denominaremos transición O-C/He, está dada por

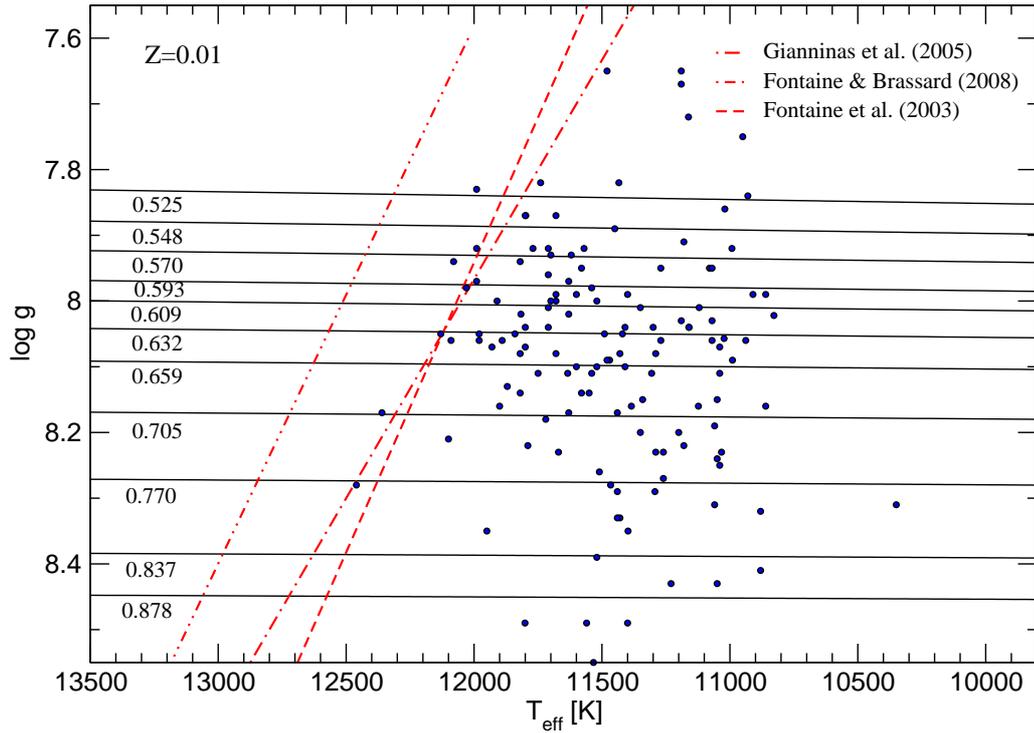


Figura 3.2: Tracks evolutivos en el plano $\log g - T_{\text{eff}}$ para las secuencias calculadas, en la etapa de enana blanca. En particular, se incluye una secuencia adicional de masa estelar $0.548M_{\odot}$ (ver capítulo 4). Con líneas rojas se indica la posición del borde azul de la banda de inestabilidad teórico de las estrellas ZZ Ceti según los trabajos de Fontaine et al. (2003) (ML1 $\alpha = 1$) y Fontaine & Brassard (2008) (ML2 $\alpha = 1$). También se indica el borde azul empírico obtenido por Gianninas et al. (2005) basado en una muestra de estrellas ZZ Ceti brillantes, anteriores al SDSS. Los círculos azules representan la posición de una muestra de 139 estrellas enanas blancas DA variables (Castanheira & Kepler 2008, 2009).

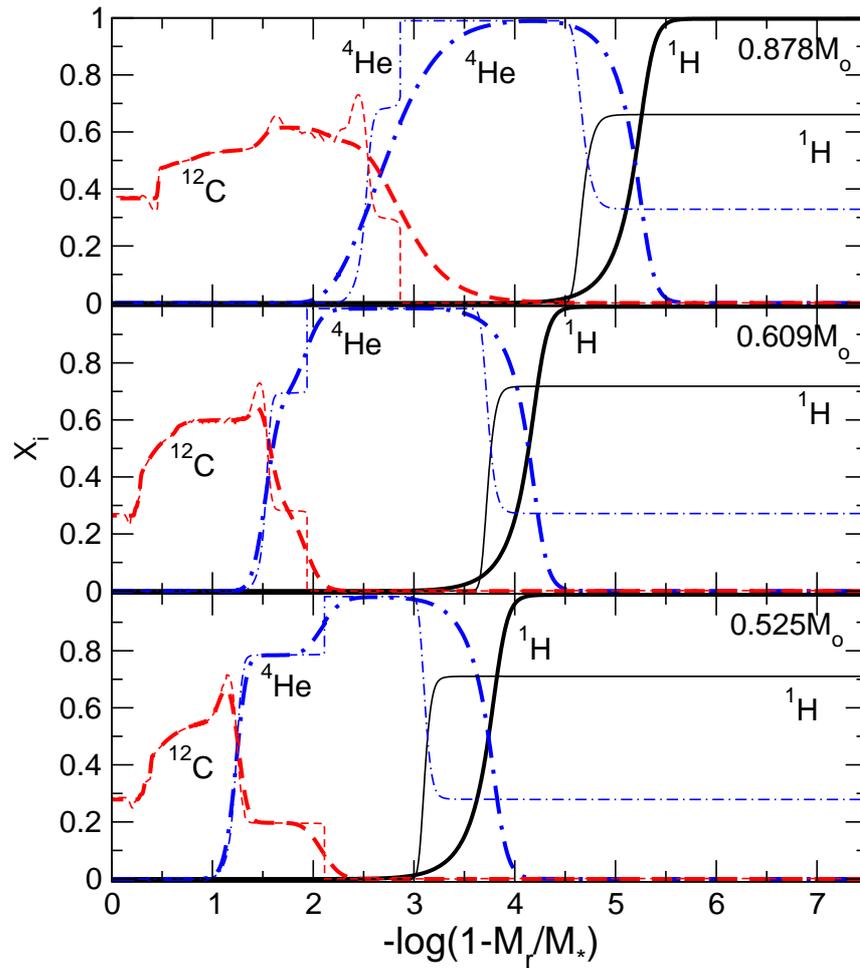


Figura 3.3: Abundancias químicas de hidrógeno, helio y carbono en términos de la fracción de masa externa para modelos seleccionados de enanas blancas con masas 0.878 , 0.609 y $0.525 M_{\odot}$ tomados en el punto de máxima temperatura efectiva (línea gruesa) y cerca del borde azul de la banda de inestabilidad de la estrellas ZZ Ceti (línea delgada).

el episodio de mezcla convectiva, de corta duración, que transporta carbono hacia capas más externas durante el máximo en la luminosidad de helio en el último pulso térmico, antes de abandonar la AGB.

En las etapas avanzadas en la evolución en la curva de enfriamiento, la difusión química ha modificado apreciablemente la distribución de abundancias dando lugar a la formación de una envoltura gruesa pura en hidrógeno, seguida de una extensión de la abundancia de hidrógeno hacia el interior del modelo.

En el caso de los modelos caracterizados por masas estelares altas, la difusión de elementos da lugar a una cantidad de carbono significativa en la zona del buffer de helio. Además, algunas cuasi-discontinuidades en las abundancias iniciales se ven suavizadas considerablemente por efectos de la difusión.

Un hecho importante que se puede extraer de la figura 3.3 es la dependencia con la masa estelar de la estratificación química esperada en las capas externas en las

estrellas ZZ Ceti. De hecho, para los modelos más masivos, los procesos difusivos modifican fuertemente la distribución de las abundancias químicas, erosionando la región de la transición C-O/He, debajo del buffer de helio para cuando el modelo ha evolucionado hasta alcanzar la banda de inestabilidad de las estrellas ZZ Ceti. Para modelos con masas menores ($M_* \lesssim 0.63M_\odot$), la difusión química no alcanza a remover completamente la estructura de la región de transición C-O/He. Esto se debe a que la difusión es menos eficiente en modelos menos masivos (con el subsecuente aumento de la escala temporal de difusión) y también porque la transición O-C/He es más ancha en estos modelos. Desde el punto de vista astrosismológico, esto no es un aspecto menor, dado que la presencia de una estructura de doble-capa en las zonas ricas en helio tendrá un impacto en el espectro de períodos de los modos g de las enanas blancas DAV, como es el caso de las estrellas enanas blancas DB variables (Metcalfe et al. 2003). Por otro lado, es importante aclarar que el ancho de la región de doble-capa también depende, en cierta forma, del número de pulsos térmicos experimentados por la estrella progenitora al final de la AGB.

En la parte más interna se observa que las abundancias de carbono y oxígeno muestran un perfil constante, resultado de la convección durante la combustión central de helio. Esto se puede observar en más detalle a partir de la figura 3.3, donde se grafican las abundancias de carbono y oxígeno, en términos de la coordenada M_r/M_* , para los modelos tomados cerca de la banda de inestabilidad de las ZZ Ceti ($T_{\text{eff}} \approx 12\,000\text{ K}$) que se muestran en la figura 3.4. En esta etapa la rehomogenización por inestabilidades de Rayleigh-Taylor ya ha suavizado los picos en los perfiles internos. En la frontera exterior del núcleo central se observan los indicios de una cáscara de helio en combustión moviéndose hacia la superficie del modelo, posterior a la combustión central de helio. El decrecimiento en la abundancia de oxígeno en esta región se debe a que la temperatura es más alta en la cáscara en combustión. Allí la reacción 3α , que depende fuertemente con la temperatura ($\epsilon \sim T^{40}$), domina sobre la reacción $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)\text{O}^{16}$. Los saltos en las abundancias son consecuencia de los procesos de mezcla extra más allá del borde convectivo. Notar que existe una dependencia de las abundancias centrales de carbono y oxígeno y de la posición de las transiciones químicas con la masa estelar. En particular, como se discutirá más adelante, el espectro de períodos de pulsación en modelos de estrellas enanas blancas es muy sensible a la forma y posición de las transiciones químicas dentro del modelo.

3.3. Relación Masa Inicial – Masa Final

Uno de los resultados más interesantes obtenidos a partir de los cálculos evolutivos realizados en esta Tesis está relacionado con la relación masa inicial - masa final teórica.

Comencemos analizando la abundancia central de oxígeno de los modelos representativos de enanas blancas DA. En la figura 3.5 se grafica la abundancia central de oxígeno (X_{O}) que resulta de la evolución en la etapa de combustión central de helio. En el panel superior se muestra X_{O} en términos de la masa del núcleo libre de hidrógeno justo antes del primer pulso térmico. El panel inferior muestra la abundancia central de oxígeno en términos de la masa inicial de la estrella progenitora

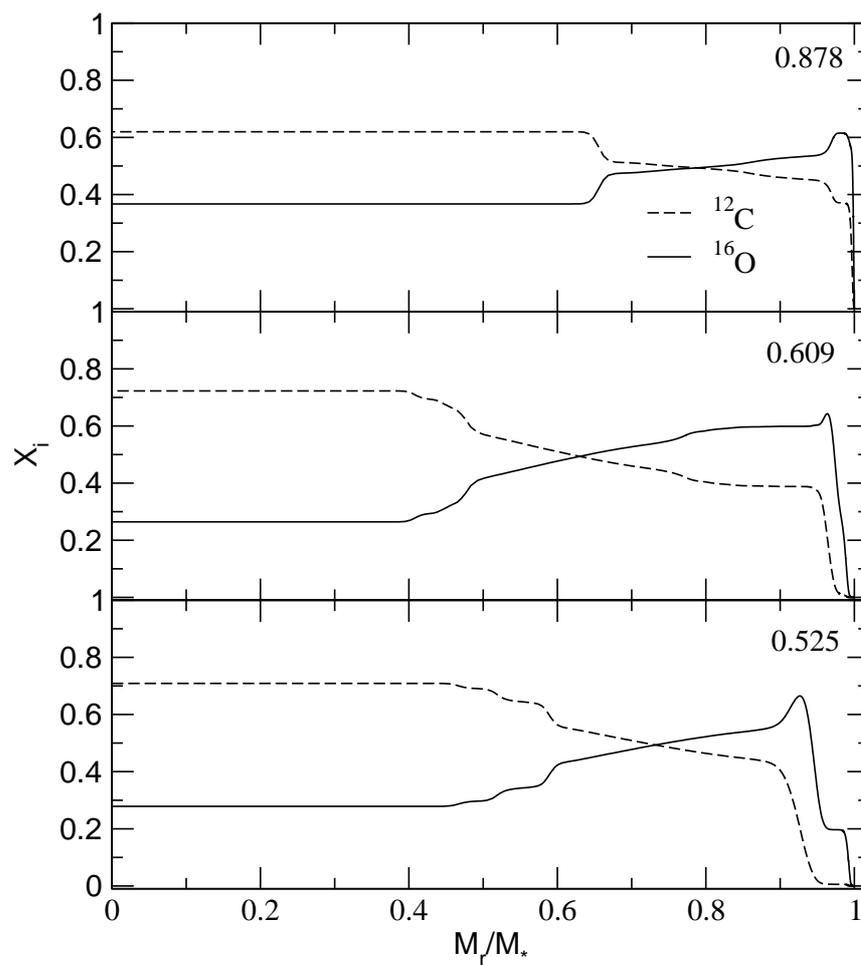


Figura 3.4: Abundancias internas de carbono y oxígeno para modelos seleccionados con masas 0.525, 0.609 y 0.878 M_{\odot} , a $T_{\text{eff}} \approx 12\,000\text{K}$, luego de la rehomogenización química por inestabilidades de Rayleigh-Taylor.

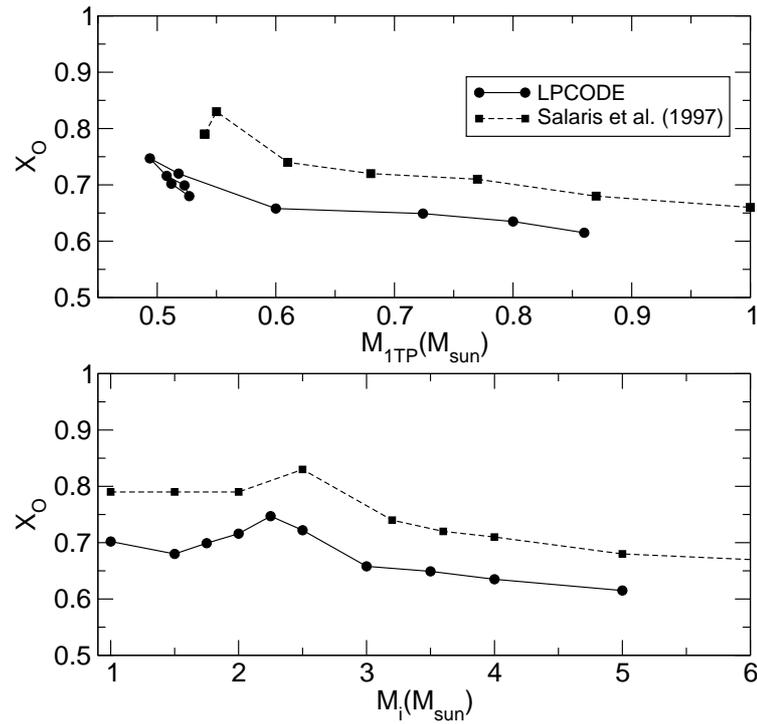


Figura 3.5: Abundancia central de oxígeno, en fracción de masa, resultante luego de la combustión central de helio en términos de la masa del núcleo libre de hidrógeno justo antes del primer pulso térmico (panel superior) y de la masa estelar inicial en la ZAMS (panel inferior). Con línea sólida se muestran los resultados obtenidos con LPCODE mientras que con línea a trazos se muestran aquellos de Salaris et al. (1997).

en la ZAMS. Los resultados obtenidos con LPCODE (línea sólida) se comparan con aquellos presentados por Salaris et al. (1997) (línea a trazos). En principio se observa un buen acuerdo entre ambos. Es importante recordar que el perfil del modelo de enana blanca depende tanto de la eficiencia de la tasa de reacción de $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)\text{O}^{16}$ como de la presencia de episodios de mezcla extra en etapas tardías de la combustión central de helio.

Notar que la abundancia central de oxígeno es sistemáticamente menor para los cálculos realizados con LPCODE. Esto se debe principalmente a la elección de la sección eficaz de la tasa de reacción $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)\text{O}^{16}$ dada por Angulo et al. (1999), la cual es más baja que la adoptada en los cálculos de Salaris et al. (1997), dada por Caughlan et al. (1985). Por otro lado, ambos conjuntos de modelos predicen un máximo en X_{O} para una masa inicial de $M \approx 2.5 M_{\odot}$.

En la figura 3.6 se muestran los resultados de la relación masa inicial – masa final obtenidos por distintos autores. En cada caso se grafica la masa del núcleo libre de hidrógeno en función de la masa inicial de la estrella progenitora en la ZAMS. Notar que un cálculo detallado en la etapa de pulsos térmicos en la AGB y la relación masa inicial–masa final resultante, son aspectos importantes cuando se quiere determinar la composición final de carbono y oxígeno en una dada enana blanca. Los resultados que se muestran en la figura 3.6 incluyen las predicciones de los cálculos evolutivos

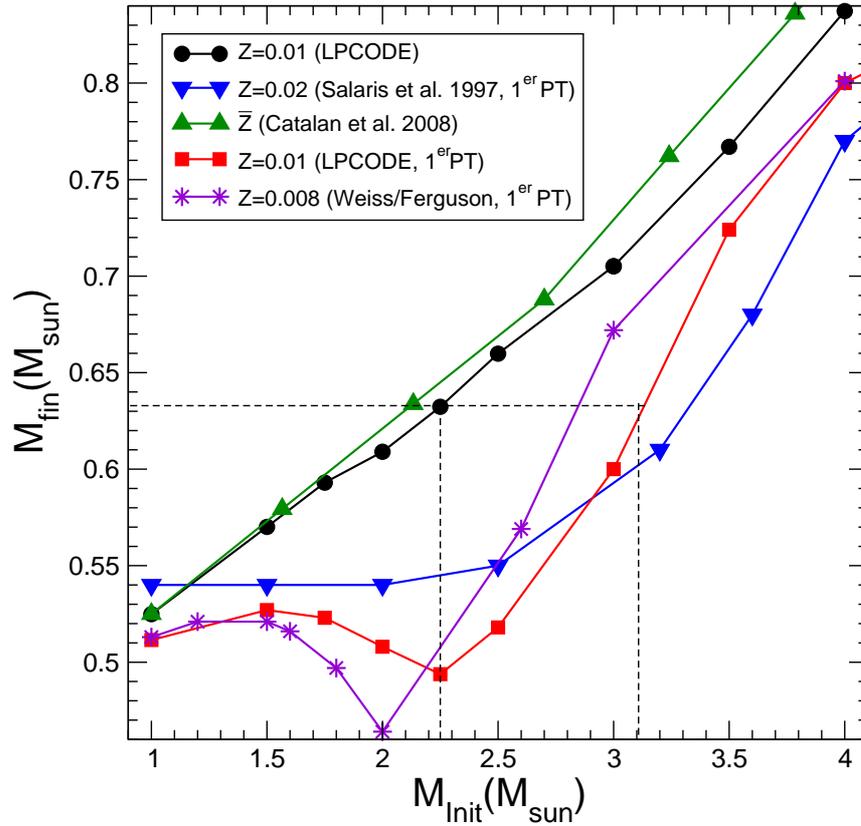


Figura 3.6: Relaciones masa inicial – masa final: La masa final, que se toma como la masa del núcleo libre de hidrógeno, se grafica en término de la masa inicial de la estrella progenitora. Además de los datos observacionales extraídos de cúmulos abiertos presentados por Catalán et al. (2008) (triángulos hacia arriba), se muestran las predicciones teóricas obtenidas a partir de los cálculos con LPCODE al final de la etapa de pulsos térmicos en la AGB y antes del primer pulso térmico (círculos y cuadrados, respectivamente). También se muestran las predicciones de Weiss & Ferguson (2009) y Salaris et al. (1997) tomadas antes del primer pulso térmico (estrellas y triángulos hacia abajo, respectivamente).

detallados realizados con el código evolutivo LPCODE, donde la masa final se toma como la masa del núcleo libre de hidrógeno al final de la etapa de pulsos térmicos (círculos) y antes del primer pulso térmico (cuadrados). A su vez se muestran los resultados presentados por Salaris et al. (1997) y Weiss & Ferguson (2009), donde la masa final se toma como la masa del núcleo libre de hidrógeno al comienzo del primer pulso térmico. Por último, se muestra la relación masa inicial – masa final obtenida en forma semiempírica por Catalán et al. (2008), basada en una muestra de enanas blancas de cúmulos abiertos con pares de movimiento propio común de metalicidades cercanas a $Z = 0.01$, que es la metalicidad adoptada para las estrellas progenitoras en nuestros cálculos.

Notar que la masa del núcleo libre de hidrógeno aumenta durante la etapa de pulsos térmicos. Como resultado la relación masa inicial – masa final en la TP-AGB es muy diferente de aquella determinada por la masa del núcleo libre de hidrógeno al

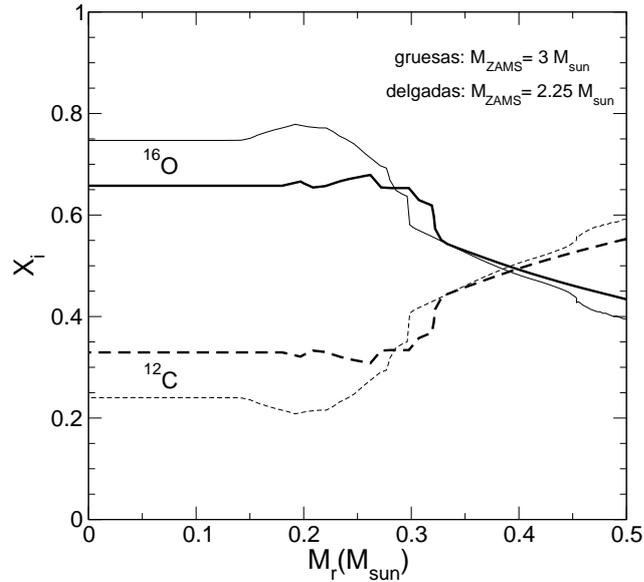


Figura 3.7: Abundancias internas de carbono y oxígeno, en fracciones de masa, para un modelo de enana blanca de $0.63 M_{\odot}$ resultante de dos progenitores diferentes que dan lugar a una enana blanca de la misma masa. Los perfiles químicos corresponden a estrellas progenitoras con masas estelares iniciales de 3 (línea gruesa) y $2.25 M_{\odot}$ (línea delgada), en etapas previas a la rehomogenización por inestabilidad de Rayleigh-Taylor.

comienzo del primer pulso térmico. Este es un aspecto muy importante a la hora de determinar la composición final de carbono/oxígeno en una enana blanca. De hecho, si se asume que la masa de la estrella enana blanca es esencialmente la masa del núcleo libre de hidrógeno, es claro que una enana blanca con una masa estelar dada podría corresponderse con valores diferentes de masa estelar de la estrella progenitora, dependiendo de la relación masa inicial–masa final adoptada. Por ejemplo, usando los resultados obtenidos con LPCODE, una enana blanca de $0.63 M_{\odot}$ correspondería a una estrella progenitora de masa inicial $2.25 M_{\odot}$ si se adopta la relación masa inicial – masa final donde la masa final se toma en etapas avanzadas de la evolución en los pulsos térmicos, o a $3 M_{\odot}$ si la masa de la enana blanca es la masa del núcleo libre de hidrógeno al comienzo del primer pulso térmico.

Una de las implicaciones de esta degeneración en el valor de la masa estelar de la estrella progenitora corresponde a la composición interna de carbono/oxígeno de la enana blanca resultante. Esto puede verse a partir de la figura 3.7. En esta figura se grafican las abundancias de carbono y oxígeno para un modelo de enana blanca con masa $0.63 M_{\odot}$ resultante de los dos progenitores posibles. En este caso no se considera el proceso de rehomogenización química por efecto de la inestabilidad de Raileigh-Taylor. Con línea gruesa se muestra el perfil químico para una estrella progenitora de $3 M_{\odot}$ de masa inicial, caracterizada por un núcleo libre de hidrógeno de $M = 0.63 M_{\odot}$ antes del primer pulso térmico. Las líneas delgadas muestran el perfil químico correspondiente a un progenitor de $2.25 M_{\odot}$ de masa inicial, que da lugar a una enana blanca de la misma masa que la anterior, luego de la evolución a

través de la etapa de pulsos térmicos al final de la AGB. Como se puede ver a partir de esta figura, los perfiles internos de carbono/oxígeno son diferentes para los dos casos considerados. En particular, la abundancia central de oxígeno es un 15 % menor para el caso donde se toma la masa de la enana blanca como la masa de núcleo libre de hidrógeno antes del primer pulso térmico. A partir de la figura 3.6 se puede ver que esta diferencia del 15 % es un límite superior, y sería menor para otros valores de la masa de la enana blanca.

Es claro que la relación masa inicial – masa final se debe tener en cuenta a la hora de determinar la composición interna de carbono/oxígeno de una estrella enana blanca. También se deben tener en cuenta si se pretenden estudiar, usando herramientas astrosismológicas, los procesos de mezcla y la eficiencia de la tasa de reacción $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$ en la etapa de combustión central de helio.

Es importante notar que una mayor abundancia de oxígeno aumenta la tasa de enfriamiento de una estrella enana blanca debido a que la capacidad calorífica es menor y a que mayores abundancias iniciales de oxígeno reducen la cantidad de energía liberada por separación de fase en la cristalización (Isern et al. 2000).

3.4. La Tasa de Reacción $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$

En esta sección exploramos el efecto de la tasa de reacción $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$ sobre la estructura interna estrellas enanas blancas DA.

A partir de los cálculos evolutivos, sabemos que la estructura química interna de las estrellas enanas blancas se forma en las etapas previas a la curva de enfriamiento, como resultado de las diferentes fases de combustión nuclear – ver sección 3.2. En particular, el perfil de las abundancias centrales de carbono y oxígeno están fijadas en la etapa de combustión central de helio. La determinación de la composición de carbono y oxígeno centrales es importante, entre otras cosas, para determinar los tiempos de enfriamiento de las enanas blancas. Las principales fuentes de incertidumbre asociadas a la composición final de carbono y oxígeno están dadas por la presencia de episodios de mezcla extra más allá de la frontera convectiva, y por las incertezas en la tasa de reacción $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$, durante la etapa de quema central de helio y la etapa posterior de combustión en una cáscara.

Contrario a lo que ocurre con la mayoría de las reacciones nucleares relevantes durante la vida de las estrellas, la reacción $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$ no muestra una dependencia fuerte con la temperatura, con lo cual, una extrapolación de esta tasa de reacción a energías estelares da lugar a grandes incertezas en la sección eficaz total del proceso (Kunz et al. 2002), que se traducen en incertezas en los procesos físicos que dependen de esta reacción. El estudio de las estrellas enanas blancas pulsantes puede emplearse para explorar los efectos de la tasa de reacción $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$. En particular, a partir de estudios astrosismológicos de estrellas enanas blancas pulsantes, se puede estimar la fracción de C/O centrales, que a su vez daría una pista acerca del valor de esta tasa de reacción nuclear.

Como ya mencionamos, en los cálculos evolutivos realizados en esta Tesis se utiliza la tasa de reacción dada por Angulo et al. (1999). Las incertidumbres teóricas asociadas con este valor van desde un factor ~ 0.6 hasta un factor ~ 1.4 del valor

Tabla 3.2: Abundancias centrales de ^{12}C y ^{16}O (en masa) en la etapa de enana blanca para los distintos valores de la tasa $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$. Los valores se toman luego de la rehomoginización de Rayleigh-Taylor. En la primera columna se muestra el factor por el cual se multiplica al valor dado por Angulo et al. (1999).

Factor	X_{C}	X_{O}
0.50	0.505	0.482
0.75	0.370	0.617
1.00	0.283	0.704
1.25	0.218	0.770
1.50	0.193	0.795

recomendado (Kunz et al. 2002). Para estudiar la dependencia de la composición química con la tasa de reacción $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$, se calcularon secuencias evolutivas completas adicionales con distintos valores de la tasa de reacción nuclear, desde la fase de combustión central de helio hasta la curva de enfriamiento, para una secuencia de masa inicial $1.75M_{\odot}$. Específicamente, se modificó la tasa de reacción nuclear dada por Angulo et al. (1999) multiplicándola por un factor entre 0.5 y 1.5, cubriendo ampliamente el rango de incertezas dado por Kunz et al. (2002). Los valores de las abundancias centrales de carbono y oxígeno resultantes se muestran en la tabla 3.2. El caso con factor 1 corresponde a la secuencia donde se considera la tasa de reacción recomendada por Angulo et al. (1999), utilizada en el cálculo de las secuencias evolutivas de estrellas enanas blancas DA de la grilla original. Los valores de las abundancias se toman luego de la rehomoginización por inestabilidades de Rayleigh-Taylor. A partir de estos resultados se puede ver que las abundancias centrales de carbono y oxígeno no pueden tomar valores arbitrariamente altos o bajos, sino que se encuentran en un rango bien definido. En particular, el núcleo debe ser una mezcla de carbono y oxígeno, donde la abundancia de carbono no puede superar el $\sim 50\%$ y la abundancia de oxígeno va desde ~ 0.48 hasta un máximo de ~ 0.8 . Notar que en el caso con factor 0.5 la abundancia central de carbono pasa a ser más alta que la abundancia central de oxígeno, contrario a lo que ocurre en los demás casos considerados. Además, una reducción de un $\sim 50\%$ de la tasa de reacción de $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$ se traduce en un decrecimiento de aproximadamente el 46% en la abundancia de oxígeno, mientras que, si se aumenta la tasa de reacción en un $\sim 50\%$, la abundancia central de oxígeno solamente aumenta en un $\sim 12\%$.

En la figura 3.8 se muestran los perfiles químicos de carbono y oxígeno en la etapa de enana blanca, producto de la evolución con una tasa de reacción modificada en un factor 1.25 y 0.5, en comparación con el caso con factor 1. Los modelos están caracterizados por una masa estelar de $0.593M_{\odot}$, una temperatura efectiva de $\sim 12000\text{K}$ y una envoltura con el máximo espesor permitido por los cálculos evolutivos. A partir de la figura 3.8 se observa que, no solo las abundancias centrales de carbono y oxígeno se ven afectadas por el cambio en la tasa de reacción nuclear, sino que la estratificación química interna también se modifica. En particular, la posición del borde del núcleo de C/O se desplaza hacia la superficie del modelo cuando se aumenta la tasa de reacción $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$, haciendo que la región rica en carbono

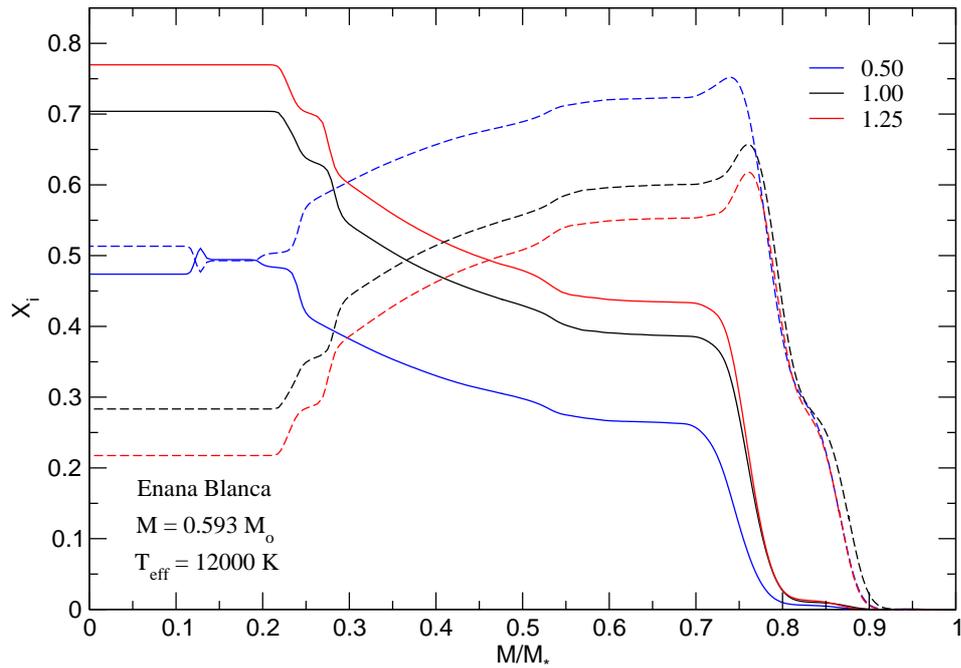


Figura 3.8: Perfiles internos de las abundancias de carbono (línea a trazos) y oxígeno (línea sólida) en la etapa de enana blanca, para los casos donde la tasa de reacción $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$ se aumenta en un factor 1.25 y se disminuye en un factor 0.5, comparados con el caso de factor 1. Los modelos están caracterizados por una masa estelar de $0.593 M_{\odot}$ y una $T_{\text{eff}} \sim 12000 \text{ K}$.

que se encuentra por encima del núcleo central, sea más delgada. Estas variaciones tendrán un efecto importante sobre el espectro de períodos de pulsación, los cuales son sensibles no solo al valor de las abundancias, sino a la estructura química interna en general.

A continuación se estudian las propiedades pulsacionales de los modelos evolutivos de estrellas enanas blancas. Además se describe la grilla de modelos utilizados posteriormente en ajustes astrosismológicos de estrellas ZZ Ceti. Por último se realiza una comparación con los modelos sismológicos más importantes de la literatura. Gran parte de los resultados presentados en este capítulo fueron publicados en Althaus et al. (2010b) y Romero et al (2012).

4.1. Modelos Evolutivos de Estrellas ZZ Ceti

Nuestros modelos representativos de estrellas enanas blancas DA son el resultado de cálculos evolutivos detallados de estrellas progenitoras con metalicidad solar ($Z = 0.01$). En total se calculó la evolución completa de diez secuencias evolutivas con masa inicial en el rango de $1-5 M_{\odot}$ desde la ZAMS, pasando por las etapas de pulsos térmicos y pérdida de masa en la AGB y finalmente por el dominio de las nebulosas planetarias. Una descripción detallada del método de cálculo y de la física involucrada se puede ver en el capítulo 2. Las propiedades evolutivas y estructurales de los modelos sismológicos se encuentra en el capítulo 3. Como resultado de estos cálculos se obtuvieron modelos representativos de estrellas enanas blancas con masas en el rango $0.525 - 0.878 M_{\odot}$.

Una secuencia adicional, con $M = 0.548 M_{\odot}$, fue calculada a partir de la interpolación de dos modelos evolutivos de pre-enana blanca caracterizados por masas estelares de 0.525 y $0.570 M_{\odot}$. Este procedimiento fue realizado a altas temperaturas efectivas, antes de que el modelo entrara en la curva de enfriamiento de las enanas blancas. De esta manera cualquier efecto transitorio producto de la interpolación desaparece cuando la estrella alcanza la banda de inestabilidad pulsacional. Una vez obtenido el perfil químico de un modelo inicial con $M_* = 0.548 M_{\odot}$ a alta temperatura efectiva, se calculó la evolución durante la curva de enfriamiento de la misma manera que para las secuencias restantes, utilizando el código evolutivo LPCODE.

Los valores de las masas estelares para las secuencias obtenidas se muestra en la tabla 4.1. Notar que el rango de masas estelares considerado en este estudio cubre

Tabla 4.1: Valores de la masa estelar para el conjunto de modelos de enanas blancas DA (primera fila) y de la masa de hidrógeno correspondiente a los diferentes espesores considerados para cada masa estelar. En la segunda fila se muestran los valores máximos para el espesor de la envoltura de hidrógeno para cada masa estelar de acuerdo con nuestros cálculos evolutivos.

M_*/M_\odot	0.5249	0.5480	0.5701	0.5932	0.6096	0.6323	0.6598	0.7051	0.7670	0.8373	0.8779
$\log(M_H/M_*)$	-3.62	-3.74	-3.82	-3.93	-4.02	-4.12	-4.25	-4.45	-4.70	-5.00	-5.07
	-4.27	-4.27	-4.28	-4.28	-4.45	-4.46	-4.59	-4.88	-4.91	-5.41	-5.40
	-4.85	-4.85	-4.84	-4.85	-4.85	-4.86	-4.87	-5.36	-5.37	-6.36	-6.39
	-5.35	-5.35	-5.34	-5.34	-5.35	-5.35	-5.35	-6.35	-6.35	-7.36	-7.38
	-6.33	-6.35	-6.33	-6.33	-6.34	-6.34	-6.35	-7.35	-7.34	-8.34	-8.37
	-7.34	-7.33	-7.34	-7.34	-7.33	-7.35	-7.33	-8.34	-8.33	-9.34	-9.29
	-8.33	-8.33	-8.31	-8.33	-8.33	-8.33	-8.33	-9.34	-9.33	—	—
	-9.25	-9.22	-9.33	-9.33	-9.25	-9.34	-9.33	—	—	—	—

ampliamente el rango de masas estelares correspondientes a la mayoría de las estrellas ZZ Ceti observadas.

El enfoque astrosismológico adoptado en esta Tesis consiste básicamente en el empleo de modelos detallados de estrellas enanas blancas caracterizados por ingredientes físicos muy precisos (Althaus et al. 2010b; Renedo et al. 2010). Estos modelos se obtienen calculando la evolución completa de la estrella progenitora. Este mismo enfoque fue aplicado con éxito a las estrellas DO variables, o GW Vir (Córscico et al. 2007a, 2007b, 2008, 2009b). Dado que la estratificación química final de una enana blanca está fijada en las etapas previas de su evolución, la historia evolutiva de la estrella progenitora es de vital importancia en el contexto de la astrosismología de enanas blancas.

El cálculo de modelos evolutivos detallados, demanda un tiempo de computo superior a otros estudios basados en modelos simplificados. Como resultado, la exploración del espacio de parámetros se ve severamente limitada. De hecho, en el caso de las estrellas enanas blancas DA solamente se tienen dos parámetros que pueden variarse en forma consistente: la masa estelar (M_*) y la temperatura efectiva (T_{eff}). En cambio, el espesor de la envoltura de hidrógeno (M_H), el contenido de helio (M_{He}), la forma del perfil de carbono/oxígeno del núcleo (incluyendo las proporciones precisas de oxígeno y carbono centrales) y el espesor de las transiciones químicas están fijados por la historia evolutiva de la estrella progenitora. Por este motivo, resulta conveniente poder cambiar algún parámetro adicional, además de la masa estelar y la temperatura efectiva de los modelos. En este trabajo se eligió variar el espesor de la envoltura de hidrógeno, dado que existen grandes incertidumbres relacionadas con el valor de este parámetro. De acuerdo con los cálculos evolutivos completos presentados en la sección 3.1 (Althaus et al. 2010b), el valor máximo para la masa de la envoltura de hidrógeno esperada en una enana blanca depende de la masa estelar y va desde $M_H/M_* \sim 2.4 \times 10^{-4}$ (para $M_* = 0.525 M_\odot$) hasta $M_H/M_* \sim 8.5 \times 10^{-6}$ (para $M_* = 0.878 M_\odot$) (ver la segunda fila de la tabla 4.1). La elección de M_H como parámetro adicional a variar no fue arbitraria, sino que tiene varias razones: primero, existe evidencia teórica convincente para creer que el contenido de hidrógeno en una enana blanca DA podría depender de los detalles de la evolución

previa. Por el contrario, no se espera una variación considerable del contenido de helio o en los perfiles internos de C/O debido a los detalles de la historia evolutiva previa, excepto si el origen de la enana blanca viene de un merger. De hecho, el contenido total de hidrógeno remanente en algunas enanas blancas DA podría ser varios órdenes de magnitud menor que aquel predicho por un tratamiento estándar de la evolución del progenitor. Por ejemplo, Althaus et al. (2005b) encontraron que M_{H} se reduce considerablemente si el progenitor experimenta un pulso térmico tardío poco después de abandonar la etapa de pulsos térmicos al final de la AGB. Segundo, la posición precisa de la transición externa He/H (y el valor de M_{H}) tiene un fuerte impacto en la estructura del espectro de períodos adiabático en una enana blanca DA (Bradley 1996). Finalmente, M_{H} es el parámetro más sencillo de modificar en los modelos calculados, sin necesidad de remover rasgos relevantes predichos por la evolución completa del progenitor.

Para obtener envolturas de hidrógeno con distintos espesores se siguió una receta simple. Para cada secuencia caracterizada por una dada masa estelar y un valor de M_{H} predicho por los cálculos evolutivos en la etapa de pre-enana blanca (segunda fila de la tabla 4.1), simplemente se reemplazó ^1H por ^4He en la base de la envoltura de hidrógeno. Este procedimiento fue realizado a altas temperaturas efectivas ($T_{\text{eff}} \gtrsim 90\,000\text{ K}$), de forma tal que los efectos transitorios no físicos asociados desaparecen mucho antes que el modelo alcance la banda de inestabilidad de las enanas blancas DA. Luego de este procedimiento artificial para cambiar el espesor de la envoltura, se permitió que la difusión dependiente del tiempo actúe mientras el modelo se enfriaba hasta alcanzar las temperaturas efectivas características de las ZZ Ceti. La presencia de procesos difusivos dió lugar a un perfil suavizado de la transición química de He/H. Los valores del contenido de hidrógeno resultantes para las diferentes envolturas se muestra en la tabla 4.1. También se muestra una representación gráfica de la grilla básica en la figura 4.1. En esta figura, los valores canónicos de M_{H} predichos por la evolución estándar se encuentran conectados con una línea naranja gruesa. Obviamente, más allá de la disponibilidad de modelos de esta grilla básica, se pueden calcular modelos de enanas blancas con valores arbitrarios de M_{H} para cada masa estelar, con el fin de refinar la grilla de modelos. Como veremos más adelante, algunas secuencias adicionales con valores específicos para el espesor de la envoltura de hidrógeno fueron calculadas con el fin de mejorar los ajustes astrosismológicos de algunas estrellas ZZ Ceti analizadas.

4.1.1. El Contenido de Helio en las Enanas Blancas DA

El objetivo en esta sección es mostrar, en el marco de los cálculos evolutivos estándar para la formación de una enana blanca DA, que el contenido de helio remanente no puede ser mucho más bajo que aquel predicho por los cálculos realizados en este trabajo. Con este fin, se calculó la evolución de una estrella de $2M_{\odot}$ de masa inicial en la ZAMS hasta la etapa de pulsos térmicos en la AGB. Para que el contenido total de helio de una estrella decrezca sustancialmente, esta debe experimentar un gran número de pulsos térmicos. Con este fin, se apagó la pérdida de masa en el código evolutivo LPCODE durante esta etapa de la evolución. El resultado de este

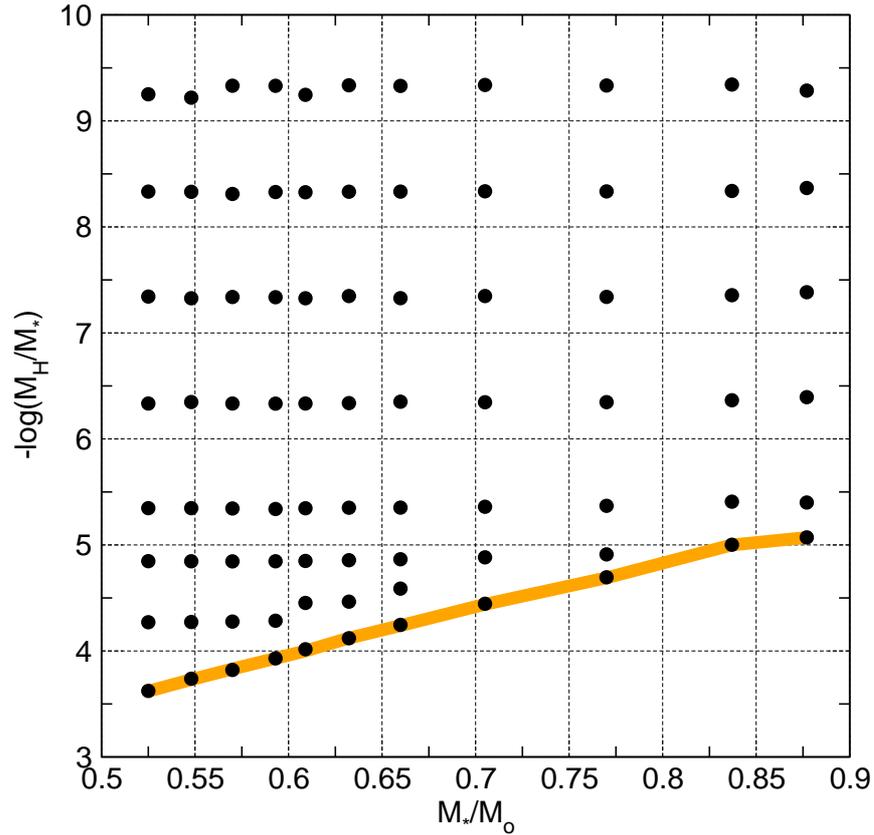


Figura 4.1: Grilla de secuencias evolutivas de estrellas enanas blancas DA calculadas, en el plano $M_* - \log(M_H/M_*)$. Cada círculo corresponde a una secuencia de modelos de enana blanca DA con valores de masa estelar y espesor de la envoltura de hidrógeno dados. Los círculos que están conectados con una línea gruesa (naranja) corresponden a los máximos valores del espesor de la envoltura de hidrógeno, predicho por los cálculos evolutivos. Para cada secuencia, se analizaron cerca de 200 modelos estelares, cubriendo el rango de temperatura efectiva de 14 000 – 9 000 K (.

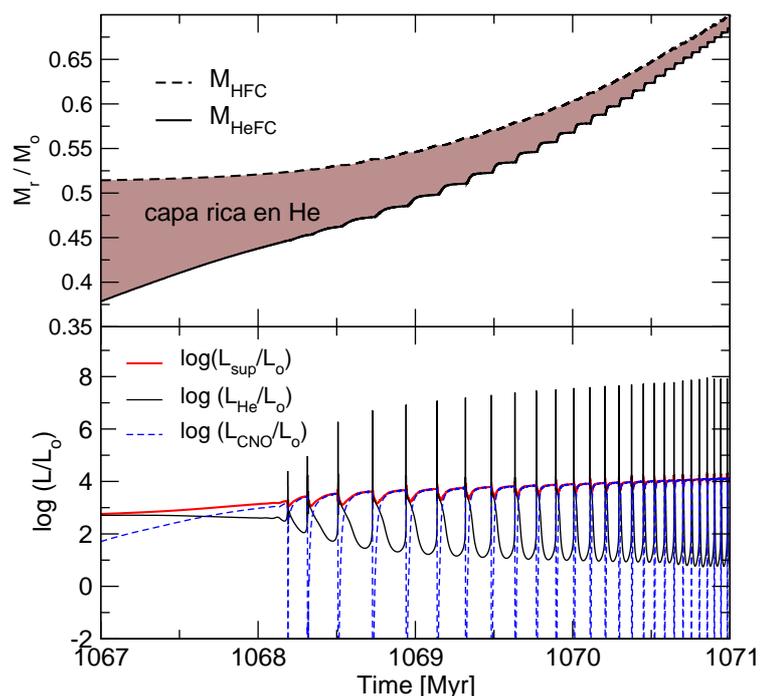


Figura 4.2: Panel superior: Cambio en el contenido de helio en la región entre los bordes de los núcleos libres de hidrógeno (HFC) y helio (HeFC) durante la fase de pulsos térmicos en la AGB. Panel inferior: evolución temporal de las luminosidades superficial, por combustión de helio y por combustión de hidrógeno en unidades solares, para una estrella con masa inicial de $2 M_{\odot}$ durante la etapa de pulsos térmicos en la AGB.

experimento se puede ver a partir de la figura 4.2, donde se muestra el contenido de helio en la región limitada por los bordes del núcleo libre de helio (HeFC) y el núcleo libre de hidrógeno (HFC), en términos del tiempo durante la fase de pulsos térmicos (panel superior), y las luminosidades superficial, por combustión de hidrógeno y por combustión de helio para cada pulso en esa fase (panel inferior). El cálculo se detuvo luego de que el objeto experimentara alrededor de 30 pulsos térmicos, lo cual es más que suficiente para los propósitos del experimento. Como resultado, el contenido de helio en el objeto decrece desde $M_{\text{He}}/M_{\odot} = 3.34 \times 10^{-2}$ (antes del primer pulso térmico) hasta $M_{\text{He}}/M_{\odot} = 8.6 \times 10^{-3}$ (antes del pulso número 30). Por lo tanto, la disminución del contenido de helio del núcleo libre de hidrógeno es un factor 3.89. Sin embargo, se debe tener en mente que esta reducción se debe principalmente a un aumento de la masa de la futura enana blanca, que crece desde $0.523 M_{\odot}$ hasta $0.7114 M_{\odot}$ entre los pulsos 1 y 30.

Este experimento muestra que la masa de helio remanente en una enana blanca DA podría ser, como mucho, un factor 2–3 menor que los valores predichos por cálculos evolutivos estándar, pero no 2 o 3 ordenes de magnitud menor, necesarios para que los modos g se vean afectados. Se puede concluir entonces que en el análisis astrosismológico de las estrellas ZZ Ceti se puede ignorar con confianza cualquier posible variación de M_{He} .

4.2. Propiedades Pulsacionales de Nuestros Modelos

Los cálculos de pulsaciones adiabáticas fueron realizados usando el código de pulsaciones no radiales descrito en la sección 2.2 (Córscico & Althaus 2006). En total se calcularon pulsaciones sobre $(11 \times 7 \times 200) = 15400$ modelos representativos de enanas blancas DA. En este valor se considera el número de masas estelares (11), la cantidad de espesores distintos de la envoltura de hidrógeno para cada secuencia (≈ 7) y el número de modelos (≈ 200) con temperaturas efectivas en el intervalo 14 000–9 000 K, respectivamente. Para cada modelo se calculó el espectro de períodos adiabático de modos g con $\ell = 1$ y $\ell = 2$ y períodos en el rango 80 – 2000 s. Este rango de períodos corresponde, en promedio, a $1 \lesssim k \lesssim 50$ para $\ell = 1$ y $1 \lesssim k \lesssim 90$ para $\ell = 2$. En total se calcularon más de $\sim 2 \times 10^6$ períodos de pulsación adiabáticos para estrellas ZZ Ceti.

En el panel inferior de la figura 4.3 se muestra el perfil espacial del logaritmo del cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä ($\log(N^2)$) para modelos con masa estelar $0.609 M_{\odot}$ y diferentes valores del espesor de la envoltura de hidrógeno, para una $T_{\text{eff}} \approx 12\,000$ K. En el panel central se muestra el perfil del término B de Ledoux y finalmente, en el panel superior se grafican las abundancias de las especies químicas más importantes. En esta figura se enfatiza el papel de las interfaces químicas en la estructura del término de Ledoux y, por consiguiente, en la frecuencia de Brunt-Väisälä. De hecho, cada región de transición química da lugar a un rasgo distintivo en N , los cuales serán eventualmente responsables de las propiedades de atrapamiento de modos en los modelos de enanas blancas. Notar que el término de Ledoux solamente tiene valores no nulos en las regiones de transición química, debido a la presencia de los gradientes en la abundancia.

En la región del núcleo se observan varios picos en N ubicados en $-\log q \simeq 0.4 - 0.5$ (con $q \equiv 1 - M_r/M_*$) debido a los picos en B , resultado de las variaciones abruptas en el perfil interno de las abundancias de carbono y oxígeno. La forma escalonada de las distribuciones de abundancias de carbono y oxígeno dentro del núcleo, formadas a partir de los episodios de mezcla extra más allá del núcleo completamente convectivo durante la combustión central de helio, constituyen un fuente importante de atrapamiento de modos en la región del núcleo. Para los modelos más masivos el perfil químico en la región del núcleo es más suave (ver fig. 3.3), dando lugar a una estructura más pobre en la frecuencia de Brunt-Väisälä. El pico extendido en N^2 alrededor de $-\log q \simeq 1 - 2$ es otra fuente relevante de atrapamiento de modos. Este pico está asociado a la transición química de C-O/He, resultante de procesos de combustión nuclear en la AGB y en los pulsos térmicos. Es importante notar que la forma de esta transición está afectada también por los procesos difusivos que actúan durante la evolución en la curva de enfriamiento. Por este motivo, la estructura de doble capa que es obvia para los modelos con $M = 0.525 M_{\odot}$, es menos pronunciada para los modelos con $M = 0.609 M_{\odot}$ y es prácticamente inexistente para los modelos con $M = 0.878 M_{\odot}$ (ver fig. 3.3). Finalmente, se tiene la región de transición de He/H, que también es una fuente de atrapamiento de modos, en este caso de aquellos modos atrapados en la envoltura de hidrógeno.

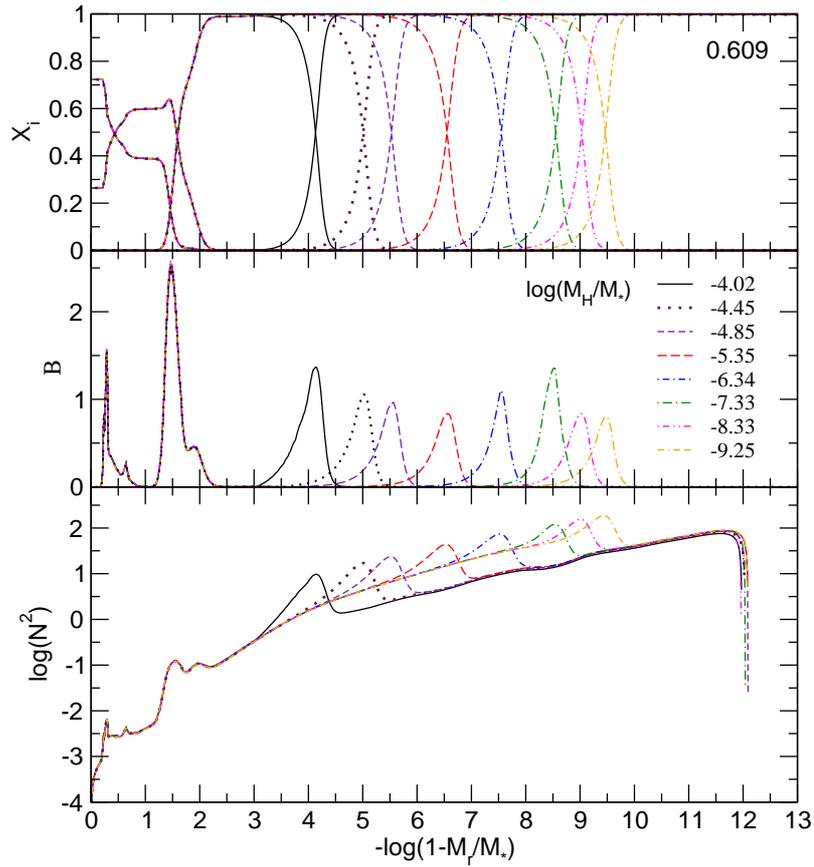


Figura 4.3: Panel superior: Perfiles químicos internos de los modelos de enanas blancas DA con $M_* = 0.609 M_\odot$, $T_{\text{eff}} \sim 12\,000$ K, y diferentes espesores de la envoltura de hidrógeno. Solo se muestran las especies químicas principales. Panel central: Término B de Ledoux. Panel inferior: La representación del logaritmo del cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä para cada modelo. Notar la correspondencia entre las regiones de transición químicas (panel superior) y los picos resultantes en la frecuencia de Brunt-Väisälä. Ver el texto para más detalles.

4.2.1. Influencia de los parámetros estelares

A continuación se evalúa la influencia de los parámetros de estructura sobre las propiedades pulsacionales de los modelos representativos de enanas blancas DA. En particular, se estudia la dependencia del espectro de períodos de modos g con la masa estelar (M_*), la temperatura efectiva (T_{eff}) y la masa de hidrógeno remanente (M_{H}). Dado el gran número de modelos de estrellas enanas blancas DA calculados en este trabajo, elegimos algunos modelos representativos con el fin de describir las propiedades generales del espectro de períodos de pulsación a lo largo del espacio de parámetros explorado.

Comenzamos analizando la dependencia del espectro de períodos con la masa estelar. En la figura 4.4 se muestran los períodos de pulsación en función de la masa estelar, para modos g con grado armónico $\ell = 1$ y 2 y orden radial $k \lesssim 20$. La temperatura efectiva y la masa de hidrógeno remanente se mantienen constantes en $\sim 12\,000\text{K}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_*) \sim -5.37$, respectivamente. Globalmente, se observa un decrecimiento en los períodos de pulsación cuando la masa estelar aumenta. Esto se debe a que los períodos de pulsación varían como la inversa de la frecuencia de Brunt-Väisälä, que a su vez es proporcional a la gravedad superficial (ver ec. 1.3). También se observan varios episodios de *avoided crossing*, que ocurre cuando los períodos de dos modos consecutivos se vuelven muy cercanos, e intercambian sus propiedades intrínsecas (Aizenman et al. 1977). Este efecto es más notorio para los modos de bajo orden radial. En particular, para $\ell = 1$, los modos con orden radial $k = 1$ y 2 experimentan un episodio de *avoided crossing* alrededor de $\sim 0.575M_{\odot}$, luego del cual se observa un aumento en el espaciamiento de períodos de estos modos, hacia masas estelares crecientes. Algo similar ocurre en el caso con $\ell = 2$ para una masa estelar algo más alta. Los modos con $k = 3$ y 4 y $\ell = 1$ también experimentan una colisión, alrededor de $\sim 0.61M_{\odot}$. Notar que, en este caso, la identificación del orden radial para un modo con un período ~ 280 s cambia de $k = 3$ a $k = 4$, cuando la masa estelar supera $\sim 0.6M_{\odot}$.

En la figura 4.5 se grafican los períodos de pulsación para $\ell = 1, 2$ y $k \lesssim 20$ en términos de la temperatura efectiva, en un rango de $\sim 13\,000 - 10\,000\text{K}$, cubriendo ampliamente el intervalo donde se encuentran las estrellas ZZ Ceti. Tanto la masa estelar como el espesor de la envoltura de hidrógeno se mantienen constantes en $M_* = 0.609M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_*) \sim -4.02$. A partir de esta figura, se observa que los períodos de pulsación se vuelven más largos a medida que la estrella evoluciona por la curva de enfriamiento. Esto se debe a que, a medida que la estrella se enfría, aumenta el grado de degeneración del núcleo y la frecuencia de Brunt-Väisälä disminuye, producto de un decrecimiento en χ_T (ec. 2.13). Como resultado los períodos de pulsación muestran un aumento lento y monótono a medida que la temperatura efectiva disminuye (Tassoul et al. 1990; Brassard et al. 1992b). En líneas generales, el perfil de la frecuencia de Brunt-Väisälä no se modifica considerablemente, con lo cual no se esperan cambios significativos en la estructura del espectro de períodos de pulsación con el enfriamiento (Brassard et al. 1992b).

Por último, analizamos el efecto de la masa de hidrógeno remanente sobre los períodos de pulsación. En particular, este parámetro es el que tiene una mayor influencia en las propiedades pulsacionales de una enana blanca DA, con lo cual, se puede

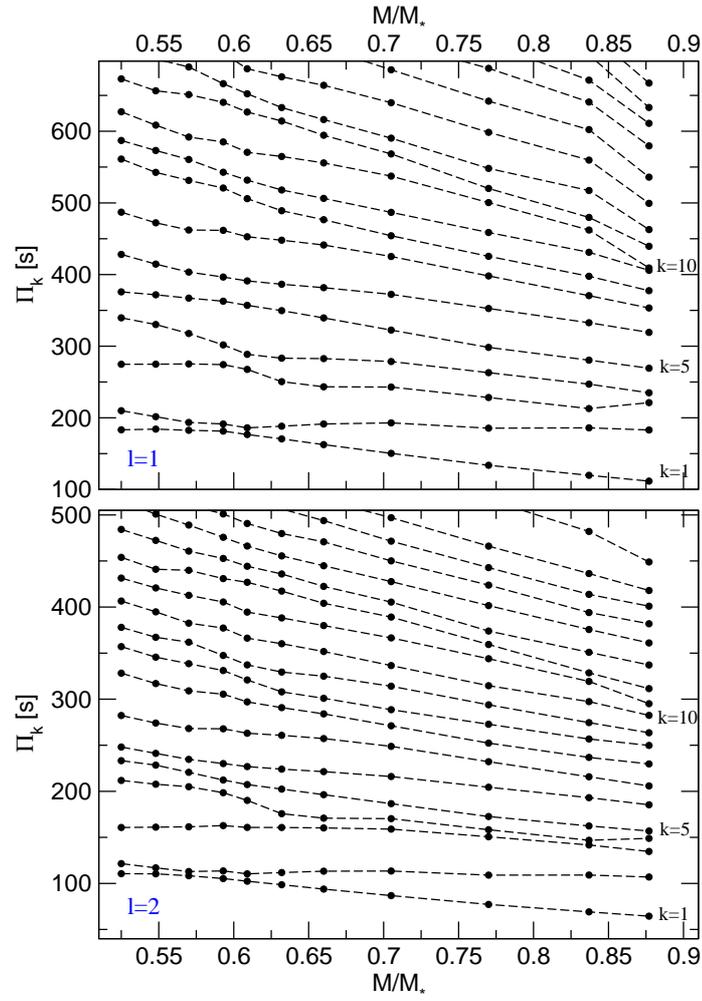


Figura 4.4: Períodos correspondientes a modos g con grado armónico $\ell = 1$ (panel superior) y $\ell = 2$ (panel inferior) y orden radial $k \lesssim 20$, en términos de la masa estelar. Los modelos están caracterizados por una temperatura efectiva de 12000K y una masa de hidrógeno remanente de $\log(M_{\text{H}}/M_*) \sim -5.37$.

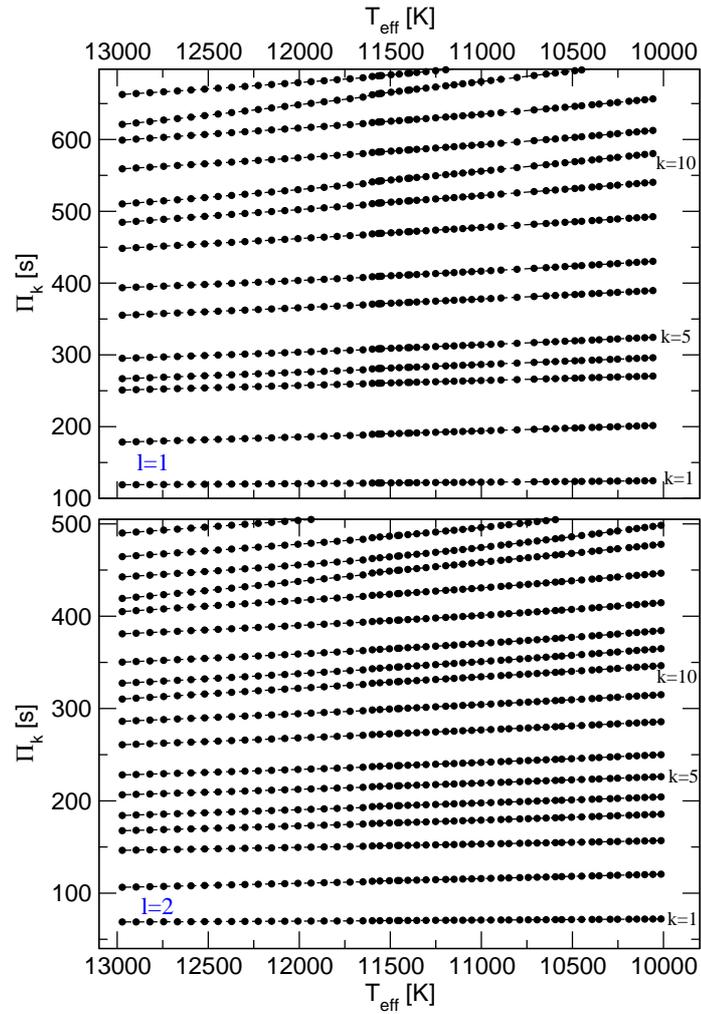


Figura 4.5: Períodos correspondientes a modos g con grado armónico $\ell = 1$ (panel superior) y $\ell = 2$ (panel inferior) y orden radial $k \lesssim 20$, en términos de la temperatura efectiva. La masa estelar y el espesor de la envoltura de hidrógeno se mantienen constantes en $M = 0.609M_{\odot}$ y $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) \sim -4.02$ (envoltura canónica).

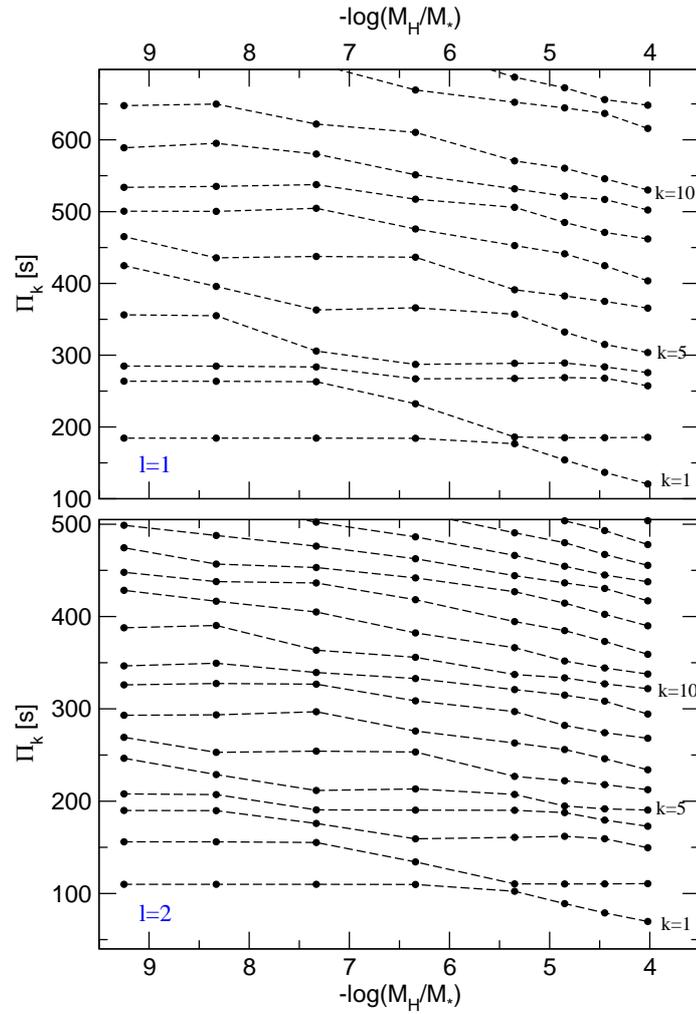


Figura 4.6: Períodos correspondientes a modos g con grado armónico $\ell = 1$ (panel superior) y $\ell = 2$ (panel inferior) y orden radial $k \lesssim 20$, en términos del espesor de la envoltura de hidrógeno. Los modelos están caracterizados por una masa estelar y temperatura efectiva en $M = 0.609M_\odot$ y $T_{\text{eff}} \sim 12\,000\text{K}$, respectivamente.

obtener una buena determinación de la masa de hidrógeno remanente a partir de un análisis astrosismológico (Bradley 1996). En la figura 4.6 se muestran los períodos en términos del espesor de la envoltura de hidrógeno. La masa estelar y la temperatura efectiva se fijaron en $0.609M_{\odot}$ y $\sim 12\,000\text{K}$, respectivamente. Globalmente, se observa un aumento en los períodos de pulsación cuando la envoltura de hidrógeno se vuelve más delgada. Por otro lado, el crecimiento no es monótono, como ocurría con la variación de la temperatura efectiva, sino que el espectro de períodos muestra una estructura más rica, aún para modos con órdenes radiales altos. Se observan varios episodios de *avoided crossing*, siendo más notorios para los modos con $k \lesssim 10$. En particular, los modos con $k = 1$ y 2 , experimentan una colisión en $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) \sim -5.35$, tanto para el espectro con $\ell = 1$ como para el caso con $\ell = 2$. En este punto, los períodos de los modos con $k = 1$ y $k = 2$ difieren en apenas 8–9 segundos. Como resultado, las tendencias se intercambian, el modo con orden radial $k = 1$ deja de aumentar y entra en un régimen donde se mantiene casi constante, mientras que el modo con $k = 2$, que era casi constante para envolturas más gruesas que $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) \sim -5.35$, crece rápidamente. Finalmente, este modo vuelve a un régimen constante para envolturas más delgadas que $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) \sim -7.33$. Este episodio particular de *avoided crossing* se observa para todo el rango de masas estelares calculados en esta Tesis, siendo el espesor de la envoltura para la cual ocurre la colisión más delgada para modelos más masivos.

4.2.2. Atrapamiento de Modos

El espectro de períodos de un modelo químicamente homogéneo está caracterizado por una separación de períodos constante, dada por la ec. (1.8). Sin embargo, como vimos en el capítulo anterior, los cálculos evolutivos predicen la presencia de gradientes químicos en la estructura interna de las enanas blancas. La presencia de una o más interfaces químicas más o menos delgadas, donde las abundancias de las especies nucleares varían abruptamente, modifica fuertemente las características de la cavidad resonante donde los modos se propagan como ondas estacionarias. De hecho, las transiciones químicas actúan como superficies reflectoras que confinan parcialmente ciertos modos. La condición para que un modo sea atrapado es que la longitud de onda de su autofunción radial sea igual a la separación espacial entre dos interfases o entre una interfase y el centro o la superficie de la estrella. Esta resonancia mecánica se denomina atrapamiento de modos (*mode trapping*) (Winget et al. 1981; Brassard et al. 1992a; Córscico et al. 2002b).

El fenómeno de atrapamiento de modos tiene un efecto importante sobre la distribución de la energía cinética de oscilación y, más importante desde el punto de vista observacional, sobre el espaciamiento de períodos en términos del orden radial de los modos. La energía cinética es proporcional a la integral al cuadrado de las amplitudes, pesada con la densidad (ec. 2.8)¹. Por lo tanto, los modos que se propaguen en regiones con altas densidades tendrán valores de energía cinética mayores que aquellos modos oscilando en las regiones más externas, donde las densidades son

¹Notar que, como la amplitud de las autofunciones se normaliza arbitrariamente en la superficie del modelo, los valores de energía cinética son útiles para comparaciones relativas.

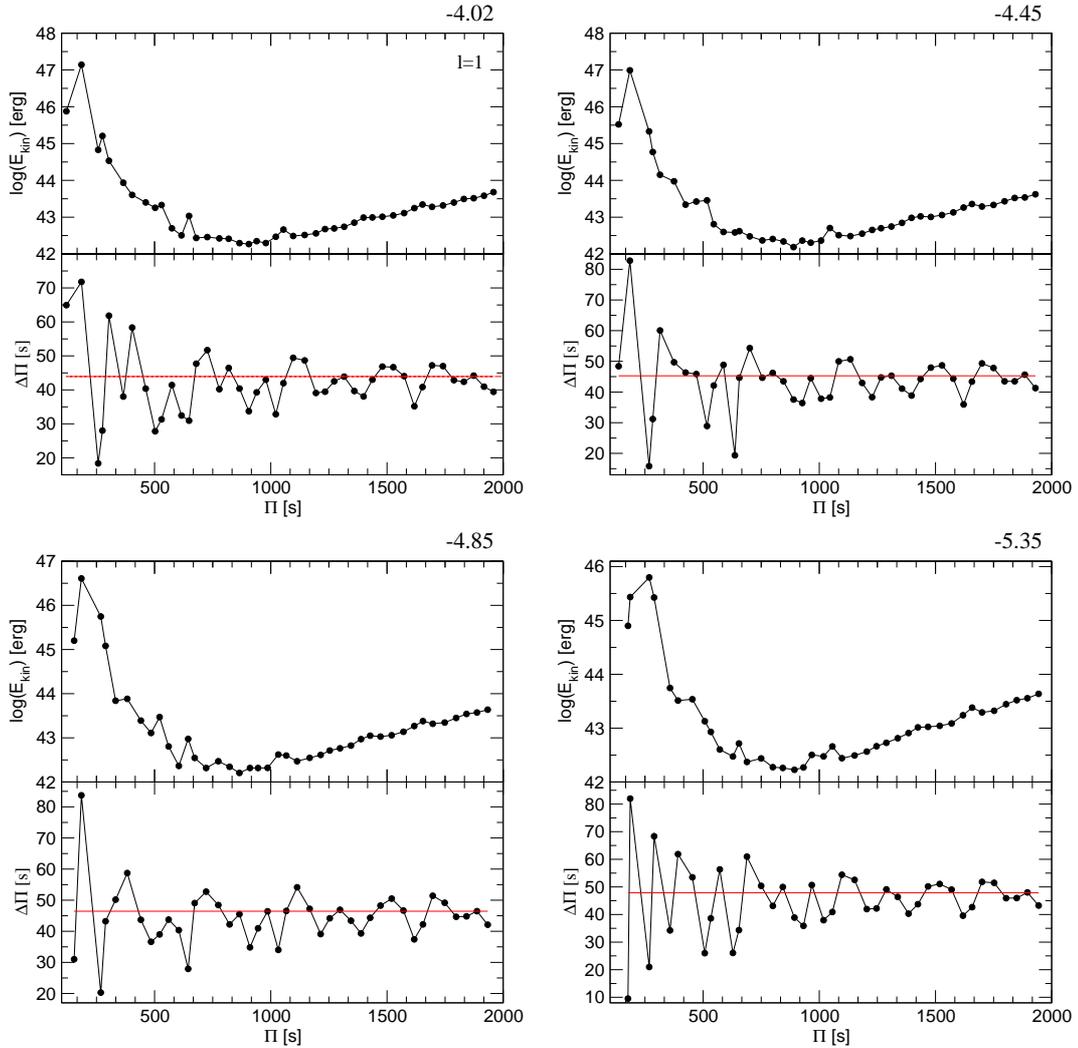


Figura 4.7: Logaritmo de la energía cinética de oscilación y el espaciamiento de períodos en términos de los períodos para modos con grado armónico $\ell = 1$, correspondientes a un modelo de $0.609 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} \approx 12000$ K y varios espesores de la envoltura de hidrógeno $\log(M_{\text{H}}/M_{*})$ indicados sobre cada panel. Con línea roja se indica el valor del espaciamiento asintótico de períodos.

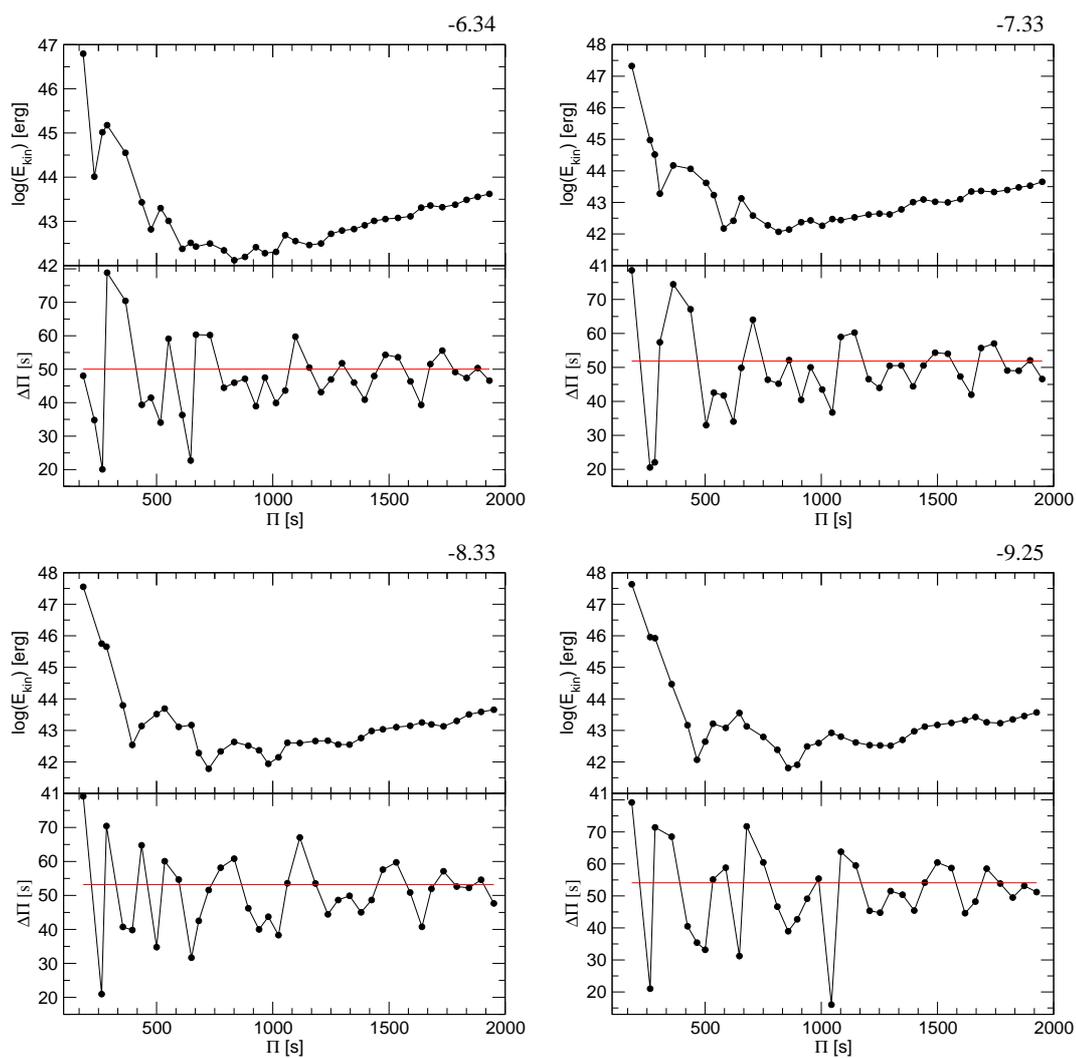


Figura 4.8: Idem figura 4.7.

más bajas.

En el caso del espaciamiento de períodos, cuando este se grafica en términos de los períodos de pulsación Π_k , se aparta considerablemente de un comportamiento uniforme. Para los modelos estelares que poseen solo una transición química, los mínimos locales en $\Delta\Pi_k$ usualmente corresponden a modos atrapados en las capas externas, mientras que los máximos locales están asociados con modos atrapados en las regiones del núcleo.

La influencia de los gradientes de composición química dentro de los modelos representativos de estrellas ZZ Ceti se puede observar a partir de las figuras 4.7 y 4.8. Aquí se grafican el logaritmo de la energía cinética de oscilación y el espaciamiento de períodos en términos de los períodos de pulsación para modos con grado armónico $\ell = 1$, para un modelo con masa estelar $0.609 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} \approx 12\,000$ K y todos los espesores de la envoltura de hidrógeno calculados en la grilla inicial de envolturas para esta masa estelar. A partir de estas figuras se observa que el comportamiento global de E_{kin} y $\Delta\Pi_k$ no se modifica considerablemente con el cambio en el espesor de la envoltura de hidrógeno. Los modos con bajo orden radial tienen valores de energía cinética altos, que decrece a medida que aumenta el orden radial. Esto se debe a que las autofunciones tienen amplitudes significativas en regiones cada vez más externas, y de menor densidad, cuando aumenta el orden radial. Luego, para modos con períodos mayores a ~ 1000 s, E_{kin} aumenta lentamente. Este aumento monótono de E_{kin} para períodos largos está asociado a que las amplitudes relativas de las autofunciones son mayores para modos de orden radial más alto. Además, a medida que las autofunciones se desplazan hacia la superficie del modelo, se produce una acumulación de nodos en el límite exterior del mismo, que se encuentra en un valor finito de $-\log(1 - m_r/M_*)$ y no en la superficie física de la estrella en $-\log(1 - m_r/M_*) = \infty$. Si analizamos la estructura de las distribuciones de energía cinética con más detalle, observamos que para envolturas más delgadas se pueden encontrar mínimos locales en E_{kin} bien definidos cada $\Delta k \sim 7 - 8$. Esto no ocurre para los modelos con envolturas más gruesas, donde las desviaciones de E_{kin} del comportamiento global son muy pequeñas. El espaciamiento de períodos adelantado ($\Delta\Pi_k \equiv \Pi_{k+1} - \Pi_k$) muestra variaciones rápidas, apartándose del valor asintótico, en especial para los modos de bajo orden radial. Debido a la presencia de más de una interfase química, los máximos y mínimos locales en $\Delta\Pi_k$ no tienen todos la misma amplitud. En particular, la amplitud de los máximos y mínimos decrece a medida que el orden radial aumenta, aproximándose al valor asintótico, en acuerdo con las predicciones de la teoría asintótica (Tassoul et al. 1990).

Por último, se puede ver que cada mínimo en $\Delta\Pi_k$ se corresponde con un máximo en E_{kin} de un modo con el mismo orden radial k o con una diferencia $\Delta k = \pm 1$. Los modos que corresponden a máximos locales en E_{kin} son modos parcialmente confinados en las regiones del núcleo debajo de la interfase O-C/He, es decir, modos con amplitudes relativas grandes aún en las capas profundas del modelo. Estos modos son potencialmente útiles desde el punto de vista de la astrosismología. El resto de los modos, que no tienen valores máximos o mínimos de energía cinética, son mucho menos sensibles a la presencia de las regiones de transición química, y por lo tanto, tienen una relevancia menor para la astrosismología.

4.2.3. Efectos de la composición central

Como vimos en la sección 3.4, la variación de la tasa de reacción de $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$, no solo da lugar a variaciones en las abundancias centrales de carbono y oxígeno, sino que también modifica la estructura de las regiones centrales de los modelos evolutivos de enanas blancas DA. Por ejemplo, la frontera exterior del núcleo de C/O se desplaza hacia afuera cuando se aumenta la tasa de reacción, lo que modifica el espesor de la región rica en carbono (ver fig. 3.8). Para aislar la influencia específica de las abundancias centrales de carbono y oxígeno sobre el espectro de períodos de aquella dada por los cambios en la estructura mecánica del modelo, se consideraron cuatro secuencias de enanas blancas en la curva de enfriamiento con diferentes valores de la composición central, pero manteniendo todos los demás parámetros estructurales invariantes. A partir de un modelo canónico, donde se considera la tasa de reacción nuclear $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$ dada por Angulo et al. (1999), se modificaron artificialmente las abundancias centrales de carbono y oxígeno. Este procedimiento se realizó a temperaturas efectivas altas ($T_{\text{eff}} \sim 80\,000\text{K}$), tal que los efectos transitorios de este cambio artificial desaparecen mucho antes de que el modelo alcanza la región de inestabilidad pulsacional. El cambio consistió en reemplazar los valores de X_{C} y X_{O} del caso con factor 1, desde el centro del modelo hasta el borde del núcleo de carbono/oxígeno por aquellos correspondientes a los distintos factores que se muestran en la tabla 3.2. Luego, se calculó la evolución en la curva de enfriamiento, como se describe en la sección 3.4. Una vez que los modelos alcanzaron la banda de inestabilidad de las estrellas ZZ Ceti se calculó el espectro de períodos correspondiente.

En la figura 4.9 se grafica el valor de los períodos de pulsación en términos de la abundancia central de oxígeno, para los modos con grado armónico $\ell = 1$ y orden radial $k = 1, \dots, 10$. Se observa que los modos de orden más bajo, no muestran una dependencia significativa con la abundancia central de oxígeno. En particular, el modo con $k = 3$ experimenta un pequeño decrecimiento del $\sim 0.02\%$, cuando X_{O} va desde 0.482 hasta 0.795. Esto también ocurre con el modo con $k = 6$, donde el cambio es también de $\sim 0.02\%$. Los modos con $k = 4$ y 5 experimentan un *avoided crossing* alrededor de $X_{\text{O}} \sim 0.7$. En particular, el modo con $k = 5$ muestra una variación del $\sim 0.12\%$ en el rango de X_{O} explorado. Por último, los modos con $k = 9$ y 10 muestran un aumento de ~ 20 s para valores de X_{O} bajos, que corresponden a un $\sim 0.05\%$. En general, se observa una dependencia débil de los períodos de pulsación con el valor de las abundancias centrales de carbono y oxígeno. Un resultado similar fue obtenido por Bradley (1996). En su trabajo encuentra una dependencia no muy importante de los períodos con el cociente C/O central, en especial para abundancias de oxígeno altas. Sin embargo, aunque los cambios en los períodos de pulsación que se muestran en la figura 4.9 no son tan significativos como los que se observan frente a variaciones de la masa o del espesor de la envoltura de hidrógeno, son aún suficientemente notables como para tener un efecto no despreciable sobre los ajustes período a período de estrellas ZZ Ceti, y por lo tanto, en los resultados astrosismológicos que se pueden obtener para estas estrellas.

En la figura 4.10 se muestran las distribuciones de la energía cinética de oscilación en términos de los períodos de pulsación, para las distintas abundancias centrales, indicadas con el factor multiplicativo sobre la tasa de reacción $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$ dada

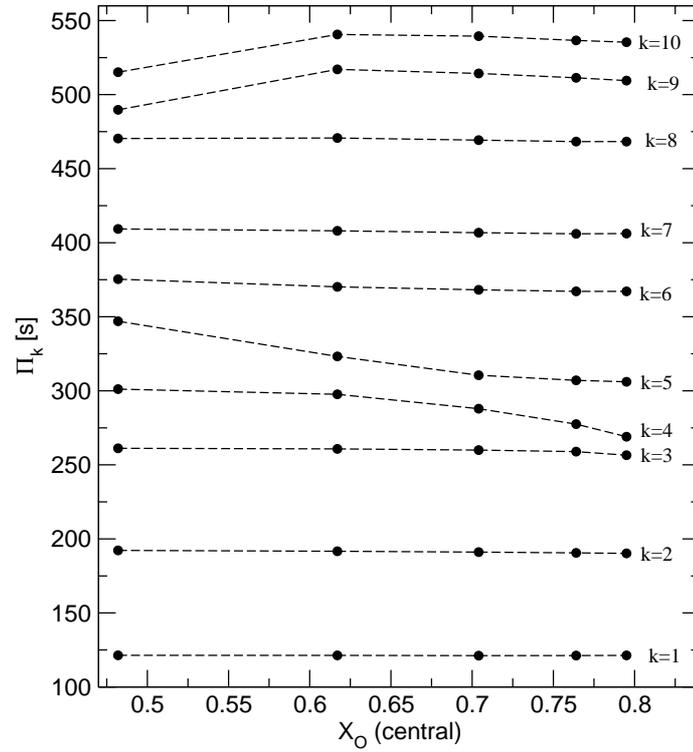


Figura 4.9: Período en términos de la abundancia central de oxígeno (X_{O}), para los modos con grado armónico $\ell = 1$ y orden radial $k = 1, \dots, 10$. Los modelos considerados están caracterizados por una masa estelar de $0.593 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 12000\text{K}$, y una envoltura canónica.

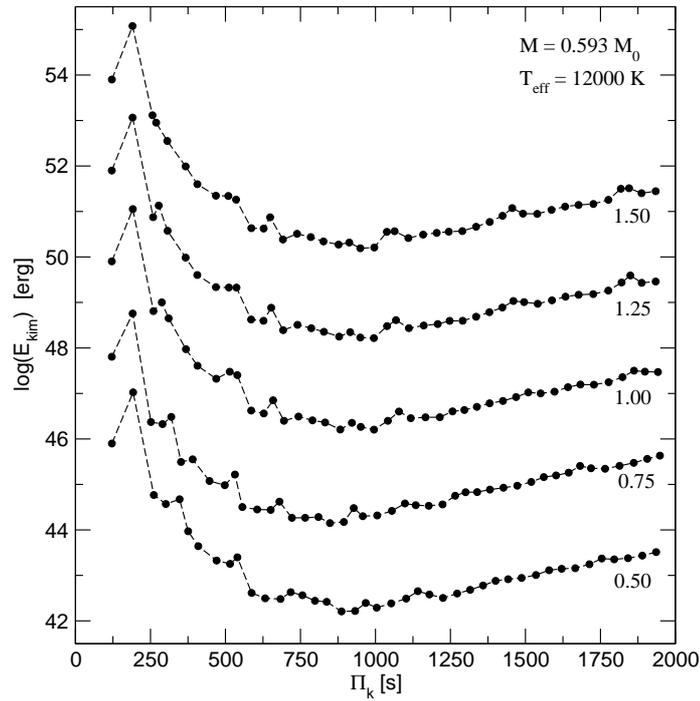


Figura 4.10: Períodos de pulsación en términos de la abundancia central de oxígeno (X_{O}), para los modos con grado armónico $\ell = 1$ y orden radial $k = 1, \dots, 10$. Los modelos considerados están caracterizados por una masa estelar de $0.593 M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 12000 \text{ K}$, y una envoltura canónica. El factor multiplicativo sobre la tasa de reacción de $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ dada por Angulo et al. (1999) se especifica a la derecha del gráfico. Cada curva está desplazada en 2 unidades respecto de la que se encuentra por debajo, salvo para el caso con factor 0.5.

por Angulo et al. (1999). Como se puede observar, los perfiles de energía cinética no se modifican considerablemente con la variación de las abundancias centrales de carbono y oxígeno, en especial para los modos con períodos más largos, que se propagan en regiones más externas del modelo. Como consecuencia, las propiedades de atrapamiento de modos no se ven significativamente afectadas con la variación de las abundancias centrales de carbono y oxígeno, aún para modos de bajo orden radial.

4.3. Comparación con Cálculos Previos

Como ya dijimos anteriormente, la astrosismología de enanas blancas es sensible a la forma precisa de los perfiles químicos internos. De hecho tanto el espectro de períodos de los modos g como las propiedades de atrapamiento de modos de las estrellas enanas blancas pulsantes son muy sensibles a los detalles de los perfiles químicos del núcleo y de la envoltura del modelo.

En esta sección se presenta una comparación entre las propiedades pulsacionales de los nuevos perfiles químicos calculados en este trabajo y los modelos más utilizados en estudios astrosismológicos existentes en la literatura. Para realizar este análisis comparativo se eligió un modelo de referencia de una enana blanca DA caracterizado por $M_* = 0.609 M_\odot$, $T_{\text{eff}} = 12\,000\text{K}$, y una envoltura de hidrógeno canónica ($M_{\text{H}} \sim 10^{-4}M_*$). Este modelo corresponde a un modelo canónico de una estrella DAV con una masa promedio situada en el medio de la banda de la inestabilidad pulsacional. En la figura 4.11 se muestra el perfil químico interno (panel superior), el término de Ledoux (panel central) y el cuadrado del logaritmo de la frecuencias de Brunt-Väisälä y de Lamb (panel inferior) para modos dipolares correspondientes al modelo de referencia (modelo LPCODE). Como se explicó en la sección anterior, el modelo LPCODE está caracterizado por tres regiones de transición: una interfase doble de oxígeno y carbono situada en la región del núcleo, una interfase triple de oxígeno, carbono y helio, y finalmente una interfase de helio e hidrógeno. La presencia de estas transiciones químicas se traduce en los picos que se observan en el término de Ledoux y por consiguiente en la frecuencia de Brunt-Väisälä. El número de estos picos, así como también su alto y ancho, tienen un fuerte impacto en toda la estructura del espectro de pulsación de la estrella.

En la figura 4.12 se muestra la misma situación para un modelo de referencia caracterizado por un perfil tipo rampa en el núcleo (modelo rampa), similar al tipo de modelo utilizados por Bradley (1996, 1998, 2001) y más recientemente por Bischoff-Kim et al. (2009). En este caso, el perfil químico del núcleo no es el resultado de cálculos evolutivos como en el caso del modelo LPCODE, sino que es una parametrización. Este tipo de perfiles químicos han sido ampliamente utilizados en astrosismología de enanas blancas dado que permiten explorar un espacio de parámetros caracterizando la forma de los perfiles de abundancia en el núcleo. Los parámetros que caracterizan este tipo de modelos son: la abundancia central de oxígeno (X_{O}), la coordenada en la cual X_{O} comienza a disminuir, y la coordenada en la cual X_{O} se anula (ver por ejemplo Bischoff-Kim et al. 2008a). La forma del perfil químico del núcleo que se muestra en la figura 4.12 es mucho más simple que aquella

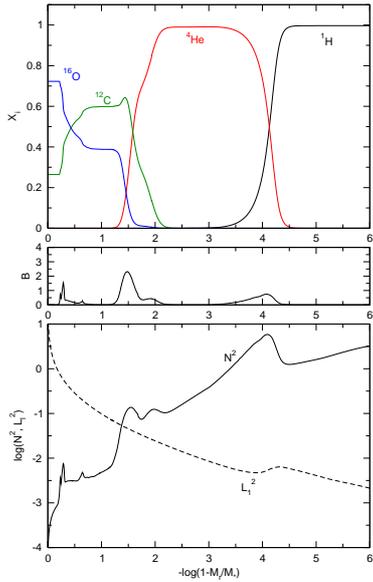


Figura 4.11: Perfil químico interno (panel superior), término de Ledoux B (panel central), y el logaritmo del cuadrado de la frecuencias de Brunt-Väisälä (N) y de Lamb (L_ℓ) (panel inferior) en términos de $-\log q$ (donde $q \equiv 1 - M_r/M_*$) para modos con $\ell = 1$ correspondientes a un modelo de enana blanca DA con $M_* = 0.609 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} \sim 12000$ K.

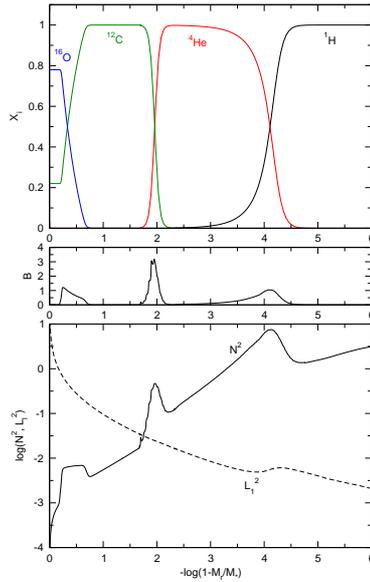


Figura 4.12: Idem Fig. 4.11, pero para el caso de perfiles químicos del núcleo de tipo rampa (modelo-rampa).

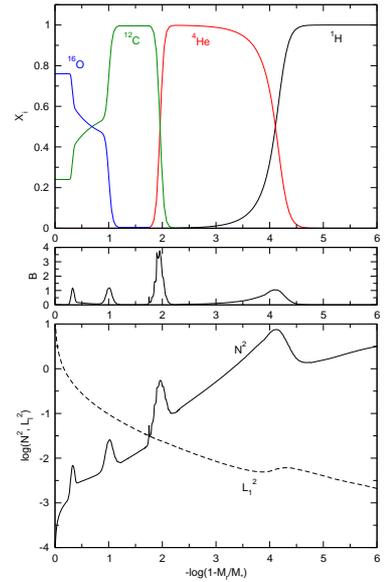


Figura 4.13: Idem Fig. 4.11, pero para el caso de perfiles químicos del núcleo de tipo Salaris (modelo-Salaris).

característica del modelo LPCODE de la figura 4.11. Notar que existe una región de transición de carbono y helio. Esto no ocurre en el modelo LPCODE, donde en su lugar se observa una transición triple de oxígeno, carbono y helio (ver figura 4.11). La forma de la transición de He/C en este modelo está fijada por parámetros de difusión, que han sido elegidos para ajustar los períodos de pulsación de G117–B15A (Bischoff-Kim et al. 2008a). Es importante notar que esta región de transición da lugar al pico más prominente en la frecuencia de Brunt-Väisälä, proveniente del pico en el término de Ledoux en el panel central de la figura 4.12. La presencia de un buffer ancho de carbono puro como el que se asume en los modelos rampa, no está presente en el modelo LPCODE. En particular, no existe ninguna justificación para la presencia de este buffer de carbono desde el punto de vista de la teoría de evolución estelar. Finalmente, la transición química de He/H se obtiene suponiendo equilibrio difusivo (Arcoragi & Fontaine 1980), pero sin la aproximación de *trace element* (ver Bischoff-Kim et al. 2009 para más detalles). La forma de esta interfase es similar a la que se obtiene mediante un tratamiento de difusión dependiente del tiempo. Es importante notar, sin embargo, que las pequeñas diferencias en el espesor y la pendiente de esta transición química entre el modelo LPCODE y el modelo rampa dan lugar a diferencias notables en el espaciamiento de períodos de los modelos, así como también en los períodos. Este punto se analiza en detalle más adelante.

En la figura 4.13 se muestra un modelo de referencia caracterizado por un perfil químico del núcleo dado por Salaris et al. (1997). Este tipo de perfiles químicos del núcleo ha sido empleado primero por Córscico et al. (2001, 2002a) y Benvenuto et al. (2002a, 2002b), y más recientemente por Bischoff-Kim et al. (2008a). De hecho, los perfiles químicos del núcleo que se muestran en la figura 4.13 y aquellos utilizados en Bischoff-Kim et al. (2008a) son una adaptación cercana a los perfiles químicos originales de Salaris et al. (1997). Exceptuando la región del núcleo, el resto del perfil químico de este modelo (modelo-Salaris) es igual al modelo-rampa de la figura 4.12. A diferencia de los modelos de referencia descritos antes, en este caso hay dos transiciones químicas de oxígeno y carbono en el núcleo en lugar de solo una. Esto da lugar a un total de cuatro picos en la frecuencia de Brunt-Väisälä, como se puede ver a partir del panel inferior de la figura 4.13.

Las figuras 4.11-4.13 revelan claramente las importantes diferencias que existen entre los perfiles químicos y de la frecuencia de Brunt-Väisälä en los modelos generados con el código evolutivo LPCODE, es decir considerando la evolución completa de la estrella progenitora, y los dos modelos de referencia que incorporan los perfiles químicos más ampliamente utilizados en estudios astrosismológicos de estrellas ZZ Ceti. Estas diferencias son particularmente importantes en la estructura química del núcleo.

A continuación, se comparan las propiedades pulsacionales del modelo-LPCODE con los modelos de referencia con núcleos tipo rampa y tipo Salaris. El espaciamiento asintótico de períodos es más alto para el modelo-LPCODE (45.38 s), seguido por el modelo-Salaris (44.17 s) y por el modelo-rampa (43.32 s). Dado que estos modelos tienen las mismas masa estelar y temperatura efectiva, las diferencias en los períodos y en el espaciamiento asintótico de períodos son exclusivamente dadas por las diferencias en los perfiles químicos del núcleo y de la envoltura para los tres modelos.

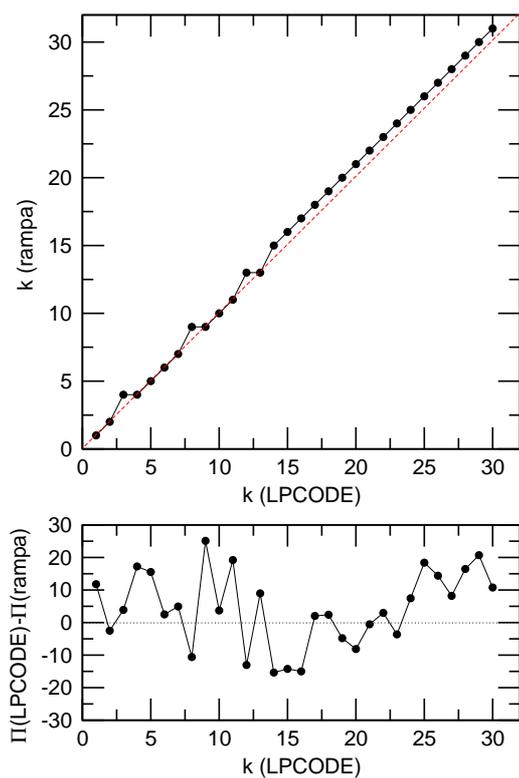


Figura 4.14: Comparación entre el modelo de referencia generados con LPCODE (Fig. 4.11) y el modelo de referencia con un perfil químico del núcleo tipo rampa (Fig. 4.12). El panel superior muestra las diferencias en la identificación del orden radial, mientras que el panel inferior muestra las diferencias entre los períodos teóricos de los modos ajustados.

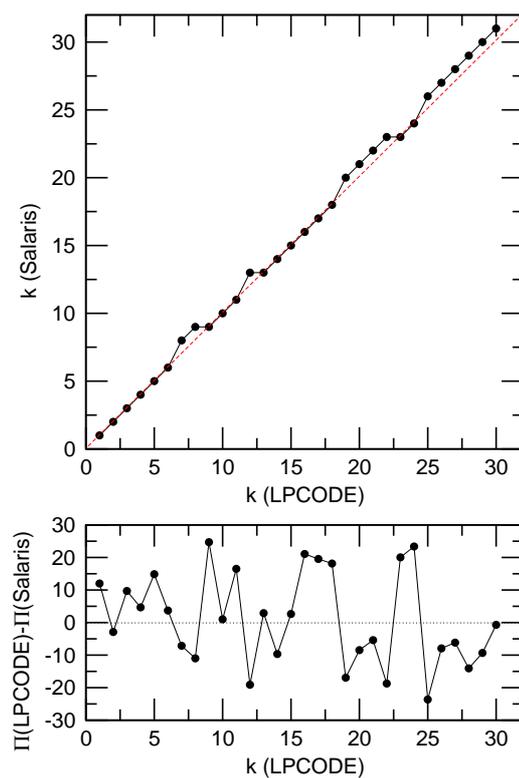


Figura 4.15: Idem Fig. 4.14, pero para la comparación entre el modelo de referencia generado con LPCODE (Fig. 4.11) y el modelo de referencia con un perfil químico del núcleo de tipo Salaris (Fig. 4.13).

En particular, las diferencias sutiles en la forma de la interfase de He/H resultante de un tratamiento de la difusión dependiente del tiempo y de un tratamiento de equilibrio difusivo dan lugar a una contribución no despreciable en la diferencia en el espaciamiento asintótico de períodos.

Desde la perspectiva de los ajustes astrosimológicos, si se realiza un ajuste con los perfiles dados por cálculos evolutivos con LPCODE, y se permite que la masa estelar y la temperatura efectiva varíen tal que se encuentre un modelo sismológico que ajuste el espectro de períodos observados en una enana blanca pulsante, el valor del espaciamiento asintótico de períodos tendrá una influencia sobre la masa y la temperatura efectiva de los modelos de mejor ajuste. Como es bien sabido, aquellos modelos más masivos y con temperaturas efectivas más altas muestran un espaciamiento de períodos más bajo (siempre que no haya modos fuertemente atrapados). Dado que el valor de espaciamiento de períodos es más alto para los modelos–LPCODE, los modelos de mejor ajuste deberán tener masas y temperaturas efectivas más altas para ajustar un dado espaciamiento de períodos. Como resultado, se espera encontrar modelos astrosismológicos con masas y temperaturas efectivas más altas usando los modelos calculados con LPCODE, que si se emplean los otros tipos de modelos. Este efecto debería observarse principalmente en enanas blancas con muchos períodos observados, donde abundan los modos con alto orden radial en el ajuste. En el caso de G117–B15A, por ejemplo, no se pueden sacar conclusiones basándose solamente en el espaciamiento de períodos, dado que esta estrella tiene solo tres modos observados de bajo orden radial que están fuertemente atrapados (Bischoff-Kim et al. (2008a), sección 5.2).

El valor más alto del espaciamiento de períodos del modelo–LPCODE da lugar a una desviación hacia períodos cada vez más largos a medida que se recorre la lista de períodos hacia órdenes radiales mayores. Por ejemplo, el efecto acumulativo de una diferencia de 2.06 s entre en modelo–LPCODE y el modelo–rampa resulta en períodos de alto orden radial que difieren hasta en 65 s (para $k \sim 30$ si $\ell = 1$ y $k \sim 55$ si $\ell = 2$). El resultado práctico de esta desviación hacia períodos más altos en estudios astrosismológicos debería llevar a una identificación diferente del orden radial de los modos. En las figuras 4.14 y 4.15 se muestra como los ajustes astrosismológicos podrían verse afectados. En los paneles superiores se muestra la diferencia en la identificación del orden radial k , y en los paneles inferiores se muestra como podrían diferir los períodos teóricos que ajustan los modos observados. Incluso permitiendo que la identificación del orden radial cambie para encontrar el mejor ajuste entre los períodos de ambos modelos, aún se pueden encontrar algunos períodos individuales que difieren entre si hasta ~ 25 s.

Por completitud, en la figura 4.16 se muestran los perfiles de la energía cinética y del espaciamiento hacia adelante de períodos de los tres modelos de referencia. Las líneas horizontales en rojo corresponden al valor del espaciamiento asintótico de períodos. Como es bien sabido, la presencia de los gradientes de densidad en las regiones de transición química en el interior de una enana blanca da lugar al fenómeno de atrapamiento de modos. Los indicios del atrapamiento de modos en la distribución de espaciamiento de períodos es la presencia de mínimos pronunciados en el diagrama $\Delta\Pi_k - \Pi_k$, contrario a lo que ocurre cuando el modelo analizado es

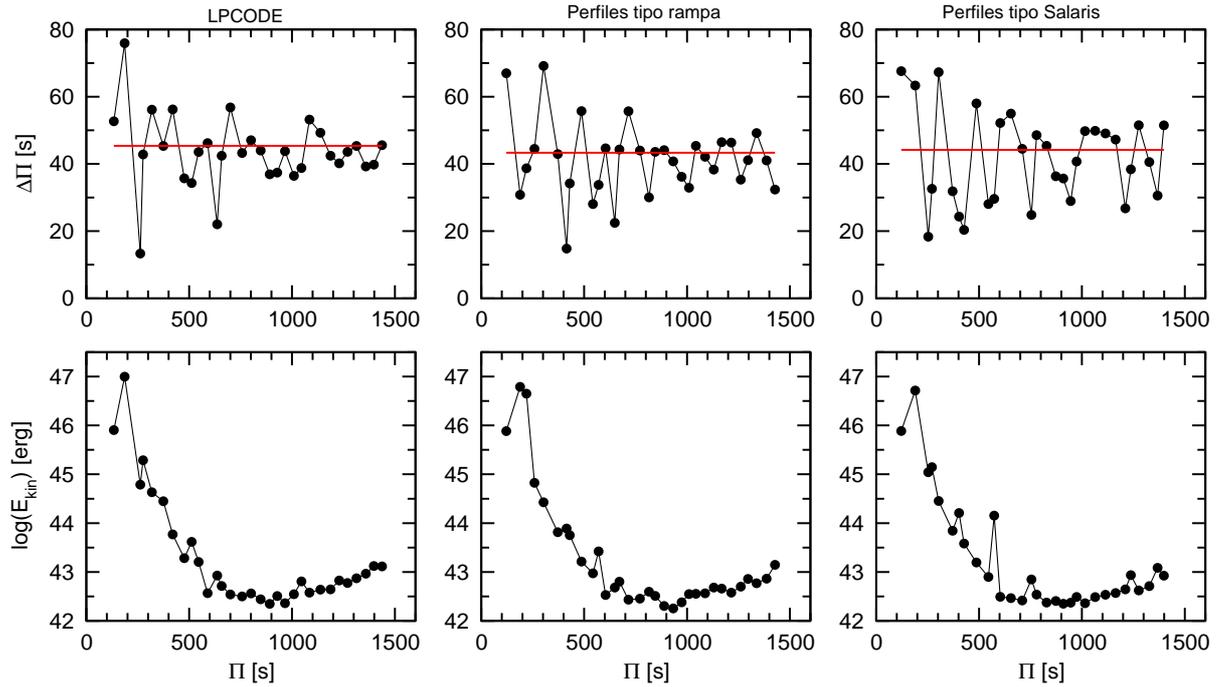


Figura 4.16: Los paneles superiores muestran el espaciamiento de períodos adelantado y en los paneles inferiores se presenta el logaritmo de la energía cinética de oscilación para modos con $\ell = 1$ en términos de los períodos de pulsación. Las líneas rojas horizontales en los paneles superiores muestran el espaciamiento asintótico de períodos

químicamente homogéneo (ver por ejemplo Córscico & Benvenuto 2002). Las diferencias en los perfiles de ambas cantidades físicas se deben únicamente a las diferencias en la estructura química interna de los modelos de referencia, en particular en la estructura del núcleo y en el modelado de las interfases más externas.

En conclusión, las propiedades de pulsación de los modelos de enanas blancas DA que incorporan perfiles del núcleo y envoltura consistentes provenientes de cálculos evolutivos completos, como los calculados en este trabajo, son sustancialmente distintas de aquellas de los modelos utilizados más comúnmente.

A continuación empleamos nuestro conjunto de modelos representativos de estrellas enanas blancas DA para realizar ajustes de períodos de estrellas ZZ Ceti observadas. En este capítulo, comenzamos analizando la estrella G117-B15A, que es el arquetipo de las estrellas ZZ Ceti y ha sido el objeto de numerosos estudios sismológicos desde su descubrimiento. Los resultados presentados aquí fueron publicados en Romero et al. (2012).

5.1. Ajustes Astrosismológicos

Cuando se realizan ajustes de períodos el objetivo es encontrar un modelo astrosismológico que reproduzca de forma lo más próxima posible los períodos de pulsación observados de una estrella analizada. Con este fin, se considera al modelo de mejor ajuste como aquel que minimiza una función de calidad dada. En este estudio se consideraron tres funciones de calidad. La primera corresponde simplemente al promedio de las diferencias absolutas mínimas entre períodos teóricos y observados (ver por ejemplo Bradley 1998):

$$\Phi = \Phi(M_*, M_H, T_{\text{eff}}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \min |\Pi_k^{\text{Teo}} - \Pi_i^{\text{Obs}}| \quad (5.1)$$

donde N es el número de períodos observados en la estrella que se está analizando. La segunda función de calidad considerada está definida como (ver por ejemplo Córscico et al. 2009b):

$$\chi^2 = \chi^2(M_*, M_H, T_{\text{eff}}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \min |\Pi_k^{\text{Teo}} - \Pi_i^{\text{Obs}}|^2 \quad (5.2)$$

Finalmente, se emplea la siguiente función de mérito (ver por ejemplo Castanheira & Kepler 2008):

$$\Xi = \Xi(M_*, M_H, T_{\text{eff}}) = \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{|\Pi_k^{\text{Teo}} - \Pi_i^{\text{Obs}}|^2 A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}} \quad (5.3)$$

donde las amplitudes A_i se utilizan como pesos para cada período observado. De esta manera, los ajustes de períodos están más influenciados por los modos con amplitudes altas que por aquellos que muestran amplitudes pequeñas.

En el estudio astrosismológico realizado en esta Tesis, se emplearon las tres funciones de calidad, Φ , χ^2 y Ξ , definidas por las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3), respectivamente. Dado que en general las tres funciones dan resultados similares, la calidad de los ajustes de períodos se describe en términos de la función $\Phi = \Phi(M_*, M_H, T_{\text{eff}})$ solamente. En nuestros cálculos, la temperatura efectiva, la masa estelar y la masa de la envoltura de hidrógeno en los modelos pueden variar en los rangos:

- $14\,000\text{K} \gtrsim T_{\text{eff}} \gtrsim 9\,000\text{ K}$
- $0.525 \lesssim M_*/M_{\odot} \lesssim 0.878$
- $-9.4 \lesssim \log(M_H/M_*) \lesssim -3.9$

donde el rango de valores para M_H depende de M_* (ver tabla 4.1 y fig. 4.1). Por simplicidad la masa de helio permanece fija en el valor predicho por los cálculos evolutivos para cada secuencia. Como se explica en la sección 4.1.1, no se espera una variación sustancial de la masa del contenido de helio, por ejemplo de 2 o 3 órdenes de magnitud, del valor predicho por los cálculos evolutivos, lo cual sería necesario para producir efectos apreciables en el espectro de períodos. De hecho, dentro del rango de variación permitido para este parámetro (un factor 3–4) se espera que los períodos de pulsación adiabáticos tengan una dependencia débil con M_{He} (Bradley 1996), a diferencia de lo que sucede con M_H . Finalmente, un cambio artificial de la masa de helio en los modelos evolutivos implicaría mover la transición triple de C-O/He, introduciendo serios cambios artificiales, y no deseables, en la estructura química de estos modelos. La forma del perfil químico de carbono y oxígeno del núcleo y las abundancias centrales de estos elementos también permanecen invariantes, fijadas por la evolución durante la combustión central de helio de la estrella progenitora. Por último, el espesor de las regiones de transición química C-O/He y He/H está dado por los efectos de la difusión química dependiente del tiempo.

5.2. G117-B15A: el Arquetipo de las ZZ Ceti

La estrella G117–B15A se considera el arquetipo de la clase de estrellas variables ZZ Ceti. Esta estrella muestra tres modos de corto período: 215.20, 270.46 y 304.05 s con amplitudes de 17.36, 6.14 y 7.48 mma respectivamente (Kepler et al. 1982), que corresponden a períodos de pulsación reales. G117-B15A también muestra un armónico del período de mayor amplitud y dos combinaciones lineales. Kepler et al. (2005a) utilizaron la tasa de cambio del período con 215 s para mostrar que el núcleo de G117–B15A está compuesto de una mezcla de carbono y oxígeno. El

Tabla 5.1: Posibles soluciones astrosismológicas para G117–B15A. El modelo 1 es el modelo de mejor ajuste correspondiente a una familia de soluciones que se obtiene al imponer que todos los períodos observados estén asociados con modos $\ell = 1$. Los modelos de 2 a 4 resultan de asumir que los períodos observados pueden estar asociados con modos tanto $\ell = 1$ or $\ell = 2$.

Modelo	T_{eff} [K]	M_*/M_\odot	$\log(M_{\text{He}}/M_*)$	$\log(M_{\text{H}}/M_*)$	Π_i^{obs} [s]	Π_k^{th} [s]	ℓ	k	$ \Delta $ [s]	Φ [s]
1	11 986	0.5932	−1.62	−5.90	215.20	215.215	1	2	0.015	1.729
					270.46	273.437	1	3	2.977	
					304.05	301.854	1	4	2.196	
2	12 450	0.6090	−1.61	−4.45	215.20	214.947	2	6	0.253	0.177
					270.46	270.268	2	8	0.192	
					304.05	304.136	2	9	0.086	
3	12 219	0.6598	−1.91	−8.33	215.20	215.218	2	5	0.018	0.526
					270.46	270.406	1	3	0.054	
					304.05	305.557	2	8	1.507	
4	11 735	0.5930	−1.62	−9.33	215.20	214.422	2	4	0.778	0.735
					270.46	271.682	1	2	1.222	
					304.05	303.846	2	7	0.204	

primer estudio astrosismológico detallado de esta estrella fue presentado por Bradley (1998), quién obtuvo como resultado dos posibles soluciones astrosismológicas con estructuras diferentes dependiendo de la asignación del orden radial (k) a los modos observados. Si los períodos 215, 270 y 304 s se asocian con $k = 1, 2, 3$, obtenía una solución sismológica con $M_{\text{H}}/M_* \sim 3 \times 10^{-7}$. Si, por otro lado, los períodos se asociaban con $k = 2, 3, 4$, el modelo astrosismológico estaba caracterizado por $M_{\text{H}}/M_* \sim 1.5 \times 10^{-4}$. Notar que hay tres ordenes de magnitud de diferencia en la masa de la envoltura de hidrógeno entre las dos posibles, e igualmente válidas, soluciones astrosismológicas. Benvenuto et al. (2002b) encontraron una degeneración similar en la solución astrosismológica de G117–B15A, en un estudio basado en modelos estelares y de pulsaciones independientes. Más recientemente, Castanheira & Kepler (2008) encontraron una solución sismológica con $M_{\text{H}}/M_* \sim 10^{-7}$ y $k = 1, 2, 3$, y otra igualmente válida con $M_{\text{H}}/M_* \sim 10^{-5}$ y $k = 2, 3, 4$. Finalmente, Bischoff-Kim et al. (2008a) también encontraron dos tipos de soluciones, uno caracterizado por envolturas de hidrógeno “delgadas” y otro asociado con envolturas de hidrógeno “gruesas”, aunque las soluciones con envolturas “gruesas” ($M_{\text{H}}/M_* \sim 6 \times 10^{-7}$) tienen envolturas considerablemente más delgadas que en trabajos previos.

A continuación se presenta un estudio astrosismológico de G117–B15A basado en los modelos evolutivos completos calculados en este trabajo. A diferencia de los modelos utilizados en estudios previos, basados en modelos artificiales o simplificados, los modelos evolutivos que dan lugar a nuestra grilla provienen de cálculos detallados, con perfiles realistas y con un tratamiento consistente de la estructura interna desde el centro hasta la envoltura.

Inicialmente se calcularon las funciones de mérito sobre la grilla básica de modelos asumiendo que el grado armónico de los tres períodos observados en G117–B15A es $\ell = 1$. Sin embargo, no se encontró ningún modelo estelar de la grilla básica

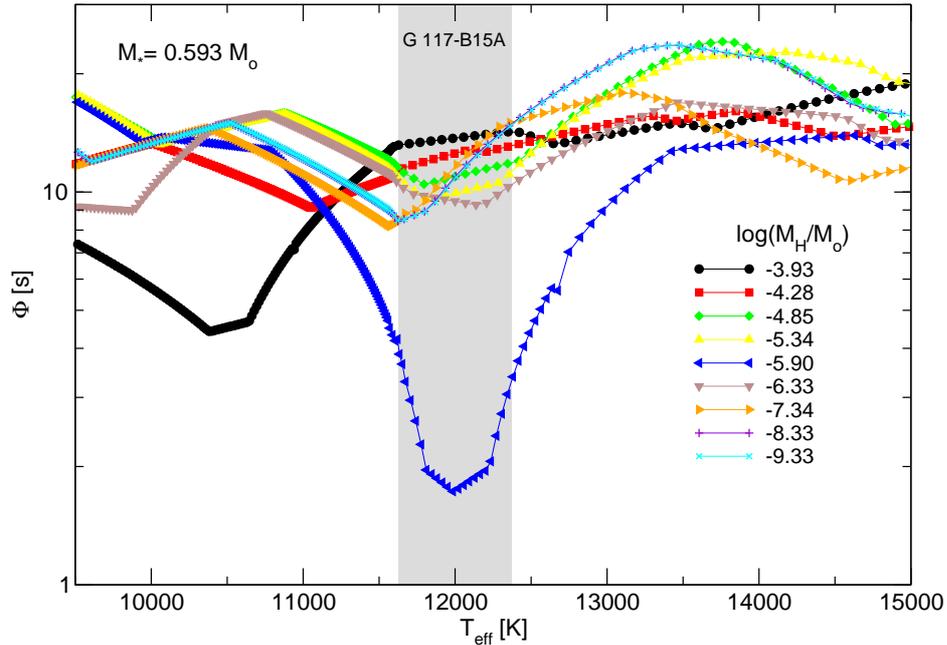


Figura 5.1: Función de calidad $\Phi(M_*, M_H, T_{\text{eff}})$ en términos de T_{eff} para los diferentes valores del espesor de la envoltura de hidrógeno (se muestran con símbolos de distintos colores) y masa estelar $M_* = 0.593 M_\odot$. La franja vertical gris indica el rango de temperatura para G117–B15A de acuerdo con la espectroscopía. Notar la ubicación del modelo de mejor ajuste (el mínimo de Φ en $T_{\text{eff}} \sim 12000$ K), correspondiente al modelo 1 ($\ell = 1$, $k = 2, 3, 4$) en la tabla 5.1.

que ajustara los tres períodos en forma simultánea. Examinando los resultados con más detalle, se descubrió que se podría encontrar un buen ajuste de los períodos si se consideraban valores adicionales de M_H cercanos a $10^{-6} M_*$ en la secuencia con $M_* = 0.593 M_\odot$, a una temperatura efectiva cercana a 12000 K. A partir de aquí, se calcularon varias secuencias adicionales para distintos valores de M_H hasta encontrar un modelo de mejor ajuste caracterizado por $\log(M_H/M_*) = -5.903$. Las características y los períodos de este modelo se encuentran en la primera fila de la tabla 5.1. El período en 215 s tiene un orden radial $k = 2$. Notar que el ajuste del período principal es excelente ($|\Delta| \equiv |\Pi_k^{\text{Teo}} - \Pi_i^{\text{Obs}}| = 0.015$ s). Aunque el ajuste de los dos períodos restantes no es tan bueno, el ajuste global, caracterizado por $\Phi = 1.729$ s, es igualmente satisfactorio. Se repitieron los cálculos, ahora suponiendo $\ell = 1$ para el modo con 215 s y permitiendo que los otros dos períodos fueran asociados con $\ell = 1$ ó $\ell = 2$. Como resultado, se obtuvo la misma solución anterior.

En la figura 5.1 se grafica la función $\Phi(M_*, M_H, T_{\text{eff}})$ en términos de la temperatura efectiva para los diferentes espesores de la envoltura de hidrógeno correspondientes a la secuencia con $M_* = 0.593 M_\odot$. A partir de esta figura se puede observar claramente la existencia de un modelo de mejor ajuste a $T_{\text{eff}} \sim 12000$ K y $M_H/M_* = 1.25 \times 10^{-6}$. Además de la solución de mejor ajuste, existe otro mínimo a $T_{\text{eff}} \sim 10380$ K y $M_H/M_* = 1.17 \times 10^{-4}$, donde $\Phi \sim 4.5$ s. Sin embargo, esta solución debe ser

descartada dado que su temperatura efectiva es muy baja comparada con los límites impuestos por la espectroscopía para G117–B15A.

La unicidad de la solución en términos del espesor de la envoltura de hidrógeno es uno de los resultados principales del estudio astrosismológico realizado para G117–B15A. Sin embargo, se debe tener en cuenta que en este estudio se están ajustando tres cantidades observadas (los períodos de pulsación de G117–B15A) variando tres parámetros de estructura (M_* , M_H y T_{eff}). Por lo tanto, podría suceder que, al variar un parámetro adicional, como por ejemplo X_O , M_{He} , etc en la grilla de modelos, se encontraran múltiples soluciones astrosismológicas debido a la ambigüedad introducida por el nuevo parámetro a ser ajustado.

También se llevaron a cabo ajustes adicionales para los cuales no se fija el valor de ℓ para cada período, sino que se obtiene como un resultado del procedimiento de ajuste, aunque se debe recordar que los valores permitidos son solamente $\ell = 1$ y $\ell = 2$. Los resultados se muestran en las filas 2 a 4 de la tabla 5.1. En particular, los períodos teóricos del modelo 2 ajustan los períodos observados con una diferencia promedio de ~ 0.18 s. Una de las razones para una diferencia tan pequeña es que existe un número mayor de modos con $\ell = 2$ que con $\ell = 1$ en un dado intervalo de períodos. Sin embargo, para los tres modelos el período principal de G117–B15A en 215 s está asociado con un modo con $\ell = 2$. Esto representa una fuerte contradicción con los resultados de Robinson et al. (1995), quienes identificaron al período en 215 s con un modo $\ell = 1$, usando espectroscopía ultravioleta con resolución temporal. Este resultado es a su vez consistente con el análisis posterior de Kotak et al. (2004). Por lo tanto, aunque estas soluciones son muy tentadoras, se deben descartar del análisis.

5.2.1. Estimación de las Incertezas Internas

Se evaluaron las incertezas en la masa estelar (σ_{M_*}), el espesor de la envoltura de hidrógeno (σ_{M_H}) y en la temperatura efectiva ($\sigma_{T_{\text{eff}}}$) del modelo de mejor ajuste empleando la siguiente expresión (Zhang et al. 1986; Castanheira & Kepler 2008):

$$\sigma_i^2 = \frac{d_i^2}{(S - S_0)} \quad (5.4)$$

donde $S_0 = \Phi(M_*^0, M_H^0, T_{\text{eff}}^0)$ es el mínimo de Φ el cual se alcanza en $(M_*^0, M_H^0, T_{\text{eff}}^0)$ correspondientes al modelo de mejor ajuste, y S es el valor de Φ cuando se modifica el parámetro i -ésimo (en este caso M_* , M_H o T_{eff}) por una cantidad d_i , dejando fijos los demás parámetros. La cantidad d_i se puede tomar como el paso mínimo en la grilla del parámetro i . Como resultado se obtuvieron las siguientes incertezas, las cuales son errores internos del procedimiento de ajuste astrosismológico: $\sigma_{M_*} \sim 0.007 M_\odot$, $\sigma_{M_H} \sim 0.7 \times 10^{-6} M_*$ y $\sigma_{T_{\text{eff}}} \sim 200$ K. Las incertezas en las demás cantidades, como L_* , R_* , g , etc, fueron derivadas de las incertezas de M_* y T_{eff} .

En la tabla 5.2 se comparan las características del modelo de mejor ajuste con las propiedades observadas para G117–B15A. En particular, se incluyen los parámetros superficiales tomados de varios estudios espectroscópicos. Se incluyen también las masas espectroscópicas calculadas interpolando sobre nuestros tracks evolutivos.

Tabla 5.2: Características de G117–B15A y del modelo de mejor ajuste. Las incertezas citadas en el modelo sismológico son errores internos del procedimiento de ajuste de períodos. La estrella progenitora del modelo astrosismológico tiene una masa estelar de $M_* = 1.75M_\odot$ en la ZAMS.

Cantidad	Robinson et al. (1995)	Koester & Allard (2000)	Koester & Holberg (2001)	Bergeron et al. (1995a, 2004)	Modelo astrosismológico
T_{eff} [K]	$12\,375 \pm 125$	$11\,900 \pm 140$	$12\,010 \pm 180$	$11\,630 \pm 200$	$11\,985 \pm 200$
M_*/M_\odot	0.591 ± 0.031	0.534 ± 0.072	0.575 ± 0.092	0.589 ± 0.02	0.593 ± 0.007
$\log g$	7.97 ± 0.06	7.86 ± 0.14	7.94 ± 0.17	7.97 ± 0.05	8.00 ± 0.09
$\log(R_*/R_\odot)$	—	—	—	—	$-1.882pm \pm 0.029$
$\log(L_*/L_\odot)$	—	—	—	—	-2.497 ± 0.030
M_{He}/M_*	—	—	—	—	2.39×10^{-2}
M_{H}/M_*	—	—	—	—	$(1.25 \pm 0.7) \times 10^{-6}$
X_{C} (central)	—	—	—	—	$0.28^{+0.22}_{-0.09}$
X_{O} (central)	—	—	—	—	$0.70^{+0.09}_{-0.22}$

Nota 1: los valores de las masas espectroscópicas citadas en las columnas de 2 a 5 fueron calculadas mediante interpolación del conjunto de tracks evolutivos (ver fig. 6.1) usando los valores de $\log g$ y T_{eff} correspondientes.

Nota 2: Robinson et al. (1995) usa modelos de atmósfera con $\text{MLT}/\alpha = 1$, mientras que los otros autores usan $\text{MLT}/\alpha = 0,6$, Por consiguiente ellos obtienen un valor de T_{eff} es más bajo.

Los valores de T_{eff} y $\log g$ de nuestro modelo astrosismológico se encuentra en buen acuerdo con los valores derivados por Koester & Allard (2000) y Koester & Holberg (2001). La masa estelar de nuestro modelo de mejor ajuste es un 3 – 11 % más alta que los valores derivados para esos estudios. La temperatura efectiva del modelo astrosismológico es ~ 350 K más alta que la temperatura espectroscópica de Bergeron et al. (1995a, 2004), y ~ 400 K más baja que el valor derivado por Robinson et al. (1995), pero tanto la gravedad superficial como la masa estelar se encuentran en excelente acuerdo con los valores citados en ambos trabajos.

5.2.2. Distancia Astrosismológica

Dado que se cuenta con el valor de la luminosidad del modelo de mejor ajuste, se puede estimar la distancia astrosismológica y la paralaje de G117–B15A a partir de la relación $\log d[\text{pc}] = 1/5(m_V - M_V + 5)$, donde $M_V = M_{\text{bol}} - BC$. La magnitud bolométrica M_{bol} se puede calcular como $M_{\text{bol}} = M_{\text{bol}}(\odot) - 2.5 \log(L_*/L_\odot)$, donde la magnitud bolométrica del Sol es $M_{\text{bol}}(\odot) = +4.75$ (Allen 1973). Usando $BC = -0.611$ (Bergeron et al. 1995a) y $m_V = 15.50$ (Bergeron et al. 1995b), se obtiene la distancia $d = 60.3 \pm 2.5$ pc, y la paralaje $\pi = 16.6 \pm 0.8$ mas, en excelente acuerdo con las inferencias de Bradley (1998) ($\pi = 16.5$ mas). La distancia estimada a partir de espectros óptico, IUE y HST es 58 ± 2 pc, 59 ± 5 pc, 67 ± 9 pc, respectivamente. Holberg et al. (2008) derivó una distancia de 58.68 ± 0.60 pc. El valor de la paralaje astrosismológica es más grande que el valor trigonométrico que figura en el catálogo de paralaje de Yale (van Altena et al. 1994) de 10.5 ± 4.2 mas. Para que la paralaje astrosismológica sea compatible con la trigonométrica, la masa del modelo astrosismológico debería ser tan baja como $0.35 M_\odot$. Este valor para la masa estelar de G117–B15A se puede descartar en forma segura por espectroscopía. Entonces, se puede concluir que la paralaje trigonométrica es más incierta de lo indicado y que el

valor astrosismológico es muy robusto.

5.2.3. Estudios Previos y Discusión de los Resultados

Todos los estudios previos sobre G117–B15A (Bradley 1998; Benvenuto et al. 2002b, Castanheira & Kepler 2008, Bischoff-Kim et al. 2008a) encuentran una ambigüedad de las soluciones relacionada con el espesor de la envoltura de hidrógeno de la estrella. En estos trabajos, se obtiene una familia de soluciones con envoltura delgada para una identificación $k = 1, 2, 3$, además de una segunda familia de soluciones con envolturas gruesas y $k = 2, 3, 4$. Por el contrario, el análisis astrosismológico realizado en este trabajo indica una única solución en términos del espesor de la envoltura de hidrógeno, con $\log(M_{\text{H}}/M_*) \sim -5.9$, que se corresponde con una identificación $k = 2, 3, 4$, asociada con envolturas gruesas en estudios previos. Este resultado resuelve la degeneración por primera vez. La razón para esta unicidad en la solución reside en que, sin importar el valor de la masa estelar, la temperatura o el espesor de la envoltura de hidrógeno, es imposible encontrar un modelo en la grilla calculada en este trabajo, cuyo modo con $k = 1$ tenga un período cercano a 215 s, lo cual impide encontrar cualquier posible modelo sismológico con una identificación $k = 1, 2, 3$. Esto se puede ver a partir de la figura 5.2, donde se grafican los períodos teóricos en términos del espesor de la envoltura de hidrógeno para modelos con $T_{\text{eff}} \sim 12\,000$ K y $M_* = 0.525 M_{\odot}$ (panel izquierdo), $M_* = 0.593 M_{\odot}$ (panel central) y $M_* = 0.878 M_{\odot}$ (panel derecho). En el panel central se indica el modelo de mejor ajuste para G117–B15A (línea naranja a trazos). Claramente, el período para el modo con $k = 1$ es siempre muy corto en comparación con el período principal de G117–B15A. También se calculó una secuencia evolutiva con las mismas características que aquella del modelo astrosismológico, pero con una envoltura aún más delgada que las utilizadas en la grilla ($\log(M_{\text{H}}/M_*) < -9.33$) enumeradas en la tabla 4.1. Incluso en este caso, los períodos de pulsación siguen la misma tendencia mostrada en el panel central de la figura 5.2, con el período del modo con $k = 1$ notoriamente alejado de 215 s. Como resultado, no es posible encontrar una solución de envoltura delgada con una identificación $k = 1, 2, 3$.

Se debe tener en mente, sin embargo, que también se podrían obtener múltiples familias de soluciones para G117–B15A si fuera posible variar un parámetro estructural adicional en los modelos evolutivos. Por ejemplo, si fuera posible cambiar libremente el contenido de helio, adoptando un valor de M_{He} dos órdenes de magnitud menor, entonces el período con $k = 1$ podría acercarse a 215 s, recobrando así las dos familias de envoltura delgada y gruesa que se obtienen en estudios anteriores. Sin embargo, como se discutió en la sección 4.1.1, valores tan bajos de M_{He} son difíciles de justificar en el marco de la evolución estelar.

Un rasgo distintivo que se puede observar en la figura 5.2 es la presencia de un comportamiento similar al *avoided crossing*, como vimos en la sección 4.2.1. Como resultado, para ciertos valores de M_{H} , el espaciamiento de períodos resulta ser muy corto. Este efecto es más notorio para los modos con bajo orden radial. Por ejemplo, para la secuencia con $M_* = 0.525 M_{\odot}$, el espaciamiento de períodos entre modos con $k = 1$ y $k = 2$ es de solo ≈ 8 s si $\log(M_{\text{H}}/M_*) \sim -4.8$. Algo similar se encuentra

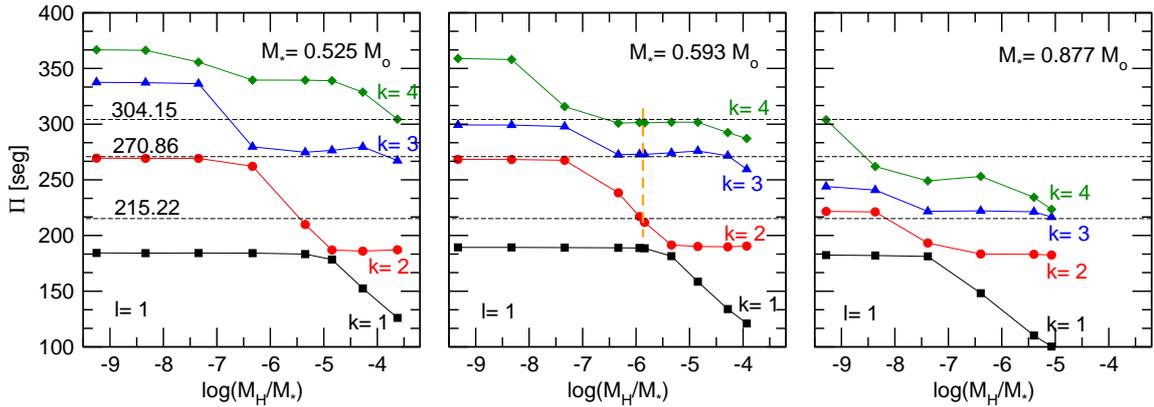


Figura 5.2: Períodos de los modos con $\ell = 1$ and $k = 1, 2, 3$ y 4 en términos del espesor de la envoltura de hidrógeno correspondiente a secuencias con $M_* = 0.525 M_\odot$ (panel izquierdo), $M_* = 0.593 M_\odot$ (panel central), y $M_* = 0.877 M_\odot$ (panel derecho). Los períodos observados para G117–B15A se representan como líneas horizontales a trazos. La línea vertical a trazos en el panel central indica el ajuste de los períodos teóricos del modelo astrosismológico y los períodos observados en G117–B15A.

para las secuencias con $M_* = 0.593 M_\odot$ y $M_* = 0.878 M_\odot$ para $\log(M_H/M_*) \sim -5.3$ y $\log(M_H/M_*) \sim -7.4$, respectivamente.

En las figura 5.3 y 5.4 se presentan las soluciones astrosismológicas de envoltura delgada y gruesa indicadas con símbolos vacíos y llenos, respectivamente, obtenidas en trabajos previos. La posición de nuestro modelo astrosismológico está indicado por un símbolo de estrella (magenta). En la figura 5.3 se observa una clara correlación entre la masa estelar y la temperatura efectiva en las soluciones de los trabajos de Bradley (1998), Bischoff-Kim et al. (2008a) y Castanheira & Kepler (2008): las soluciones más frías tienen masas mayores, mientras que las soluciones de Benvenuto et al. (2002b) exhiben la tendencia opuesta. Todas las soluciones de Bischoff-Kim et al. (2008a) y dos soluciones de Castanheira & Kepler (2008) son sustancialmente más masivas que el modelo de mejor ajuste de Bradley (1998), Benvenuto et al. (2002b) y nuestro modelo astrosismológico, y también que las estimaciones de masa estelar para G117–B15A a partir de estudios espectroscópicos.

La existencia de dos familias de soluciones separadas respecto del espesor de la envoltura se ve claramente de la figura 5.4. También se observa una correlación entre M_H y M_* , donde los modelos astrosismológicos de mayor masa tienen envolturas más delgadas. Curiosamente, esta tendencia es la misma que se predice de los cálculos de evolución estelar canónica (Altaf et al. 2010b). El valor máximo de M_H en términos de la masa estelar predicho por la evolución estelar se indica en la figura 5.4 con una línea gruesa (naranja). La figura también muestra una correspondencia notable entre las soluciones de envoltura delgada y gruesa de Bradley (1998), Benvenuto et al. (2002b), y Castanheira & Kepler (2008). Por otro lado, las soluciones de Bischoff-Kim et al. (2008a), de ambas familias, se encuentran desplazadas hacia valores de envolturas más delgadas. En este contexto, la única solución astrosismológica

obtenida en este trabajo parece ser más compatible con la familia de soluciones de envoltura delgada, aunque con una identificación del orden radial típica de soluciones con envolturas gruesas, que con el grupo de soluciones de envoltura delgada.

El valor del espesor de la envoltura de hidrógeno de nuestro modelo astrosismológico para G117–B15A, aproximadamente dos órdenes de magnitud más bajo que el valor canónico predicho por la evolución estelar, se encuentra en acuerdo con el valor esperado en el escenario de pulso térmico tardío o LTP (*late thermal pulse*). En este escenario, la estrella experimenta un flash en la cáscara de helio en combustión poco después de abandonar la AGB (Blöcker 2001). Durante el LTP, no se quema todo el hidrógeno remanente, sino que una parte es diluida por la convección superficial y se mezcla con una capa más interna anteriormente enriquecida en helio. Por el contrario una estrella en la post-AGB que experimenta un pulso térmico muy tardío o VLTP (*very late thermal pulse*) quema todo el hidrógeno, dando lugar a un episodio de *born again*. Althaus et al. (2005b) han explorado la posibilidad de que una estrella con masa inicial $2.7 M_{\odot}$ que experimenta un LTP poco después de abandonar la etapa de pulsos térmicos en la AGB, pueda alcanzar la curva de enfriamiento con una envoltura de hidrógeno sustancialmente más delgada que la predicha por la evolución estelar estándar. Estos autores encontraron que la mayor parte del material originalmente rico en hidrógeno de la estrella en la post-AGB se quema después de la evolución post-LTP, cuando la estrella vuelve al régimen de altas temperaturas efectivas. Como resultado obtienen un remanente de enana blanca de $M_{*} = 0.5885 M_{\odot}$, con un espesor de la envoltura de hidrógeno de $M_{\text{H}} = 1.7 \times 10^{-6} M_{*}$. Notar que nuestro modelo de mejor ajuste para G117–B15A y el modelo de enana blanca resultante del escenario propuesto por Althaus et al. (2005b) se ubican aproximadamente en el mismo lugar del plano $M_{*} - \log(M_{\text{H}}/M_{*})$ (ver la figura 5.4). Notemos, sin embargo, que ambos modelos tienen diferentes estructuras químicas internas, en particular debido a cantidades apreciables de ^{14}N en la base del buffer de helio del modelo de enana blanca DA post-LTP de Althaus et al. (2005b) (ver el panel D de la figura 2 de Miller Bertolami et al. 2005). A pesar de esto se puede concluir que el presente estudio reafirma la validez de los resultados de Althaus et al. (2005b) sobre la existencia de enanas blancas DA con envolturas de hidrógeno más delgadas que el valor canónico, y sugiere que G117–B15A podría ser la descendiente de una estrella progenitora que ha experimentado un episodio de LTP antes de alcanzar la curva final de enfriamiento.

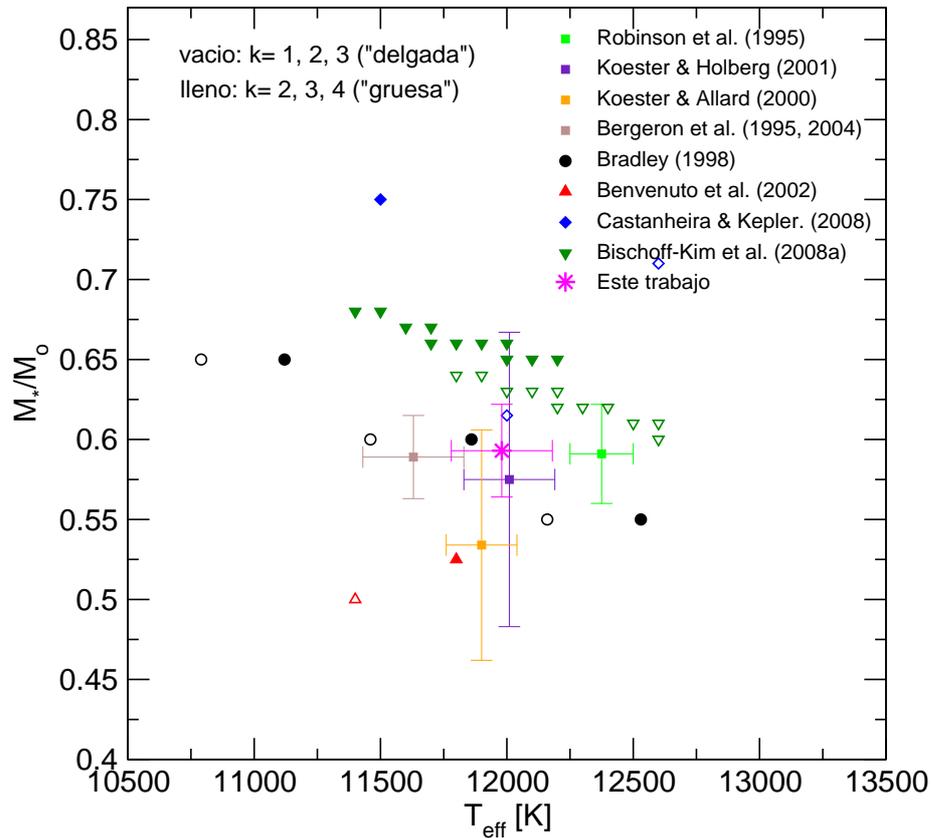


Figura 5.3: Ubicación de los modelos astrosismológicos para G117–B15A en el plano $T_{\text{eff}} - M_*$ de acuerdo con los estudios realizados hasta el momento, y de acuerdo al presente estudio, indicada con diferentes símbolos. Los símbolos vacíos corresponden a soluciones para las cuales la identificación del orden radial es $k = 1, 2, 3$ (envolturas delgadas), y símbolos llenos están asociados con las soluciones para períodos con $k = 2, 3, 4$ (envolturas gruesas). También se incluye la posición de G117–B15A de acuerdo con varios estudios espectroscópicos (cuadrados llenos). En el caso de Robinson et al. (1995) se usó modelos de atmósferas con $\text{MLT}/\alpha = 1$, mientras que en el resto de los estudios se usó $\text{MLT}/\alpha = 0.6$, por lo tanto se obtienen valores menores de T_{eff} .

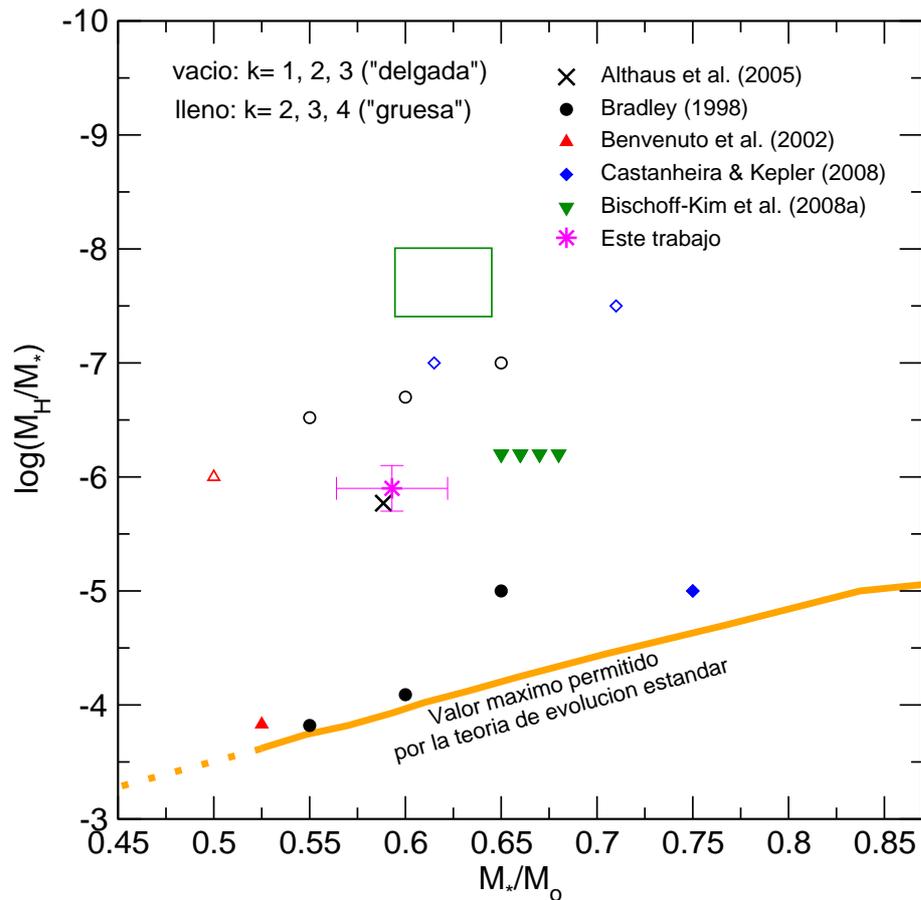


Figura 5.4: Similar a la Fig. 5.3, pero en el plano $M_* - \log(M_{\text{H}}/M_*)$. Con un rectángulo gris se indican las soluciones de envoltura delgada de Bischoff-Kim et al. (2008a) correspondientes a una identificación $k = 1, 2, 3$. Con fines comparativos, se incluye la posición del remanente de post-LTP con envoltura delgada del escenario de Althaus et al. (2005b).

CAPÍTULO 6

Astrosismología de estrellas ZZ Ceti: Las ZZ Ceti clásicas

En este capítulo se describen los ajustes astrosismológicos realizados para 44 estrellas ZZ Ceti brillantes, incluyendo G117-B15A. Las técnicas de ajuste de períodos utilizadas son las mismas que las descritas en el capítulo anterior, empleadas en el estudio astrosismológico de G117-B15A. Los resultados presentados aquí están publicados en Romero et al. (2012).

6.1. El Conjunto de 44 Estrellas ZZ Ceti

A continuación se presentan los resultados obtenidos a partir del estudio astrosismológico de la muestra de estrellas ZZ Ceti clásicas, que fueron descubiertas antes del advenimiento del SDSS. Los parámetros atmosféricos de las 44 estrellas ZZ Ceti se muestran en las columnas 2 y 3 de la tabla 6.1. En esta tabla las estrellas están ordenadas por temperatura efectiva decreciente. La posición de las estrellas analizadas en el plano $\log g - T_{\text{eff}}$ se indica en la figura 6.1 junto con los tracks evolutivos calculados. Se deja para un trabajo futuro el estudio de las ZZ Ceti más débiles descubiertas en el marco del programa SDSS (Mukadam et al. 2004; Mullally et al. 2005; Kepler et al. 2005b; Castanheira et al. 2006, 2007, 2010). La mayoría de estas estrellas fueron incluidas en el estudio realizado por Castanheira & Kepler (2009).

Las masas espectroscópicas de las 44 estrellas ZZ Ceti analizadas se presentan en la columna 4 de la tabla 6.1. Estos valores fueron derivados a partir de los valores de $\log g$ y T_{eff} inferidos a través de la espectroscopía, interpolando los tracks evolutivos en el diagrama $\log g - T_{\text{eff}}$. El valor medio de la masa espectroscópica de esta muestra de estrellas DA variables es $\langle M_* \rangle_{\text{spec}} = 0.630 \pm 0.028 M_{\odot}$. Es interesante comparar este valor con el valor promedio de la masa de las estrellas enanas blancas DA (pulsantes y no pulsantes) obtenido en estudios recientes. Kepler et al. (2010) reportan un valor $\langle M_* \rangle_{DA} = 0.604 \pm 0.003 M_{\odot}$, basado en una muestra de 1505 estrellas enanas blancas DA del SDSS (Data Release 4). Este valor es un poco más bajo ($\sim 4\%$) que el valor obtenido para nuestra muestra. Por otro lado se encuentra un buen acuerdo con los valores dados por Falcon et al. (2010), $\langle M_* \rangle_{DA} = 0.647^{+0.013}_{-0.014} M_{\odot}$, obtenido a partir de la determinación del corrimiento al rojo gravitacional de 449 enanas blancas DA, y

Tabla 6.1: Parámetros atmosféricos y masas espectroscópicas para la muestra de estrellas ZZ Ceti analizadas.

Estrella	T_{eff} [K]	$\log g$	M_*/M_{\odot}	Ref.
G226–29	$12\,460 \pm 200$	$8,28 \pm 0,05$	$0,771 \pm 0,032$	3
HS 1531+7436	$12\,350 \pm 181$	$8,17 \pm 0,048$	$0,704 \pm 0,029$	1
G185–32	$12\,130 \pm 200$	$8,05 \pm 0,05$	$0,634 \pm 0,028$	3
L19–2	$12\,100 \pm 200$	$8,21 \pm 0,05$	$0,726 \pm 0,033$	3
G132–12	$12\,080 \pm 200$	$7,94 \pm 0,05$	$0,575 \pm 0,026$	4
EC 11507–1519	$12\,030 \pm 200$	$7,98 \pm 0,05$	$0,596 \pm 0,026$	4
PG 1541+650	$12\,000 \pm 70$	$7,79 \pm 0,04$	$0,502 \pm 0,023^*$	6
R548	$11\,990 \pm 200$	$7,97 \pm 0,05$	$0,590 \pm 0,026$	3
GD 165	$11\,980 \pm 200$	$8,06 \pm 0,05$	$0,639 \pm 0,029$	3
GD 66	$11\,980 \pm 200$	$8,05 \pm 0,05$	$0,634 \pm 0,028$	3
G207–9	$11\,950 \pm 200$	$8,35 \pm 0,05$	$0,812 \pm 0,033$	3
EC 14012–1446	$11\,900 \pm 200$	$8,16 \pm 0,05$	$0,696 \pm 0,031$	3
KUV 11370+4222	$11\,890 \pm 200$	$8,06 \pm 0,05$	$0,639 \pm 0,028$	3
G238–53	$11\,890 \pm 200$	$7,91 \pm 0,05$	$0,559 \pm 0,025$	3
GD 99	$11\,820 \pm 200$	$8,08 \pm 0,05$	$0,650 \pm 0,028$	3
G29–38	$11\,820 \pm 200$	$8,14 \pm 0,05$	$0,684 \pm 0,030$	3
LP 133–144	$11\,800 \pm 200$	$7,87 \pm 0,05$	$0,539 \pm 0,025$	3
HS 1249+0426	$11\,770 \pm 181$	$7,92 \pm 0,048$	$0,564 \pm 0,024$	1
MCT 2148–2911	$11\,740 \pm 200$	$7,82 \pm 0,05$	$0,515 \pm 0,023^*$	5
GD 385	$11\,710 \pm 200$	$8,04 \pm 0,05$	$0,627 \pm 0,028$	3
GD 244	$11\,680 \pm 200$	$8,08 \pm 0,05$	$0,650 \pm 0,028$	2
HS 0507+0434B	$11\,630 \pm 200$	$8,17 \pm 0,05$	$0,702 \pm 0,030$	3
G117–B15A	$11\,630 \pm 200$	$7,97 \pm 0,05$	$0,589 \pm 0,026$	3
EC 23487–2424	$11\,520 \pm 200$	$8,10 \pm 0,05$	$0,661 \pm 0,028$	3
MCT 0145–2211	$11\,500 \pm 200$	$8,14 \pm 0,05$	$0,684 \pm 0,030$	3
KUV 08368+4026	$11\,490 \pm 200$	$8,05 \pm 0,05$	$0,633 \pm 0,028$	3
PG 2303+243	$11\,480 \pm 200$	$8,09 \pm 0,05$	$0,655 \pm 0,028$	3
BPM 31594	$11\,450 \pm 200$	$8,11 \pm 0,05$	$0,666 \pm 0,029$	3
HLTau–76	$11\,450 \pm 200$	$7,89 \pm 0,05$	$0,548 \pm 0,025$	3
G255–2	$11\,440 \pm 200$	$8,17 \pm 0,05$	$0,702 \pm 0,030$	3
HE 1429–037	$11\,434 \pm 36$	$7,82 \pm 0,02$	$0,514 \pm 0,010^*$	7
G191–16	$11\,420 \pm 200$	$8,05 \pm 0,05$	$0,632 \pm 0,028$	3
HE 1258+0123	$11\,400 \pm 200$	$8,04 \pm 0,05$	$0,627 \pm 0,029$	3
G232–38	$11\,350 \pm 200$	$8,01 \pm 0,05$	$0,610 \pm 0,027$	4
KUV 02464+3239	$11\,290 \pm 200$	$8,08 \pm 0,05$	$0,648 \pm 0,028$	2
HS 1625+1231	$11\,270 \pm 181$	$8,06 \pm 0,048$	$0,638 \pm 0,027$	1
BPM 30551	$11\,260 \pm 200$	$8,23 \pm 0,05$	$0,737 \pm 0,032$	3
HS 1824–6000	$11\,192 \pm 181$	$7,65 \pm 0,048$	$0,427 \pm 0,030^*$	1
G38–29	$11\,180 \pm 200$	$7,91 \pm 0,05$	$0,557 \pm 0,025$	3
GD 154	$11\,180 \pm 200$	$8,15 \pm 0,05$	$0,689 \pm 0,029$	3
R808	$11\,160 \pm 200$	$8,04 \pm 0,05$	$0,626 \pm 0,028$	3
BPM 24754	$11\,070 \pm 200$	$8,03 \pm 0,05$	$0,620 \pm 0,028$	3
G30–20	$11\,070 \pm 200$	$7,95 \pm 0,05$	$0,578 \pm 0,026$	3
PG 1149+058	$10\,980 \pm 181$	$8,10 \pm 0,048$	$0,660 \pm 0,027$	1

Referencias: ⁽¹⁾Voss et al. (2006), ⁽²⁾Fontaine et al. (2003a), ⁽³⁾Bergeron et al. (2004), ⁽⁴⁾Gianninas et al. (2006), ⁽⁵⁾Gianninas et al. (2005), ⁽⁶⁾Homeier et al. (1998), ⁽⁷⁾Silvotti et al. (2005).

Nota: Los valores de masa estelar marcados con * fueron derivados a partir de una extrapolación de los tracks evolutivos calculados en este trabajo, y por lo tanto, son inciertos.

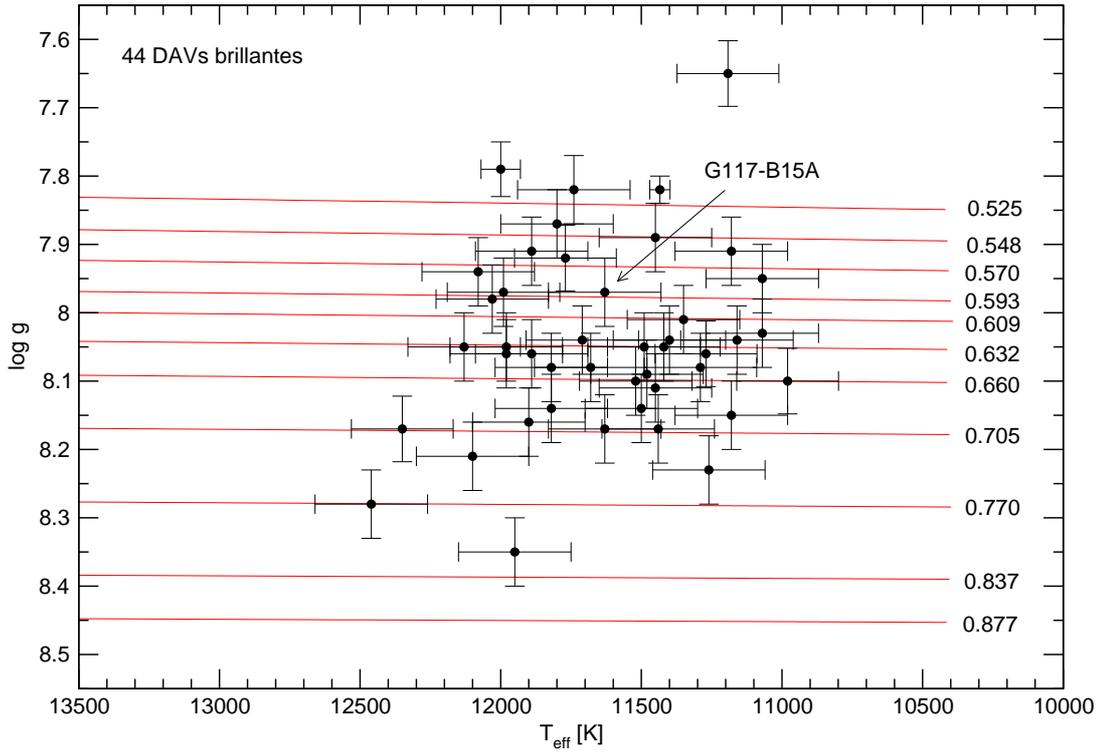


Figura 6.1: Ubicación de las 44 estrellas ZZ Ceti analizadas en este trabajo en el plano $\log g - T_{\text{eff}}$. Las líneas corresponden al conjunto de tracks evolutivos de estrellas enanas blancas DA calculados con espesores gruesos (canónicos) de la envoltura de hidrógeno.

con Tremblay et al. (2011), $\langle M_* \rangle_{DA} = 0.613 M_{\odot}$, obtenido a partir de 1089 estrellas DA del DR4 del SDSS.

6.2. Modelos Astrosismológicos de Estrellas ZZ Ceti

Aquí se presenta el análisis astrosismológico de las 44 estrellas ZZ Ceti presentadas en la tabla 6.1, con G117–B15A incluida. En la segunda y tercera columna de la tabla 6.2 se presentan los períodos observados y sus amplitudes, respectivamente. Estos valores fueron extraídos de los trabajos de Castanheira & Kepler (2008, 2009), a no ser que se indique lo contrario. La cuarta columna de la tabla 6.2 muestra los períodos teóricos del modelo astrosismológico obtenido para cada estrella, mientras que la quinta y sexta columna enumeran la identificación de ℓ y k , respectivamente, de cada modo de pulsación. La séptima columna muestra la diferencia absoluta entre los períodos observado y teórico, y la octava columna indica el valor de la función de calidad definida en la ecuación (5.1).

En la figura 6.2 se comparan los valores de todos los períodos observados con los períodos teóricos asociados por el ajuste astrosismológico, para todas las estrellas ZZ Ceti analizadas en este trabajo. En general se observa un excelente acuerdo entre

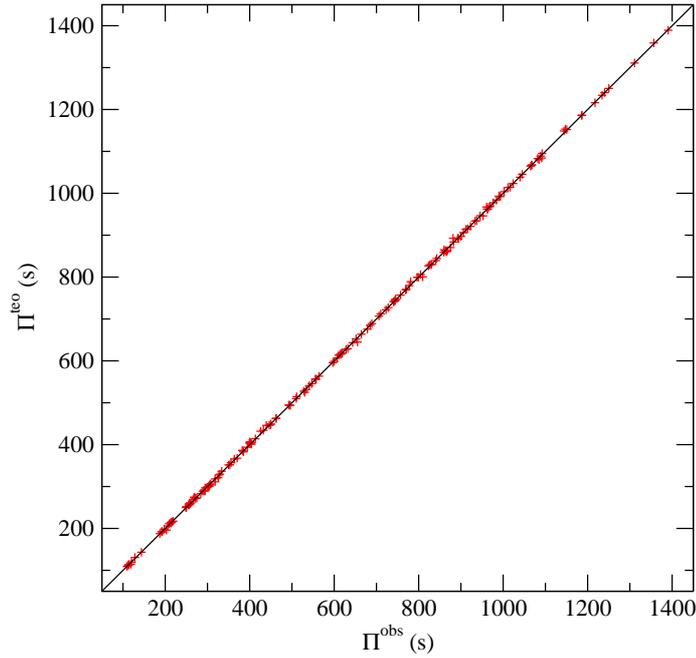


Figura 6.2: Comparación entre los valores de los períodos observados y los períodos teóricos (cruces rojas) para todos los modos observados en la muestra completa de 44 estrellas ZZ Ceti analizadas en este trabajo. La línea sólida indica la correspondencia 1:1.

ambos conjuntos de datos.

A continuación se describen los criterios generales adoptados para la selección de los modelos astrosismológicos para cada estrella.

6.2.1. Criterios de Selección

Usualmente, cuando se realizan ajustes período a período en estrellas ZZ Ceti, se encuentran múltiples soluciones sismológicas, es decir, que varios modelos pueden reproducir en forma similar los períodos observados en una dada estrella DAV. Entonces, para poder aislar un único modelo astrosismológico entre varias (e igualmente válidas) soluciones posibles, se deben aplicar algunos criterios de selección:

- Se buscan los modelos que correspondan a mínimos en las funciones de calidad, para asegurar que los períodos teóricos sean cercanos a los períodos observados.
- Cuando es posible, se utilizan indentificaciones externas de ℓ para los períodos observados, provenientes de estudios que emplean un método de fotometría de alta velocidad (por ejemplo, Robinson et al. 1995), el método de espectroscopía ultravioleta con resolución temporal (por ejemplo, Kepler et al. 2000) o el método de espectroscopía con resolución temporal en el óptico (por ejemplo, Clemens et al. 2000).

- Cuando se encuentran varias familias de soluciones, se elige el modelo cuyos valores de T_{eff} y $\log g$ se acerquen lo más posible a los valores espectroscópicos. De esta manera, se garantiza que los parámetros superficiales del modelo astrosismológico se correspondan con las observaciones.
- Entre todas las posibles soluciones astrosismológicas con valores similares de la función de calidad, se priorizan las soluciones que ajusten a los modos de mayor amplitud con modos teóricos con $\ell = 1$. Esto se debe a la propiedad bien conocida que los modos con $\ell = 1$ muestran amplitudes sustancialmente mayores que los modos con $\ell = 2$, debido a que los efectos de cancelación geométrica aumentan con ℓ creciente (Dziembowski 1977).
- En los casos donde varios modos tiene amplitudes similares en el espectro de potencia, se da más peso a los modelos que ajustan esos períodos con períodos teóricos con el mismo valor de ℓ . De esta manera se asume que dos modos propios con diferente grado armónico usualmente no deberían tener amplitudes similares.
- Para una estrella con un número grande de modos observados, se favorecen las soluciones sismológicas que ajustan los períodos observados con un número mayor de modos teóricos con $\ell = 1$. Esto se debe a que hay más probabilidades de observar un modo con $\ell = 1$ que con $\ell = 2$.
- En el caso opuesto, cuando una estrella tiene solo un modo observado, se emplea solamente el conjunto de períodos con $\ell = 1$ para realizar el ajuste de períodos. Luego, se elige el modelo astrosismológico como aquel que minimiza las funciones de calidad, y de se necesario, se restringen las soluciones usando los límites en los parámetros atmosféricos dados por la espectroscopía.

Tabla 6.2: Períodos observados en la muestra de las 44 estrellas ZZ Ceti brillantes estudiadas en este trabajo y los períodos teóricos correspondientes, junto con la identificación del grado armónico y del orden radial de nuestros modelos astrosismológicos.

Estrella	Π_{obs} [s]	amp [mma]	Π_{teo} [s]	ℓ	k	Δ [s]	ϕ [s]
HS 1531+7436	112.50	...	112.499	1	1	0.001	0.001
GD 244 ⁽¹⁾	202.98	4.04	195.973	2	5	7.007	2.165
	256.56	12.31	257.215	1	3	0.665	
	294.60	4.85	296.820	2	9	2.220	
	307.13	20.18	306.283	1	5	0.847	
	906.08	1.72	906.176	1	19	0.086	
G226–29	109.28	...	109.246	1	1	0.032	0.032
HS 0507+0434B	355.80	24.0	356.737	1	6	0.937	0.778
	446.20	13.9	446.429	1	8	0.229	

Tabla 6.2 – continuación

Estrella	Π_{obs} [s]	amp [mma]	Π_{teo} [s]	ℓ	k	Δ [s]	ϕ [s]
	555.30	16.6	556.767	1	11	1.468	
	743.40	7.6	742.920	1	16	0.679	
LP 133–144	209.20	10	211.247	1	2	2.047	1.256
	305.70	5.3	304.394	2	8	1.306	
	327.30	4.0	327.716	2	9	0.416	
EC 11507–1519	191.70	3.59	191.964	1	2	0.264	0.231
	249.60	7.70	249.798	1	4	0.198	
L19–2	113.80	2.4	113.313	2	2	0.487	1.224
	118.70	1.2	114.495	1	1	4.205	
	143.60	0.6	143.272	2	3	0.128	
	192.60	6.5	192.561	1	2	0.039	
	350.10	1.1	351.359	1	6	1.259	
GD 66 ⁽²⁾	197.65	4.21	198.104	2	4	0.450	0.871
	255.87	3.43	256.137	2	6	0.270	
	271.71	16.70	271.804	1	3	0.089	
	302.77	11.29	300.102	1	4	2.663	
G132–12	212.70	4.3	212.703	1	2	0.003	0.003
G207–9	259.10	17.3	258.853	1	4	0.247	0.767
	292.00	49.0	290.379	2	10	1.621	
	318.00	64.0	318.257	1	5	0.257	
	557.40	63.4	556.204	1	12	1.376	
	740.40	46.4	741.034	1	17	0.334	
G117–B15A	215.20	17.36	215.215	1	2	0.015	1.729
	270.46	6.14	273.437	1	3	2.977	
	304.05	7.48	301.854	1	4	2.196	
MCT 2148–2911	260.80	12.6	260.798	1	4	0.002	0.002
G38–29 ⁽³⁾	413.307	3.07	413.985	2	16	0.678	1.515
	432.354	3.57	434.227	2	17	1.873	
	546.960	6.97	545.442	2	22	1.519	
	705.970	18.44	707.049	1	16	1.079	
	840.390	5.19	839.307	1	20	1.083	
	899.971	10.59	896.903	2	38	3.068	
	922.567	5.94	921.066	2	39	1.591	
	945.448	12.34	946.328	2	40	0.880	
	962.007	8.09	962.277	1	23	0.270	
	963.593	4.58	962.277	1	23	1.316	
	989.719	10.04	993.0267	2	42	3.308	
	1002.16	7.14	1003.878	1	24	1.718	
	1016.15	5.79	1014.220	2	43	1.930	
	1081.82	5.04	1082.720	1	26	0.900	
PG 1541+650 ⁽⁴⁾	689.00	...	688.891	1	11	0.109	0.270
	757.00	...	757.047	1	12	0.047	

Tabla 6.2 – continuación

Estrella	Π_{obs} [s]	amp [mma]	Π_{teo} [s]	ℓ	k	Δ [s]	ϕ [s]
	564.00	...	563.346	2	16	0.654	
G191–16 ⁽⁸⁾	510.00	...	509.983	1	9	0.017	0.931
	600.00	...	598.812	1	11	1.188	
	710.00	...	712.027	1	14	2.027	
	893.00	...	893.495	1	18	0.495	
G185–32	215.74	1.93	215.739	1	2	0.001	1.691
	266.17	0.46	269.253	2	7	3.083	
	300.60	1.04	298.724	2	8	1.876	
	370.21	1.62	367.694	1	5	2.516	
	651.70	0.67	652.677	1	12	0.978	
EC 14012–1446	398.90	12.1	403.823	1	7	4.923	2.541
	530.10	16.7	524.782	1	10	5.318	
	610.40	54.3	613.677	1	12	3.277	
	678.60	7.6	675.620	1	14	2.980	
	722.90	22.9	721.733	1	15	1.167	
	769.10	51.7	769.121	1	16	0.042	
	882.70	2.9	883.878	2	34	1.178	
	937.20	11.0	934.485	2	36	2.715	
	1217.40	7.5	1216.141	1	27	1.259	
EC23487–2424	804.50	19.3	806.160	1	19	1.660	2.297
	868.20	12.8	863.294	1	21	4.906	
	992.70	24.4	992.375	1	24	0.325	
GD 165	114.30	...	114.278	2	2	0.022	0.889
	120.36	...	119.195	1	1	0.445	
	192.68	...	192.102	1	2	0.578	
	249.90	...	252.412	1	3	2.512	
R548	187.28	0.9	187.597	1	1	0.308	2.516
	212.95	5.4	213.401	1	2	0.451	
	274.51	3.5	272.263	1	3	2.249	
	318.07	1.1	311.361	2	8	6.709	
	333.64	1.3	336.504	2	9	2.864	
HE 1258+0123	439.20	9.8	446.066	2	14	6.867	2.099
	528.50	9.3	527.704	1	9	0.796	
	628.00	15.2	627.326	2	21	0.679	
	744.60	22.9	744.780	1	14	0.180	
	881.50	17.6	892.728	1	17	1.228	
	1092.10	14.1	1094.947	1	22	2.847	
GD 154	402.60	0.3	404.998	1	5	2.398	0.903
	1088.60	2.0	1088.860	1	20	0.260	
	1186.50	2.4	1186.550	1	22	0.050	
GD 385	128.10	3.7	130.665	2	2	2.564	1.291
	256.00	11.2	255.983	1	3	0.017	

Tabla 6.2 – continuación

Estrella	Π_{obs} [s]	amp [mma]	Π_{teo} [s]	ℓ	k	Δ [s]	ϕ [s]
HE 1429–037	450.10	10.2	449.474	1	6	0.626	1.378
	826.40	18.3	829.489	1	14	3.089	
	969.00	12.7	968.924	1	17	0.076	
	1084.90	16.3	1080.279	1	19	4.621	
HS 1249+0426	288.90	7.55	288.905	1	4	0.005	0.005
G238–53	206.00	9.0	205.987	1	2	0.013	0.013
HS 1625+1231 ⁽⁵⁾	248.90	7.8	250.127	2	7	1.227	3.020
	268.20	13.3	274.612	1	3	6.412	
	325.50	13.3	320.910	1	5	4.590	
	353.00	10.7	351.912	2	11	1.088	
	385.20	17.0	382.670	1	6	2.530	
	425.80	13.9	431.967	1	7	6.167	
	533.60	23.6	531.504	1	9	2.096	
	862.90	48.9	862.949	1	17	0.049	
G29–38	218.70	1.5	217.321	2	4	1.379	2.841
	283.90	4.8	282.919	2	6	0.981	
	363.50	4.7	365.551	2	9	2.051	
	400.50	9.1	406.814	2	10	6.314	
	496.20	7.9	493.659	2	13	2.541	
	614.40	32.8	616.059	1	9	1.659	
	655.10	6.1	644.728	2	18	10.372	
	770.80	5.1	770.809	2	22	0.008	
	809.40	30.1	800.395	2	23	9.005	
	859.60	24.6	858.978	2	25	0.622	
	894.00	14.0	891.098	2	26	2.902	
	1150.50	3.6	1152.052	2	34	1.552	
	1185.60	3.4	1185.529	2	35	0.072	
	1239.90	1.9	1240.220	2	37	0.320	
PG2303+243 ⁽⁶⁾	394.4	7.3	393.826	2	9	0.574	0.788
	616.4	31.4	616.560	1	8	0.160	
	863.8	7.4	862.711	2	24	1.089	
	965.3	19.7	966.590	1	15	1.290	
MCT0145–2211	462.20	25	462.353	1	7	0.153	1.494
	727.90	19	726.912	1	13	0.988	
	823.20	15	826.663	1	15	3.463	
BPM 30551	606.80	11.5	607.055	1	12	0.255	0.175
	744.70	10.5	744.605	1	15	0.096	
GD 99	1311.00	5.0	1311.002	1	28	0.002	0.002
BPM 24754	643.70	...	643.330	2	21	0.370	0.938
	1045.10	...	1045.204	1	20	0.994	
	1234.10	...	1234.005	1	24	0.095	
	1356.60	...	1358.891	2	47	2.291	

Tabla 6.2 – continuación

Estrella	Π_{obs} [s]	amp [mma]	Π_{teo} [s]	ℓ	k	Δ [s]	ϕ [s]
KUV 02464+3239 ⁽⁷⁾	619.30	4.0	618.963	2	17	0.322	1.640
	777.60	5.5	779.541	1	12	1.931	
	829.70	11.6	829.913	2	24	1.229	
	866.20	9.5	860.447	2	25	5.704	
	993.20	13.2	992.707	1	16	0.717	
	1250.30	4.4	1250.374	1	21	0.121	
PG 1149+058	1023.50	10.5	1023.479	1	20	0.021	0.021
BPM 31594 ⁽⁸⁾	401.93	...	402.453	1	5	0.523	0.321
	617.28	...	617.162	1	10	0.118	
KUV 11370+4222	257.20	5.3	259.369	1	3	2.169	0.897
	292.20	2.5	291.687	1	4	0.513	
	462.90	3.2	462.919	2	15	0.019	
HS 1824–6000 ⁽⁵⁾	294.30	8.84	289.395	1	3	5.005	2.085
	304.40	7.66	301.198	2	8	3.202	
	329.60	13.56	329.587	1	4	0.013	
	384.40	3.30	384.520	2	11	0.120	
KUV 08368+4023	618.00	16.0	618.823	1	11	0.823	0.429
	494.50	5.5	494.464	2	16	0.036	
R808 ⁽³⁾	404.46	1.99	400.923	2	14	3.534	3.499
	511.27	4.49	514.497	1	10	3.231	
	632.18	3.41	629.270	2	24	2.909	
	745.12	3.97	747.750	1	16	2.630	
	796.25	3.97	799.402	2	31	3.149	
	842.71	2.81	844.484	2	33	1.777	
	860.23	3.48	865.257	2	34	5.030	
	875.15	3.73	870.376	1	19	4.770	
	911.53	3.19	913.952	1	20	2.418	
	915.80	5.54	915.230	2	36	0.573	
	952.39	3.36	945.909	1	21	6.483	
	960.53	3.68	967.199	2	38	6.672	
	1011.39	2.54	1013.941	2	40	2.551	
	1040.07	3.34	1038.204	2	41	1.866	
	1066.73	2.21	1066.513	1	24	0.217	
1091.09	2.36	1084.277	2	43	6.813		
1143.96	2.50	1148.820	1	26	4.860		
G255–2	685.00	44	685.022	1	13	0.225	0.120
	830.00	38	830.218	1	16	0.218	
HLTau–76	382.47	16.47	386.470	1	6	4.001	2.189
	449.12	6.7	447.284	2	14	1.836	
	492.12	7.12	494.302	1	8	2.182	
	540.95	28.45	540.790	2	18	0.160	
	596.79	14.40	595.623	1	10	1.167	

Tabla 6.2 – continuación

Estrella	Π_{obs} [s]	amp [mma]	Π_{teo} [s]	ℓ	k	Δ [s]	ϕ [s]
	664.21	14.94	663.649	1	12	0.561	
	781.00	9.1	789.047	2	27	8.047	
	799.10	5.91	799.328	1	15	0.228	
	933.64	2.40	933.879	1	18	0.239	
	976.64	6.46	977.320	2	34	0.680	
	1064.91	11.30	1064.845	1	21	0.065	
	1390.84	3.92	1389.281	1	28	1.559	
G232–38	741.60	1.9	741.121	1	14	0.479	2.155
	984.00	2.2	983.679	1	19	0.321	
	1147.50	1.9	1153.164	1	23	5.664	
G30–20	1068.00	13.8	1068.028	1	20	0.028	0.028

⁽¹⁾ Bognár & Paparó (2010), ⁽²⁾ Yeates et al. (2005), ⁽³⁾ Bischoff-Kim (2009), ⁽⁴⁾ Vauclair et al. (2000), ⁽⁵⁾ Voss et al. (2006), ⁽⁶⁾ Pakštienė et al. (2011), ⁽⁷⁾ Bognár et al (2009), ⁽⁸⁾ Bradley (1995)

6.2.2. Algunos Casos Particulares

Dada la cantidad de estrellas ZZ Ceti analizadas en este trabajo, resulta poco práctico describir en detalle el procedimiento seguido para llegar al modelo sismológico para cada estrella, como se hizo en el capítulo 5 en el caso particular de G117–B15A. En su lugar, a continuación se resumen brevemente algunos detalles relacionados con el proceso de selección del modelo de mejor ajuste para algunos casos de interés. Los parámetros de estructura de los modelos astrosismológicos para el conjunto completo de estrellas ZZ Ceti analizadas en este estudio se muestran en la tabla 6.3.

- **HS 1531+7436.** Esta estrella muestra un único modo con un período muy corto, en comparación con las ZZ Ceti estándar, en 112 s. Desafortunadamente, la presencia de solo un período hace difícil cualquier intento de aplicar astrosismología a esta estrella, y se deben hacer algunas suposiciones arbitrarias. Si suponemos que este modo corresponde a una identificación $(\ell, k) = (1, 1)$, la masa estelar del modelo sismológico debe ser mayor que $0.705 M_{\odot}$. En el primer intento para ajustar este período, se obtuvieron soluciones masivas ($M_{*} \sim 0.77 M_{\odot}$), pero las temperaturas efectivas eran muy bajas ($\sim 10\,800$ K). Estas soluciones estaban caracterizadas por envolturas de hidrógeno gruesas. Dado que se cuenta únicamente con un modo observado, es posible encontrar un modelo con un espesor de la envoltura de hidrógeno apropiada tal que ajuste el período observado para una T_{eff} en acuerdo con el valor espectroscópico. Con este fin, se seleccionó la secuencia con $M_{*} = 0.77 M_{\odot}$ y se calculó una secuencia adicional con $M_{\text{H}} = 1.55 \times 10^{-5} M_{*}$. De esta manera se obtiene un modelo de mejor ajuste con una $T_{\text{eff}} \simeq 12\,350$ K.

Tabla 6.3: Parámetros estructurales de los modelos astrosismológicos para la muestra de estrellas ZZ Ceti analizadas en este trabajo. Recordar que las incertezas son errores internos del procedimiento de ajuste.

Estrella	$\log g$	T_{eff} [K]	M_*/M_{\odot}	M_{H}/M_*	M_{He}/M_*	$\log(L/L_{\odot})$	$\log(R/R_{\odot})$	X_{C}	X_{O}
HS 1531+7436	8,28 ± 0,06	12 496 ± 210	0,770 ± 0,034	$(1,55 \pm 0,23) \times 10^{-5}$	$5,96 \times 10^{-3}$	-2,616 ± 0,011	-1,977 ± 0,011	0,332	0,655
GD 244	7,97 ± 0,04	12 422 ± 105	0,593 ± 0,012	$(1,17 \pm 0,36) \times 10^{-4}$	$2,38 \times 10^{-2}$	-2,433 ± 0,011	-1,881 ± 0,011	0,283	0,704
G226-29	8,28 ± 0,06	12 270 ± 290	0,770 ± 0,034	$(2,02 \pm 0,31) \times 10^{-5}$	$5,95 \times 10^{-2}$	-2,647 ± 0,011	-1,977 ± 0,011	0,332	0,655
HS 0507+0434B	8,10 ± 0,06	12 257 ± 135	0,660 ± 0,023	$(5,68 \pm 1,94) \times 10^{-5}$	$1,21 \times 10^{-2}$	-2,532 ± 0,021	-1,918 ± 0,016	0,258	0,729
LP 133-144	8,03 ± 0,04	12 210 ± 180	0,609 ± 0,012	$(1,10 \pm 0,79) \times 10^{-6}$	$2,45 \times 10^{-2}$	-2,507 ± 0,010	-1,903 ± 0,011	0,264	0,723
EC 11507-1519	8,17 ± 0,07	12 178 ± 230	0,705 ± 0,033	$(3,59 \pm 1,09) \times 10^{-5}$	$7,63 \times 10^{-3}$	-2,592 ± 0,021	-1,943 ± 0,016	0,326	0,661
L19-2	8,17 ± 0,07	12 105 ± 360	0,705 ± 0,033	$(3,59 \pm 1,66) \times 10^{-5}$	$7,63 \times 10^{-3}$	-2,602 ± 0,021	-1,943 ± 0,016	0,326	0,661
GD 66	8,01 ± 0,04	12 068 ± 125	0,593 ± 0,012	$(4,65 \pm 4,37) \times 10^{-7}$	$2,39 \times 10^{-2}$	-2,514 ± 0,010	-1,896 ± 0,011	0,213	0,704
G132-12	7,96 ± 0,05	12 067 ± 180	0,570 ± 0,012	$(1,97 \pm 0,46) \times 10^{-6}$	$3,49 \times 10^{-2}$	-2,486 ± 0,017	-1,882 ± 0,014	0,301	0,606
G207-9	8,40 ± 0,07	12 029 ± 130	0,837 ± 0,034	$(4,32 \pm 3,50) \times 10^{-7}$	$3,19 \times 10^{-3}$	-2,761 ± 0,020	-2,017 ± 0,016	0,346	0,641
G117-B15A	8,00 ± 0,09	11 985 ± 200	0,593 ± 0,007	$(1,25 \pm 0,70) \times 10^{-6}$	$2,39 \times 10^{-2}$	-2,497 ± 0,030	-1,882 ± 0,029	0,283	0,704
MCT 2148-2911	8,05 ± 0,04	11 851 ± 150	0,632 ± 0,014	$(7,58 \pm 1,79) \times 10^{-5}$	$1,75 \times 10^{-2}$	-2,561 ± 0,011	-1,904 ± 0,011	0,232	0,755
G38-29	8,28 ± 0,06	11 818 ± 50	0,770 ± 0,034	$(1,23 \pm 0,76) \times 10^{-5}$	$5,96 \times 10^{-3}$	-2,716 ± 0,011	-1,979 ± 0,010	0,333	0,655
PG 1541+650	8,04 ± 0,04	11 761 ± 60	0,609 ± 0,012	$(1,56 \pm 1,42) \times 10^{-9}$	$2,46 \times 10^{-2}$	-2,583 ± 0,010	-1,908 ± 0,011	0,264	0,723
G191-16	8,06 ± 0,04	11 741 ± 90	0,632 ± 0,014	$(1,39 \pm 0,32) \times 10^{-5}$	$1,76 \times 10^{-2}$	-2,590 ± 0,010	-1,910 ± 0,011	0,232	0,755
G185-32	8,12 ± 0,10	11 721 ± 370	0,660 ± 0,023	$(4,46 \pm 3,20) \times 10^{-7}$	$1,22 \times 10^{-2}$	-2,632 ± 0,051	-1,930 ± 0,034	0,258	0,729
EC14012-1446	8,05 ± 0,04	11 709 ± 95	0,632 ± 0,014	$(7,58 \pm 2,40) \times 10^{-5}$	$1,75 \times 10^{-2}$	-2,583 ± 0,011	-1,904 ± 0,011	0,232	0,755
EC23487-2424	8,28 ± 0,06	11 700 ± 75	0,770 ± 0,034	$(2,02 \pm 0,32) \times 10^{-5}$	$5,95 \times 10^{-3}$	-2,731 ± 0,010	-1,978 ± 0,010	0,332	0,655
GD 165	8,05 ± 0,07	11 635 ± 330	0,632 ± 0,014	$(7,58 \pm 3,28) \times 10^{-5}$	$1,75 \times 10^{-2}$	-2,594 ± 0,043	-1,904 ± 0,029	0,232	0,755
R548	8,03 ± 0,05	11 627 ± 390	0,609 ± 0,012	$(1,10 \pm 0,38) \times 10^{-6}$	$2,45 \times 10^{-2}$	-2,594 ± 0,025	-1,904 ± 0,015	0,264	0,723
HE 1258+0123	8,07 ± 0,03	11 582 ± 100	0,632 ± 0,014	$(4,46 \pm 3,07) \times 10^{-6}$	$1,76 \times 10^{-2}$	-2,620 ± 0,014	-1,913 ± 0,007	0,232	0,755
GD 154	8,20 ± 0,04	11 574 ± 30	0,705 ± 0,033	$(4,58 \pm 1,80) \times 10^{-10}$	$7,66 \times 10^{-3}$	-2,705 ± 0,003	-1,955 ± 0,003	0,326	0,661
GD 385	8,07 ± 0,03	11 570 ± 90	0,632 ± 0,014	$(4,59 \pm 2,86) \times 10^{-7}$	$1,76 \times 10^{-2}$	-2,628 ± 0,005	-1,962 ± 0,005	0,232	0,755
HE 1429-037	8,13 ± 0,05	11 535 ± 85	0,660 ± 0,023	$(4,68 \pm 0,86) \times 10^{-10}$	$1,22 \times 10^{-3}$	-2,667 ± 0,018	-1,934 ± 0,013	0,258	0,729
HS 1249+0426	8,02 ± 0,02	11 521 ± 35	0,609 ± 0,012	$(3,53 \pm 1,08) \times 10^{-5}$	$2,45 \times 10^{-2}$	-2,595 ± 0,002	-1,896 ± 0,002	0,264	0,723
G238-53	8,03 ± 0,02	11 497 ± 120	0,609 ± 0,012	$(1,54 \pm 0,28) \times 10^{-6}$	$2,46 \times 10^{-2}$	-2,613 ± 0,002	-1,904 ± 0,002	0,264	0,723
HS 1625+1231	8,02 ± 0,04	11 485 ± 230	0,609 ± 0,012	$(3,52 \pm 1,67) \times 10^{-5}$	$2,45 \times 10^{-2}$	-2,600 ± 0,016	-1,896 ± 0,012	0,264	0,723
G29-38	8,01 ± 0,03	11 471 ± 60	0,593 ± 0,012	$(4,67 \pm 2,83) \times 10^{-10}$	$2,39 \times 10^{-2}$	-2,612 ± 0,006	-1,901 ± 0,006	0,283	0,704
PG2303+242	7,88 ± 0,07	11 210 ± 100	0,525 ± 0,12	$(4,54 \pm 2,95) \times 10^{-8}$	$4,94 \times 10^{-2}$	-2,579 ± 0,03	-1,865 ± 0,032	0,279	0,709
MCT 0145-2211	7,95 ± 0,03	11 439 ± 120	0,570 ± 0,012	$(1,43 \pm 0,38) \times 10^{-5}$	$3,50 \times 10^{-2}$	-2,573 ± 0,014	-1,879 ± 0,012	0,301	0,686
BPM 30551	8,19 ± 0,05	11 435 ± 40	0,705 ± 0,033	$(4,36 \pm 0,26) \times 10^{-6}$	$7,66 \times 10^{-3}$	-2,714 ± 0,006	-1,949 ± 0,006	0,326	0,661
GD 99	8,01 ± 0,13	11 395 ± 25	0,660 ± 0,023	$(1,36 \pm 0,52) \times 10^{-5}$	$1,22 \times 10^{-2}$	-2,671 ± 0,005	-1,950 ± 0,068	0,258	0,729
BPM 24754	8,03 ± 0,03	11 390 ± 50	0,609 ± 0,012	$(4,51 \pm 2,72) \times 10^{-6}$	$2,46 \times 10^{-2}$	-2,626 ± 0,011	-1,902 ± 0,001	0,264	0,723
KUV 02464+3239	7,93 ± 0,03	11 360 ± 40	0,548 ± 0,014	$(4,71 \pm 2,45) \times 10^{-8}$	$4,21 \times 10^{-2}$	-2,579 ± 0,006	-1,876 ± 0,006	0,290	0,697
PG 1149+058	7,94 ± 0,02	11 336 ± 20	0,570 ± 0,012	$(5,29 \pm 2,45) \times 10^{-5}$	$3,69 \times 10^{-2}$	-2,579 ± 0,001	-1,875 ± 0,002	0,301	0,686
BPM 31594	7,86 ± 0,03	11 250 ± 70	0,525 ± 0,012	$(5,36 \pm 1,87) \times 10^{-5}$	$4,93 \times 10^{-2}$	-2,545 ± 0,009	-1,851 ± 0,009	0,279	0,709
KUV 11370+4222	8,06 ± 0,03	11 237 ± 80	0,632 ± 0,014	$(1,40 \pm 0,64) \times 10^{-5}$	$1,76 \times 10^{-2}$	-2,668 ± 0,007	-1,911 ± 0,008	0,232	0,755
HS 1824-6000	7,95 ± 0,08	11 234 ± 400	0,570 ± 0,012	$(1,43 \pm 0,62) \times 10^{-5}$	$3,50 \times 10^{-2}$	-2,605 ± 0,050	-1,879 ± 0,030	0,301	0,686
KUV 08368+4026	8,02 ± 0,03	11 230 ± 95	0,609 ± 0,012	$(1,42 \pm 0,52) \times 10^{-5}$	$2,45 \times 10^{-2}$	-2,646 ± 0,010	-1,899 ± 0,007	0,264	0,723
R808	8,18 ± 0,05	11 213 ± 130	0,705 ± 0,033	$(3,59 \pm 1,70) \times 10^{-5}$	$7,63 \times 10^{-3}$	-2,738 ± 0,008	-1,944 ± 0,008	0,326	0,661
G255-2	8,11 ± 0,04	11 185 ± 30	0,660 ± 0,023	$(4,45 \pm 2,12) \times 10^{-6}$	$1,22 \times 10^{-2}$	-2,709 ± 0,002	-1,928 ± 0,003	0,258	0,729
HLTau-76	7,89 ± 0,03	11 111 ± 50	0,548 ± 0,012	$(1,83 \pm 1,03) \times 10^{-4}$	$4,19 \times 10^{-2}$	-2,579 ± 0,005	-1,857 ± 0,005	0,323	0,697
G232-38	7,99 ± 0,04	10 952 ± 120	0,593 ± 0,012	$(5,19 \pm 1,87) \times 10^{-5}$	$2,38 \times 10^{-2}$	-2,666 ± 0,015	-1,888 ± 0,010	0,283	0,704
G30-20	7,91 ± 0,02	10 950 ± 15	0,548 ± 0,012	$(5,34 \pm 2,18) \times 10^{-5}$	$4,20 \times 10^{-2}$	-2,618 ± 0,002	-1,863 ± 0,002	0,290	0,697

- **G226–29.** G226–29 también muestra solo un modo con un período corto. Afortunadamente, existe una restricción fuerte sobre la identificación de ℓ de este modo. De hecho, Kepler et al. (2005b) encontraron que el modo es de hecho un triplete ($\ell = 1$) con una componente central con un período de 109.278 s. La solución astrosismológica en este caso corresponde a un modelo más bien masivo con una envoltura de hidrógeno gruesa ($M_* \sim 0.77 M_\odot$, $M_H = 2.02 \times 10^{-5} M_*$), en acuerdo con las observaciones espectroscópicas.
- **G185–32.** El espectro de períodos de esta estrella DA variable incluye un período en 215.74 s, bastante similar al modo principal de G117–B15A, pero al contrario de esta estrella, la diferencia en las amplitudes observadas para este modo y los demás no es tan notable en el caso de G185-32. La identificación del grado armónico ℓ para los períodos observados en G185-32 no está bien determinada. En particular, el modo en ~ 215 s se asocia tanto con $\ell = 1$ como con $\ell = 2$ (Castanheira et al. 2004; Yeates et al. 2005). Para esta estrella, al igual que en el caso de G117–B15A, los modelos estelares ajustan el período a 215.74 s con un modo caracterizado por $\ell = 1$ y $k = 2$. Sin embargo, el modelo sismológico para esta estrella tiene una masa mayor que para G117–B15A. Para G185-32 adoptamos un modelo astrosismológico que mejor ajusta el período en ~ 215 s y que al mismo tiempo ajuste el conjunto de períodos observados con un número mayor de modos $\ell = 1$ que $\ell = 2$.
- **GD 154.** Esta estrella muestra tres modos de pulsación. El modo con período 402.56 s es un modo inestable y de baja amplitud, en comparación con los dos modos restantes (Pfeiffer et al. 1996). Dado que las amplitudes de los dos modos con períodos largos (1088.6 y 1186.5 s) son similares, y que el período en 1186.5 s es probablemente un modo dipolar (Pfeiffer et al. 1996), se da más peso a los modelos que identifican estos períodos con modos $\ell = 1$. En general, las soluciones tienen masas estelares entre 0.632 y 0.705 M_\odot con envolturas de hidrógeno delgadas ($10^{-8} - 10^{-10} M_*$). Entre ellas, se elige la solución con $M_* = 0.705 M_\odot$ y $M_H = 4.58 \times 10^{-10} M_*$ ya que se ajusta a los parámetros espectroscópicos. Otras soluciones similares se encuentran a $T_{\text{eff}} \sim 11\,200\text{K}$, pero en estos casos se identifica al períodos en 402.6 s con $\ell = 2$.
- **G238–53, G132–12 y LP 133–14.** Estas estrellas también tienen un período cercano a 215 s. En todos los casos este modo se identifica con un modo teórico con $\ell = 1$ y $k=2$. Esta identificación de ℓ y k es una propiedad intrínseca de los modelos astrosismológicos empleados en este estudio. Esto se puede ver a partir de la figura 5.2, donde se muestra que los períodos con $\ell = 1$ y $k = 1$ son siempre muy cortos para ajustar el período en ~ 215 s.
- **R 548.** Esta estrella tiene una temperatura efectiva y una masa estelar espectroscópica un poco más altas que G117–B15A. Frecuentemente, estas estrellas se analizan juntas debido a estas similitudes y a que tienen varios períodos en común. En el primer intento de ajustar los períodos de R 548 se obtuvieron varias soluciones con masas estelares altas, que fueron descartadas por identificar al modo con 212 s como $\ell = 2$, de acuerdo con esos modelos. También se

obtuvieron algunas soluciones con masas intermedias. En general, los modos con períodos en 318.07 s y 333.64 s son los modos más pobremente ajustados, y se identifican con un grado armónico $\ell = 2$. Con el fin de encontrar un modelo astrosismológico para esta estrella debimos emplear varias restricciones. Además de pedir que el modo con período 212.95 s sea identificado con un modo $\ell = 1$ y $k=2$, se fijó el grado armónico en $\ell = 1$ para el modo con período 274.272 (Yeates et al. 2005). Como resultado, encontramos un modelo astrosismológico con $M_* = 0.609 M_\odot$, mayor que la masa estelar que se obtuvo para G117-B15A ($M_* = 0.593 M_\odot$), y a una T_{eff} menor, contrario a la tendencia indicada por espectroscopía y por estudios anteriores (Bradley 1998; Castanheira & Kepler 2009). Sin embargo, los parámetros superficiales que caracterizan al modelo de mejor ajuste, se encuentran en acuerdo con las incertidumbres dadas por espectroscopía.

- **MCT 2148–2911, PG 1541+650, HE 1429–037 y HS 1824–600.** Estas estrellas son enanas blancas de baja masa, con masas espectroscópicas de 0.515, 0.502, 0.514 y 0.427 M_\odot respectivamente. Estos valores fueron obtenidos por extrapolación a partir de nuestra grilla de modelos evolutivos. Sin embargo, los modelos astrosismológicos para estas estrellas no tienen la masa mínima del grillado (0.525 M_\odot), sino que tienen masas intermedias de 0.632, 0.609, 0.660 y 0.570 M_\odot , respectivamente. Los valores de temperatura efectiva de estos modelos se corresponden con las determinaciones espectroscópicas.
- **GD 244.** Para esta estrella no se pudo encontrar un modelo sismológico plausible que tuviera una temperatura efectiva cercana al valor espectroscópico ($T_{\text{eff}} = 11\,680\text{ K}$). Para adoptar un modelo sismológico, se concideró que los modos de mayor amplitud son $\ell = 1$, y se encontró una solución aceptable con $T_{\text{eff}} = 12\,422\text{ K}$, muy superior a la espectroscópica. Por otro lado, los valores sismológicos de masa estelar y la gravedad superficial están en acuerdo, dentro de las incertidumbres, con los valores espectroscópicos.
- **G207–9.** Para esta estrella DA variable se obtiene una solución astrosismológica con $M_* = 0.837 M_\odot$. Sin embargo, también se obtiene una segunda solución, de menor calidad ($\Phi = 1.496\text{ s}$), para una masa menor ($M_* = 0.609 M_\odot$) caracterizada por una envoltura de hidrógeno gruesa ($M_{\text{H}} = 1.41 \times 10^{-5} M_*$). Una degeneración en las soluciones también fue obtenida por Castanheira & Kepler (2009).
- **G29–38.** El caso de G29-38 es bastante patológico. A pesar de que esta estrella tiene una $T_{\text{eff}} \sim 11\,800\text{ K}$, exhibe un espectro de períodos muy rico y complejo, incluyendo 14 modos genuínos, característico de estrellas DA variables más frías. Thompson et al. (2008), basado en espectroscopía de VLT, mostró que la mayoría de los períodos que muestra esta estrella son modos con $\ell = 1$, pero también hay modos con $\ell = 2$ y posiblemente un modo con $\ell = 3$ o 4. Sin embargo, la solución sismológica para esta estrella implica que la mayoría de los modos observados deben ser $\ell = 2$. En el modelo astrosismológico elegido,

el único modo con $\ell = 1$ está asociado con el período de 614.4 s, que es el modo de mayor amplitud.

- **PG 2303–243.** Los modos observados y las amplitudes para esta estrella fueron tomados de Pakštienė et al. (2011). Estos autores muestran que esta estrella ZZ Ceti tiene un espectro de pulsación muy rico con 24 probables modos independientes. Sin embargo, la mayoría de estos modos tienen amplitudes muy bajas, por debajo de ~ 4 mma. En nuestro análisis, se consideraron como modos reales aquellos con amplitudes mayores que ~ 4 mma, dejando solamente cuatro períodos. En particular se fijó en grado armónico en $\ell = 1$ para los dos modos principales, 616.4 y 965.3 s, mientras que se permitió a los modos restantes ser modos con $\ell = 1$ o $\ell = 2$.

6.3. Las Masas Astrosismológicas

En este trabajo, los tracks evolutivos de enanas blancas DA que se utilizaron para deducir la masa astrosismológica son también los que se usaron para derivar las masas espectroscópicas de las estrellas DA variables. Por consiguiente, vale la pena realizar una comparación entre ambos conjuntos de valores. En la figura 6.3 se comparan las masas espectroscópica y astrosismológica. La línea a trazos indica la correspondencia 1:1. A partir de esta figura se observa que el acuerdo entre ambos conjuntos de datos no es muy bueno, donde las discrepancias pueden alcanzar una diferencia de hasta $\sim 0.2 M_{\odot}$. Sin embargo, gran parte de los puntos en la figura 6.3 se acumulan alrededor de la línea a trazos, demostrando que no existe un corrimiento apreciable entre las estimaciones espectroscópica y astrosismológica de la masa estelar.

Las distribuciones para las masas estelares de acuerdo con los resultados astrosismológicos y espectroscópicos se presentan en forma de histogramas en los paneles superior e inferior de la figura 6.4, respectivamente. El valor medio de la masa astrosismológica de la muestra analizada es $\langle M_{*} \rangle_{\text{sis}} = 0.636 \pm 0.016 M_{\odot}$, levemente más alta ($\sim 0.95\%$) que el valor medio de la masa espectroscópica, $\langle M_{*} \rangle_{\text{esp}} = 0.630 \pm 0.028 M_{\odot}$ ¹. Dado que los métodos empleados para inferir ambos valores son muy diferentes, consideramos que hay un buen acuerdo entre los valores medios de las masas estelares.

Castanheira & Kepler (2008, 2009) han realizado el primer estudio astrosismológico de un ensamble de estrellas ZZ Ceti. Estos autores analizaron un total de 87 estrellas ZZ Ceti, incluyendo las variables brillantes así como también una fracción de las variables del SDSS. El valor promedio de la masa de las enanas blancas DA variables derivado en estos trabajos es de $\langle M_{*} \rangle_{\text{sis}} = 0.668 M_{\odot}$, alrededor de un 5% más alto que nuestro valor, $\langle M_{*} \rangle_{\text{sis}} = 0.636 M_{\odot}$. Se debe tener en cuenta que Castanheira & Kepler (2008, 2009) incluyeron varias estrellas masivas ($M_{*} \geq 1M_{\odot}$), que no han sido consideradas en nuestro estudio. Dado que las herramientas numéricas utilizadas para modelar la estructura, evolución y pulsaciones de las estrellas ZZ Ceti

¹Aquí no se está sugiriendo que las enanas blancas DA variables son más masivas que las no variables, dado que existen fuertes criterios de selección en la búsqueda de enanas blancas DA pulsantes.

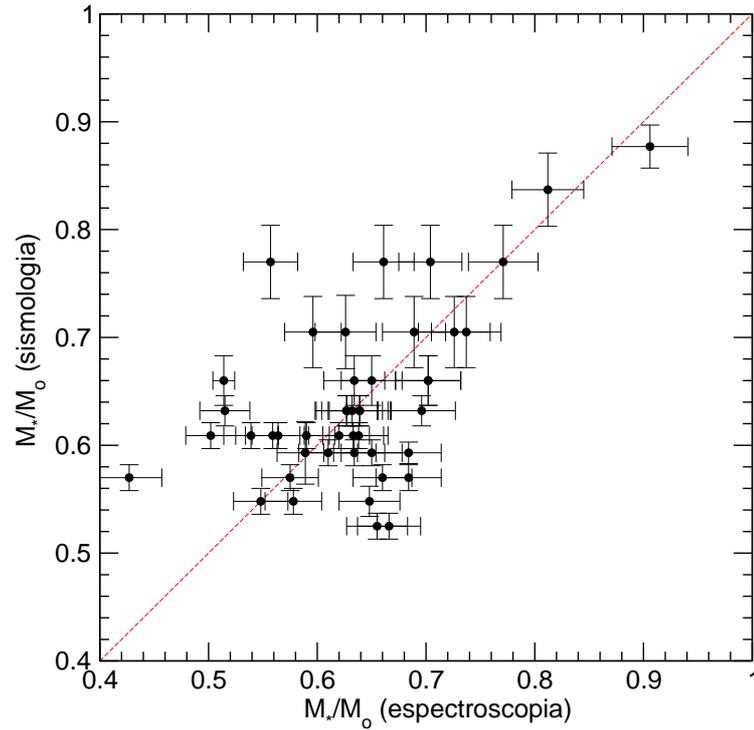


Figura 6.3: Comparación entre los valores de la masa estelar de las 44 estrellas ZZ Ceti analizadas en este trabajo, de acuerdo con las inferencias espectroscópicas (eje x) y del análisis astrosismológico (eje y). La línea diagonal a trazos indica la correspondencia 1:1 entre ambas estimaciones.

utilizadas por los dos grupos son independientes, y dado que las muestras de estrellas analizadas son diferentes, consideramos que el valor medio $\langle M_* \rangle_{\text{sis}}$ derivado en este trabajo se encuentra en buen acuerdo con aquel derivado por Castanheira & Kepler (2008, 2009).

6.4. La Temperatura Efectiva

Siguiendo la misma línea que en la sección anterior, realizamos una comparación entre los valores espectroscópicos y sismológicos de la temperatura efectiva para la muestra de 44 estrellas ZZ Ceti analizada en este trabajo. Los resultados se muestran en la figura 6.5. La línea a trazos indica la correspondencia 1:1. En este caso, así como en la masa estelar, no se observa un muy buen acuerdo entre los dos conjuntos de datos, con discrepancias que pueden alcanzar valores de hasta ~ 750 K. Por otro lado, no se observa un corrimiento del cero apreciable y los puntos parecen acumularse alrededor de la línea a trazos.

En la figura 6.6 se muestran las distribuciones en temperatura efectiva, en forma de histogramas, para los valores espectroscópicos (panel inferior) y sismológicos (panel superior). A partir de esta figura, se observa que el máximo en la distribución de T_{eff} sismológica se encuentra entre 11 400 y 11 600 K. Para temperaturas efectivas

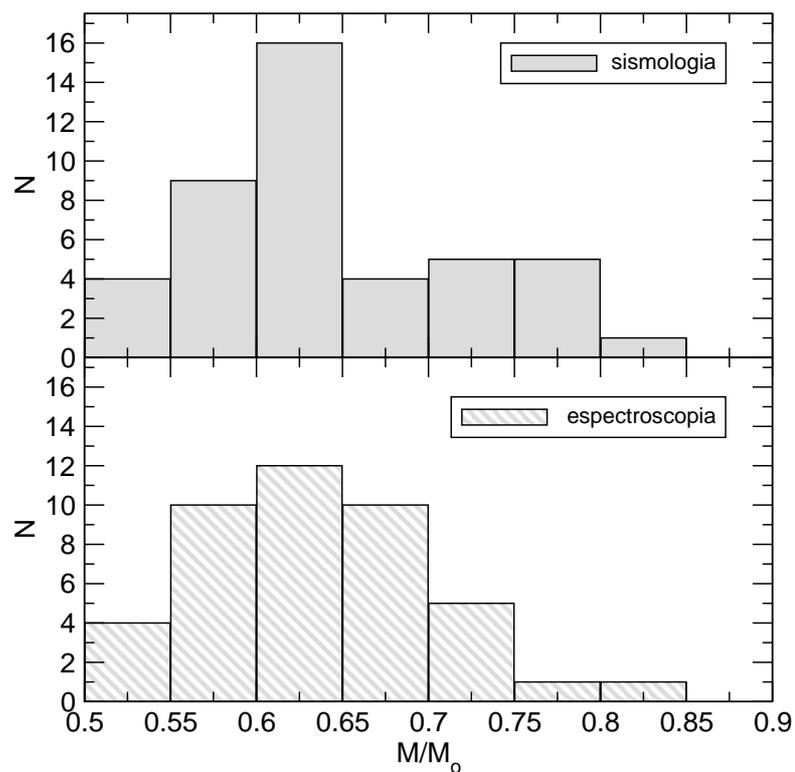


Figura 6.4: Histogramas que representan las distribuciones de masa para la muestra de 44 estrella ZZ Ceti consideradas en este trabajo, de acuerdo con inferencias espectroscópicas (panel inferior) y con nuestro análisis astrosismológico (panel superior).

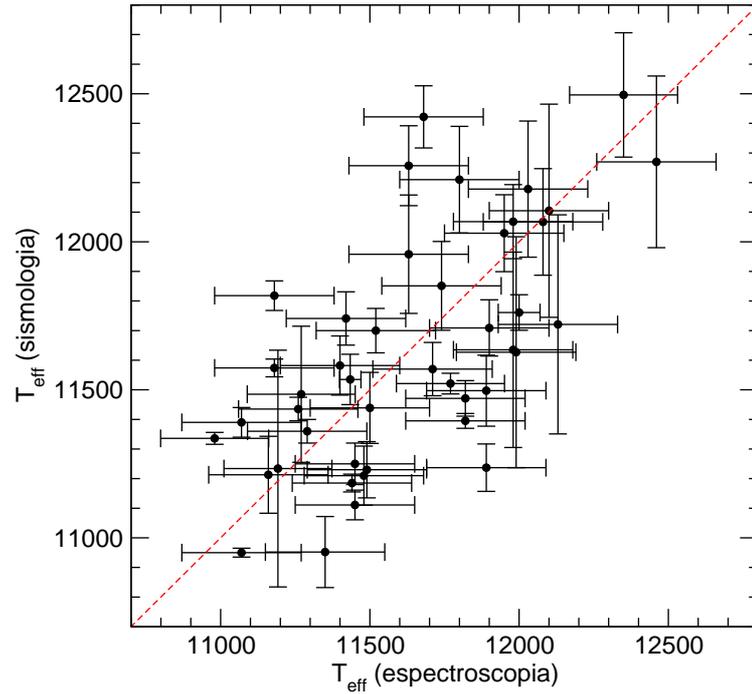


Figura 6.5: Comparación entre los valores de temperatura efectiva de la muestra de 44 estrellas ZZ Ceti analizadas, de acuerdo con los valores espectroscópicos (eje x) y los valores sismológicos (eje y). La línea diagonal indica la correspondencia 1:1.

más altas se observa un decrecimiento suave, mientras que hacia T_{eff} más bajas el cambio es más abrupto, con una contribución pequeña para temperaturas efectivas menores que 11 200 K. Esto último está relacionado con el borde rojo de la banda de inestabilidad, donde las estrellas ZZ Ceti dejan de pulsar. En el caso espectroscópico, se observan dos máximos entre 11 400 y 11 600 K y entre 11 800 y 12 000 K, separados por un valle bien definido. En este caso, se observa un decrecimiento abrupto en el número de estrellas ZZ Ceti en ambos extremos del intervalo considerado. Por último, el valor promedio de T_{eff} astrosismológica de la muestra analizada es $\langle T_{\text{eff}} \rangle_{\text{sis}} = 11632 \pm 134\text{K}$, en excelente acuerdo con el valor espectroscópico de $\langle T_{\text{eff}} \rangle_{\text{espec}} = 11635 \pm 190\text{K}$.

6.5. El Espesor de la Envoltura de Hidrógeno

Uno de los parámetros estructurales más importantes que se desea restringir a través de la astrosismología de estrellas ZZ Ceti es el espesor de la envoltura de hidrógeno en enanas blancas DA. En la sección 5.2 se derivó un valor para la masa de la envoltura de hidrógeno para G117-B15A de $M_{\text{H}} = (1.25 \pm 0.7) \times 10^{-6} M_{*}$, alrededor de dos órdenes de magnitud más delgada que el valor predicho por los cálculos evolutivos canónicos, $M_{\text{H}} = 10^{-4} M_{*}$. Aquí, el análisis de un gran número de estrellas ZZ Ceti permite explorar la distribución de espesores de la envoltura de hidrógeno a partir de la astrosismología. En la figura 6.7 se presentan los his-

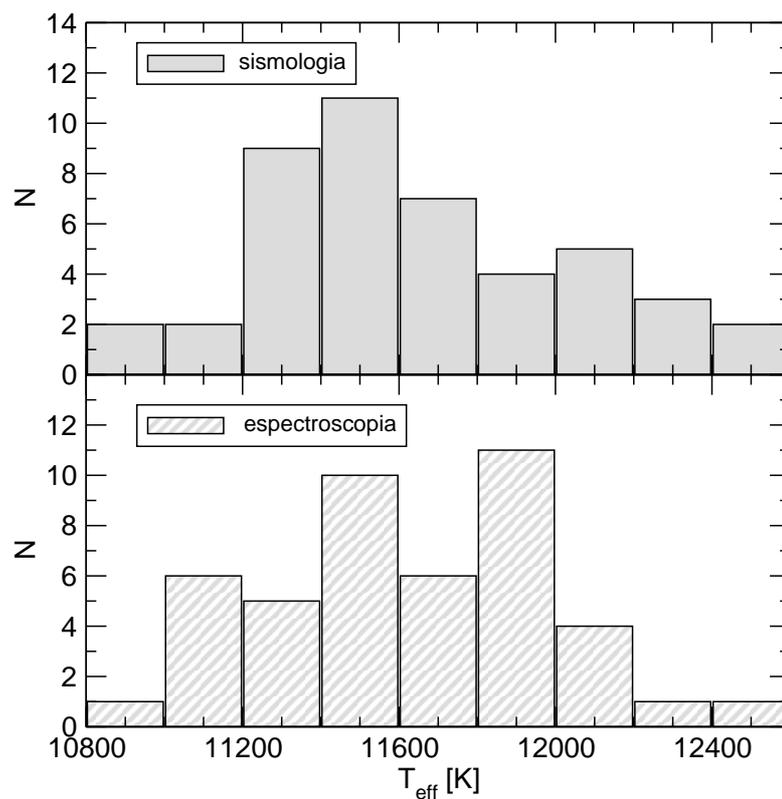


Figura 6.6: Histogramas representativos de las distribuciones en temperatura efectiva para las 44 estrellas analizadas en este trabajo, de acuerdo con las determinaciones espectroscópica (panel inferior) y sismológica (panel superior).

togramas de la distribución de espesores de la envoltura de hidrógeno. En el panel superior se muestran los resultados para la muestra completa de 44 estrellas ZZ Ceti. Notar que existe un máximo pronunciado en la distribución para $\log(M_{\text{H}}/M_{*})$ en el rango de -5 a -4 , aunque también se observa otro máximo, mucho menos notorio, para $\log(M_{\text{H}}/M_{*})$ entre -10 y -9 . De esta manera, resulta aparente, a partir de la figura 6.7, la existencia de un rango del espesor de la envoltura de hidrógeno en las estrellas DA variables, con un pico importante para envolturas gruesas y otro pico mucho más bajo para envolturas muy delgadas, y un valle aparente para espesores intermedios. En el panel central de la figura 6.7 se muestra un histograma de la distribución de envolturas correspondiente a los modelos astrosismológicos caracterizados por espesores canónicos (gruesos) de la envoltura de hidrógeno, que suman un total de 11 estrellas. Finalmente, en el panel inferior se presenta el histograma para los espesores no canónicos, es decir, aquellos modelos con envolturas más delgadas que las predichas por los cálculos evolutivos estándar, dependiendo del valor de la masa estelar. A este tipo de envolturas las denominamos “delgadas”. Recordar que los modelos con envolturas “delgadas” han sido generadas en el marco del presente trabajo con el objetivo de extender el espacio de parámetros explorado para realizar el estudio astrosismológico. Notar que para la mayoría de las estrellas analizadas, 34 de un total de 44 objetos, los modelos astrosismológicos obtenidos tienen envolturas de hidrógeno “delgadas”, como se ilustra en la figura 6.8. Es importante notar, sin embargo, que la mayoría de los valores de M_{H} derivados en este trabajo, aún cuando son más delgadas que los valores canónicos, se acumulan cerca del valor de la masa de la envoltura predicho por la evolución estelar estándar. Por el contrario, Castanheira & Kepler (2009) encontraron una distribución de envolturas casi homogénea en sus ajustes (ver su Fig. 8). En la figura 6.9 se grafica la masa de la envoltura de hidrógeno en términos de la temperatura efectiva del modelo astrosismológico para las 44 estrellas ZZ Ceti analizadas. En particular, no se observa una dependencia de M_{H} con la temperatura efectiva, lo cual indica la ausencia de procesos de pérdida de masa o acreción durante la evolución en la banda de inestabilidad (Castanheira & Kepler 2009).

El valor medio de la masa de la capa de hidrógeno es $\langle M_{\text{H}}/M_{*} \rangle = 2.71 \times 10^{-5}$ de acuerdo con nuestros resultados, 50 veces más alto que el valor presentado por Castanheira & Kepler (2009), basado en una muestra de estrellas diferente. En muchos aspectos, nuestros resultados están en acuerdo con las predicciones de estos autores. La diferencia con nuestro valor medio para la masa de la capa de hidrógeno, puede deberse al hecho que ambos estudios están basados en conjuntos de modelos de estrellas enanas blancas DA completamente independientes, códigos de pulsación diferentes y muestras de estrellas distintas.

Finalmente, Tremblay & Bergeron (2008) han estudiado el cociente entre las estrellas enanas blancas ricas en helio y ricas en hidrógeno en términos de la temperatura efectiva a partir de un análisis basado en modelos de atmósferas de datos fotométricos en el infrarrojo del *Two Micron All Sky Survey* combinado con magnitudes visuales disponibles. Estos autores encontraron que el cociente aumenta gradualmente de ≈ 0.25 para $15\,000 \gtrsim T_{\text{eff}} \gtrsim 10\,000$ K hasta alrededor de 0.5 para $10\,000 \gtrsim T_{\text{eff}} \gtrsim 8\,000$ K, debido a la mezcla convectiva cuando la base de la zona

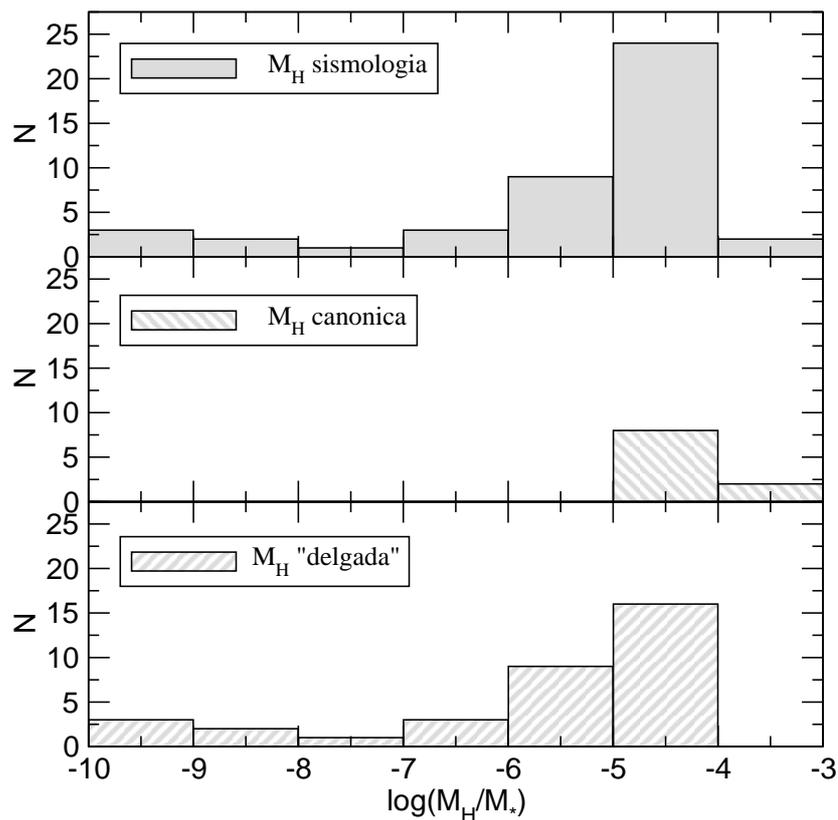


Figura 6.7: Panel superior: Histograma de la distribución en el espesor de la envoltura de hidrógeno para la muestra de 44 estrellas ZZ Ceti consideradas en este trabajo. Panel central: Histograma para la distribución de envolturas de hidrógeno para los modelos con envolturas canónicas (gruesas), como predicen los cálculos evolutivos estándar, dependiendo de la masa estelar. Panel inferior: Histograma para la distribución de envolturas de hidrógeno para los modelos con espesores no canónicos (delgados), obtenidos mediante el procedimiento artificial descrito en la sección 4.1.

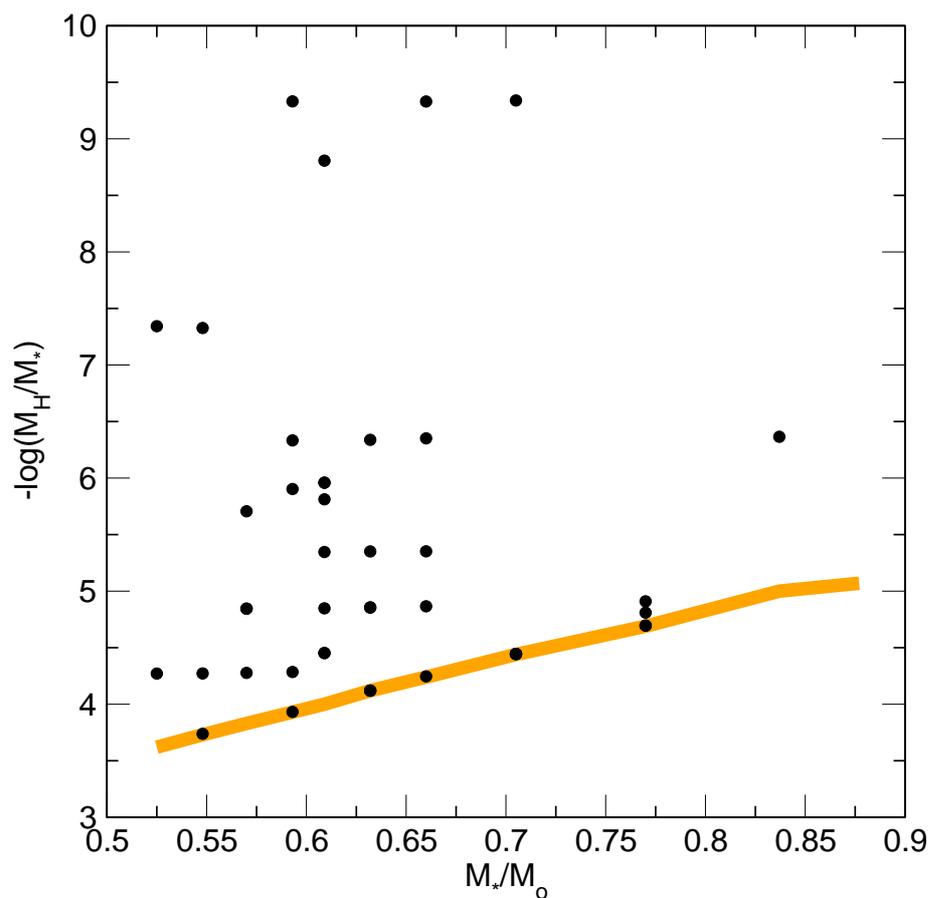


Figura 6.8: Valores de la masa de la envoltura de hidrógeno en términos de la masa estelar astrosismológica, correspondiente a los modelos astrosismológicos de la muestra completa de 44 estrellas ZZ Ceti analizadas en este trabajo. La curva gruesa (naranja) indica los valores canónicos del espesor de la envoltura de hidrógeno.

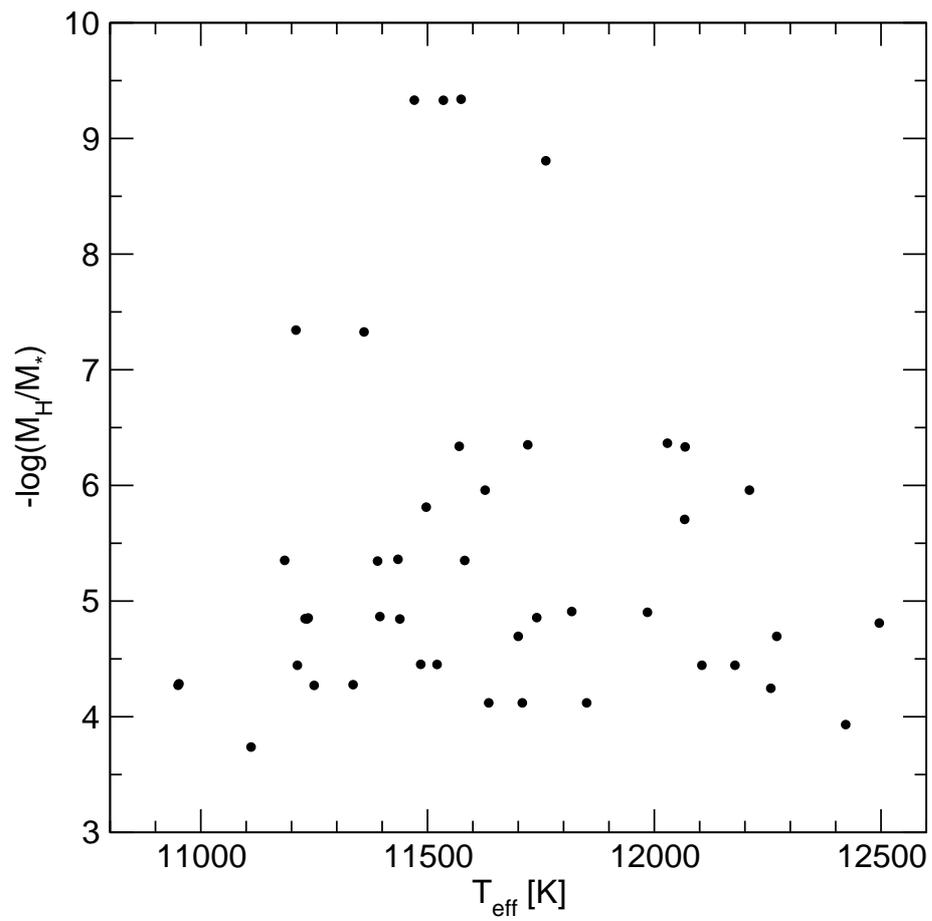


Figura 6.9: Espesor de la envoltura de hidrógeno en función de la temperatura efectiva astrosismológica, para los modelos de mejor ajuste de la muestra completa de estrellas ZZ Ceti analizadas.

convectiva de hidrógeno alcanza la zona convectiva más interna rica en helio. Concluyen entonces que alrededor de un 15% de las enanas blancas DA deberían tener envolturas de hidrógeno con $\log(M_{\text{H}}/M_*)$ entre -10 y -8 . En el presente trabajo descubrimos que existe una fracción importante de estrellas DA variables con envolturas más delgadas que los valores canónicos. En particular, 5 estrellas ZZ Ceti analizadas tienen $10^{-10} \lesssim M_{\text{H}}/M_* \lesssim 10^{-8}$, lo que representa un 11% de las estrellas de la muestra estudiada. Esta fracción de estrellas con envolturas de hidrógeno muy delgadas es compatible con el resultado de Tremblay & Bergeron (2008).

Todos estos resultados refuerzan la idea de que podría existir una fracción no despreciable de enanas blancas DA con envolturas delgadas de hidrógeno. Un escenario de formación posible, es aquel propuesto por Althaus et al. (2005b) para la formación de una enana blanca DA con una M_{H} más pequeña ($M_{\text{H}} \sim 10^{-5}M_*$) que la predicha por la teoría estándar.

CAPÍTULO 7

Astrosismología de estrellas ZZ Ceti: WD J1916+3938

La estrella WD J1916+3938 es una estrella enana blanca DA variable que se encuentra cerca del borde rojo de la banda de inestabilidad pulsacional de las estrellas ZZ Ceti. Esta estrella fue identificada como pulsante a partir de series temporales de fotometría utilizando observaciones de telescopios terrestres (Hermes et al. 2011). En principio, WD J1916+3938 no tendría nada en especial, sin embargo se encuentra en una posición privilegiada en el cielo, convirtiéndola en la primera estrella enana blanca DA variable en el campo de la misión *Kepler* (Christensen-Dalsgaard et al. 2009). Aunque la misión *Kepler* está dedicada principalmente a la búsqueda de planetas de dimensiones y características terrestres alrededor de estrellas similares al Sol, también ha hecho importantes aportes en varios campos dentro de la Astrosismología. En particular, ha dado lugar a la detección de una enana blanca variable de tipo DB, KIC 8626021 (Østensen et al. 2011). Un estudio astrosismológico detallado de esta estrella, basado en modelos evolutivos de estrellas enanas blancas DB, fue realizado por Córscico et al. (2011b). Se espera que un monitoreo continuo de WD J1916+3938 de lugar a la mejor curva de luz detectada en una estrella enana blanca pulsante (Hermes et al. 2011), incluso mejor que aquellas curvas de luz de las estrellas más brillantes observadas en campañas del WET (Nather et al. 1990). En vistas a las futuras observaciones de WD J1916+3938 por el satélite *Kepler*, consideramos conveniente realizar un primer estudio astrosismológico de esta estrella ZZ Ceti, basado en los modelos evolutivos completos de estrellas enanas blancas DA calculados en esta Tesis (Córscico et al. 2011c).

Observaciones espectroscópicas indican que WD J1916+3938 es una estrella ZZ Ceti fría, con una temperatura efectiva de $T_{\text{eff}} = 11\,129 \pm 115$ K, y una gravedad superficial de $\log g = 8.34 \pm 0.06$ (Hermes et al. 2011). Esta estrella muestra variaciones en la luminosidad de baja amplitud, con períodos largos entre ~ 800 y ~ 1450 s. Una lista de los períodos observados y de las respectivas amplitudes se muestran en la tabla 7.1.

A partir de la interpolación de los tracks evolutivos calculado en esta Tesis, determinamos la masa espectroscópica para WD J1916+3938, de la misma manera que para la muestra de 44 estrellas ZZ Ceti brillantes analizadas en el capítulo anterior.

Tabla 7.1: Frecuencias, períodos y amplitudes de WD J1916+3938, de acuerdo a las observaciones de Hermes et al. (2011).

ν [μHz]	Π_i^{obs} [s]	A_i [%]
1213.7	823.9	0.38
1198.9	834.1	0.32
1070.1	934.5	0.36
1032.1	968.9	0.44
918.3	1089.0	0.25
854.8	1169.9	0.23
696.0	1436.7	0.24

Como resultado obtuvimos un valor para la masa estelar de $M_* = (0.805 \pm 0.040)M_\odot$. Este valor es un poco más bajo que el valor obtenido por Hermes et al. (2011) usando los tracks de Wood (1990), $M_* = (0.82 \pm 0.04)M_\odot$.

7.1. Resultados Astrosismológicos

A partir del espectro de períodos observado en la estrella ZZ Ceti WD J1916+3938, realizamos un ajuste astrosismológico, utilizando la grilla de modelos evolutivos de enanas blancas DA. Suponemos que todos los modos observados, corresponden a modos reales y por consiguiente pueden aportar información sobre la estructura interna de la estrella.

En un primer ajuste fijamos el valor del grado armónico en $\ell = 1$ para todos los modos. Como resultado obtuvimos un modelo de mejor ajuste caracterizado por $M_* = 0.837M_\odot$, $T_{\text{eff}} = 11\,391$ K y $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -7.36$. En la figura 7.1 se grafica la función de calidad Φ en términos de la temperatura efectiva, para los distintos valores de la masa remanente de hidrógeno para el caso $M_* = 0.837M_\odot$. El modelo de mejor ajuste corresponde al mínimo en Φ . En particular, el modelo sismológico tiene una temperatura efectiva más alta que el valor espectroscópico (~ 260 K). Las propiedades del modelo de mejor ajuste se muestran en la primera fila de la tabla 7.2 (modelo 1), donde se indican los períodos observados y teóricos, con su identificación de ℓ y k , además de la diferencia entre los períodos y el valor de la función de calidad. El valor de Φ para el modelo 1 es de 3.18 s. En particular, dada la cercanía en el valor de los períodos, los modos con 823.9 s y 834.1 s, se asocian con el mismo período teórico en 825.25 s.

Para el segundo ajuste de períodos, descartamos el período 834.1 s, dado que este modo es el que tiene una diferencia mayor con el período teórico 825.25 s, dejando seis períodos observados para ajustar. En este caso también restringimos el valor del grado armónico en $\ell = 1$. Como se esperaba, obtuvimos el mismo modelo de mejor ajuste (modelo 2, tabla 7.2) que en el caso anterior, con un valor menor de la función de calidad ($\Phi = 2.24$ s).

El siguiente paso fue relajar la restricción sobre el grado armónico, permitiendo que el valor de ℓ sea 1 o 2. Como resultado obtuvimos el mismo modelo astrosis-

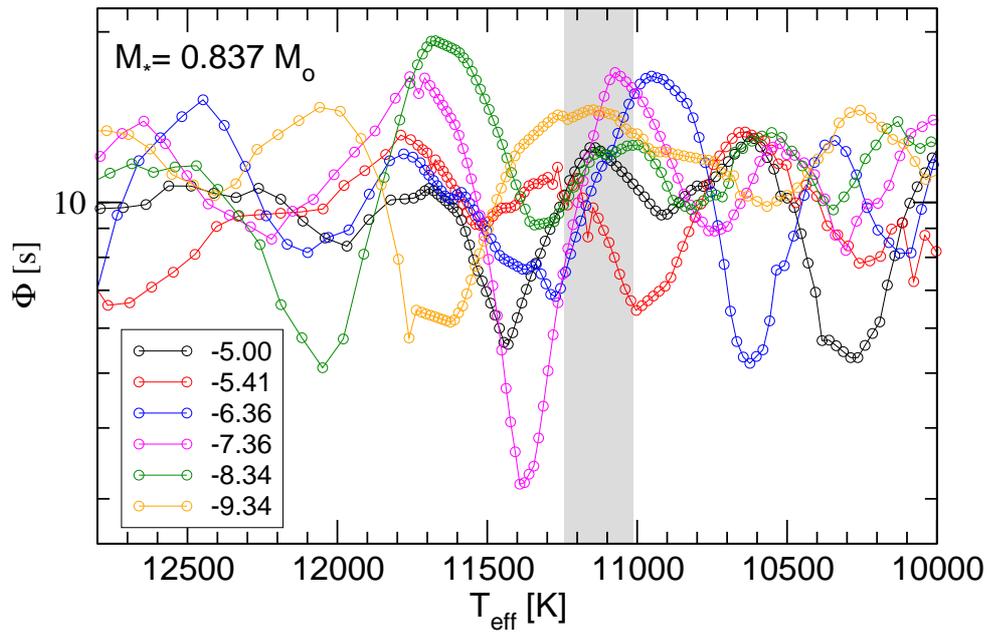


Figura 7.1: Función de calidad $\Phi(M_*, M_H, T_{\text{eff}})$ en términos de la temperatura efectiva para los distintos valores del espesor de la envoltura de hidrógeno, indicado con símbolos, correspondientes a la secuencia con masa estelar $M_* = 0.837M_\odot$ y para el caso donde se considera que todos los modos observados corresponden a modos dipolares (modelo 1, tabla 7.2). La franja vertical gris indica el rango de temperatura efectiva de WD J1916+3938, con las incertezas dadas por la espectroscopía (Hermes et al. 2011). El modelo de mejor ajuste corresponde al mínimo de Φ en $T_{\text{eff}} \sim 11400$ K, para un espesor de la envoltura $\log(M_H/M_*) = -7.36$.

Tabla 7.2: Posibles soluciones astrosismológicas para WD J1916+3938. el modelo 1 es el modelo de mejor ajuste cuando se considera que todos los modos tienen $\ell = 1$. El modelo 2 corresponde al caso donde no se incluye al modo con 834.1 s en el ajuste y se vuelve a fijar el grado armónico en $\ell = 1$. El modelo 3 indica el modelo astrosismológico cuando se utilizan todos los modos en el ajuste y se permite que el grado armónico sea $\ell 1$ o 2. Finalmente, el modelo 4 resulta el modelo de mejor ajuste cuando consideramos un modo con período 829 s en lugar de los períodos 823.9 s y 834.1 s, pero fijando nuevamente el grado armónico en $\ell = 1$.

Modelo	T_{eff} [K]	M_*/M_\odot	$\log(M_{\text{He}}/M_*)$	$\log(M_{\text{H}}/M_*)$	Π_i^{obs} [s]	Π_k^{th} [s]	ℓ	k	$ \Delta $ [s]	Φ [s]
1	11 391	0.837	-2.50	-7.36	823.9	825.25	1	18	-1.35	3.18
					834.1	825.25	1	18	8.85	
					934.5	930.08	1	20	4.42	
					968.9	971.58	1	21	-2.68	
					1089.0	1089.11	1	24	-0.11	
					1169.9	1169.59	1	26	0.31	
					1436.7	1432.14	1	32	4.56	
2	11 391	0.837	-2.50	-7.36	823.9	825.25	1	18	-1.35	2.24
					934.5	930.08	1	20	4.42	
					968.9	971.58	1	21	-2.68	
					1089.0	1089.11	1	24	-0.11	
					1169.9	1169.59	1	26	0.31	
					1436.7	1432.14	1	32	4.56	
					3	11 391	0.837	-2.50	-7.36	823.9
834.1	832.76	2	32	1.34						
934.5	932.69	2	36	1.81						
968.9	971.58	1	21	-2.68						
1089.0	1089.11	1	24	-0.11						
1169.9	1169.59	1	26	0.31						
1436.7	1437.09	2	56	-0.39						
4	11 376	0.837	-2.50	-7.36	829.0	825.88	1	18	3.12	2.56
					934.5	930.87	1	20	3.63	
					968.9	972.42	1	21	-3.52	
					1089.0	1090.11	1	24	-1.11	
					1169.9	1170.68	1	26	-0.78	
					1436.7	1433.51	1	32	3.19	

Tabla 7.3: Parámetros espectroscópicos y del modelo de mejor ajuste para WD J1916+3938. Recordar que los errores en el modelo astrosismológico son errores internos del procedimiento de ajuste. La masa inicial de la estrella progenitora es $M_* = 4M_\odot$.

Cantidad	Espectroscopía	Astrosismología
T_{eff} [K]	$11\,129 \pm 115$	$11\,391 \pm 70$
M_*/M_\odot	0.805 ± 0.040	0.837 ± 0.034
$\log g$	8.34 ± 0.06	8.40 ± 0.07
$\log(R_*/R_\odot)$...	-2.019 ± 0.016
$\log(L_*/L_\odot)$...	-2.860 ± 0.020
M_{He}/M_*	...	3.16×10^{-3}
M_{H}/M_*	...	$(4.41 \pm 2.93) \times 10^{-8}$
$X_{\text{C}}, X_{\text{O}}$ (central)	...	0.35, 0.64

mológico que en los dos casos anteriores (modelo 3, tabla 7.2). Sin embargo, los períodos teóricos no son los mismos que en los ajustes anteriores. En particular, el período 834.1 s se asocia con un modo con $\ell = 2$ y período 832.76, mientras que el período 823.9 s se asocia con un período teórico 825.25 s, como en los ajustes anteriores. El valor de la función de calidad es $\Phi = 1.14$ s.

Finalmente, realizamos un ajuste astrosismológico suponiendo que los períodos en 823.9 s y 834.1 s son las componentes $m = +1$ y $m = -1$ de un triplete, que aparecen debido al efectos de rotación de WD J1916+3938, y donde la componente central ($m = 0$) no se observa. Usando el promedio de las componentes $m = +1$ y $m = -1$ estimamos el valor del período de la componente central en 829 s. Por último reemplazamos en el ajuste los períodos con 823 s y 834.1 s por el período con 829 s. Así como para el modelo 2, supusimos que el grado armónico era $\ell = 1$ para los seis períodos. Aún en este caso obtenemos prácticamente la misma solución sismológica que para los ajustes anteriores de WD J1916+3938, con una temperatura efectiva un poco más baja ($T_{\text{eff}} = 11\,376$ K) y un valor de la función de calidad de $\Phi = 2.557$ s (modelo 4, tabla 7.2).

En resumen, los cuatro modelos de mejor ajuste obtenidos mediante diferentes suposiciones indican un modelo astrosismológico similar, caracterizado por una masa estelar $M_* = (0.837 \pm 0.03)M_\odot$, una temperatura efectiva $T_{\text{eff}} = 11\,380 \pm 70$ K, una gravedad superficial $\log g = 8.394 \pm 0.053$, una masa remanente de hidrógeno $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -7.36 \pm 0.47$. En la tabla 7.3 se comparan los resultados del ajuste astrosismológico de WD J1916+3938 con las propiedades observadas (Hermes et al. (2011)). Notar que la masa sismológica se encuentra en buen acuerdo con el valor espectroscópico ($M_* = 0.805M_\odot$) derivado de nuestros tracks.

En el último ajuste de períodos de WD J1916+3938 supusimos que los modos observados con períodos de 823.9 s y 843.1 s correspondían a las componentes $m = +1$ y $m = -1$ de un *splitting* rotacional, donde la componente central no aparece en el espectro de pulsación. Bajo esta hipótesis podemos calcular el espaciamiento de frecuencia entre las componentes como $\Delta\nu = \nu(m = +1) - \nu(m = -1) = 14.8\mu\text{Hz}$. Suponiendo la aproximación de rotación lenta, justificada en la mayoría de las estrellas enanas blancas, tenemos que $\delta\nu = -m\Omega_{\text{rot}}(1 - C_{k,\ell})$, donde $\delta\nu =$

$\Delta\nu/2 = 7.4\mu\text{Hz}$ y $C_{k,\ell} \sim 0.5$ para $\ell = 1$ en el límite asintótico. Así, una estimación del período de rotación medio para WD J1916+3938 es de $P_{\text{rot}} = 1/\Omega_{\text{rot}} = 18.77$ hs. Este valor está en acuerdo con los valores inferidos para otras estrellas ZZ Ceti a partir de un análisis astrosismológico (Fontaine & Brassard 2008).

En este trabajo de Tesis realizamos un estudio pulsacional detallado aplicado a la clase de estrellas enanas blancas variables más frías: las estrellas variables ZZ Ceti. Las estrellas ZZ Ceti o DAV son la clase de estrellas enanas blancas más numerosa, con 148 miembros, siendo G117–B15A la estrella arquetípica y también la más estudiada entre las enanas blancas DAV.

La primera etapa de la Tesis consistió en el cálculo de secuencias evolutivas completas de estrellas enanas blancas DA, partiendo desde la ZAMS, pasando por las etapas de combustión nuclear estable de hidrógeno y helio, la fase de pulsos térmicos y los episodios de pérdida de masa en la AGB, la fase de nebulosa planetaria, hasta llegar a la curva de enfriamiento de las enanas blancas, donde calculamos la evolución hasta la región donde se encuentra la banda de inestabilidad de las estrellas ZZ Ceti. El cálculo detallado de cada etapa en la evolución de la estrella progenitora, nos permitió obtener modelos representativos de enanas blancas DA caracterizados por perfiles químicos realistas en el núcleo y la envoltura, un aspecto crucial en estudios astrosismológicos de estrellas ZZ Ceti. Esta característica es una de las principales virtudes de los modelos calculados en este trabajo, y representa una mejora sustancial respecto de los modelos existentes hasta el momento en la literatura. Para los cálculos evolutivos empleamos el código evolutivo LPCODE, basado en una física constitutiva detallada y actualizada. En particular, se consideraron episodios de mezcla extra durante la combustión central de hidrógeno y helio, difusión de elementos dependiente del tiempo durante la fase de enana blanca y rehomogeneización química en la composición interna de carbono y oxígeno por inestabilidad de Rayleigh-Taylor. La metalicidad de las estrellas progenitoras es $Z = 0.01$. Un resumen de los resultados se encuentra a continuación.

- Discutimos la importancia de un tratamiento detallado de la evolución durante los pulsos térmicos en la AGB y de la difusión de elementos sobre la forma del perfil químico de las capas más externas de las estrellas ZZ Ceti. En este sentido, encontramos una fuerte dependencia de la estratificación química de las capas externas con la masa estelar. En modelos menos masivos ($M_* \lesssim 0.63M_\odot$), los procesos difusivos no son capaces de remover la estructura de la interfase triple,

construída durante el episodio de mezcla en el último pulso térmico en la AGB, en el tiempo que la estrella tarda en alcanzar la etapa de ZZ Ceti. Por otro lado, la estructura de doble capa en los modelos de masas más altas desaparece al momento de alcanzar la banda de inestabilidad. Esto se debe a que la difusión de elementos se vuelve menos eficiente cuando la masa del modelo decrece y a que el espesor de esta interfase es mayor para los modelos menos masivos.

- Analizamos en profundidad la importancia de la relación masa inicial – masa final para las enanas blancas con núcleo de carbono y oxígeno. Encontramos que una reducción de la eficiencia de los episodios de mezcla extra durante la fase de pulsos térmicos en la AGB, sustentada por evidencia teórica y observacional, lleva a un aumento gradual de la masa del núcleo libre de hidrógeno a medida que la estrella evoluciona en esta etapa. Como resultado, la relación masa inicial – masa final al final de la etapa de pulsos térmicos en la AGB es muy distinta de aquella que resulta de considerar la masa del núcleo libre de hidrógeno justo antes del primer pulso térmico. Este hecho da lugar a una ambigüedad en la masa de la estrella progenitora, dada la masa estelar de la enana blanca. Por otro lado, tiene implicaciones importantes sobre la composición de carbono/oxígeno que se espera en una enana blanca. En particular, la abundancia central de oxígeno podría subestimarse por un $\sim 15\%$ si se asume que la masa de la enana blanca es la masa del núcleo libre de hidrógeno antes del primer pulso térmico.
- Estudiamos la dependencia de las abundancias centrales de oxígeno con la tasa de reacción nuclear $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$. Para ello calculamos secuencias evolutivas adicionales, con una masa estelar en la etapa de enana blanca de $0.593M_{\odot}$ y utilizando distintos valores de la tasa de reacción $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$. Encontramos que un aumento del $\sim 50\%$ en la tasa de reacción da lugar a un aumento del $\sim 12\%$ en la abundancia central de oxígeno, mientras que una disminución en el $\sim 50\%$ en la tasa de reacción se traduce en un decrecimiento del $\sim 46\%$ en X_{O} . Dentro de las incertezas dadas por Kunz et al. (2002), encontramos que la abundancia de oxígeno central tiene un valor mínimo en ~ 0.48 y un máximo en ~ 0.8 .

Respecto de las propiedades pulsacionales de los nuevos perfiles químicos calculados en esta Tesis, encontramos que:

- Los períodos de pulsación decrecen cuando la masa estelar del modelo aumenta, debido a un aumento en la frecuencia de Brunt-Väisälä, que es a su vez proporcional a la gravedad superficial. Por otro lado, observamos que los períodos se vuelven más largos a medida que la estrella se enfría. Esto se debe a un decrecimiento en N debido a un aumento en el grado de degeneración con el enfriamiento.
- El espesor de la envoltura de hidrógeno es el parámetro que mayor influencia tiene sobre el espectro de períodos de pulsación en una estrella ZZ Ceti. Globalmente se observa un aumento en los períodos cuando M_{H} disminuye. También

se observan eventos de *avoided crossing*, sobre todo para modos de bajo orden radial. Por último, se observa una dependencia débil, aunque no despreciable, de los períodos con la abundancia central de oxígeno.

- Observamos que las tendencias globales y la dependencia funcional de los períodos de oscilación con los parámetros estructurales (M_* , M_H , T_{eff}) en nuestros modelos son similares a las que se obtienen a partir de los modelos utilizados previamente por otros autores en estudios astrosismológicos de estrellas ZZ Ceti. Sin embargo, tanto el espectro de períodos de modos g como los detalles del atrapamiento de modos derivados según nuestros modelos son sustancialmente diferentes. En particular, los valores precisos de los períodos teóricos obtenidos en base a nuestros modelos son diferentes de aquellos correspondientes a los modelos más comúnmente utilizados, lo cual afecta *directamente* los resultados de los ajustes astrosismológicos, un aspecto íntimamente relacionado con el presente trabajo de Tesis.

Utilizando los modelos detallados de las estrellas ZZ Ceti realizamos un estudio astrosismológico de estos objetos. Este es el primer estudio sismológico donde se emplea una gran grilla de modelos evolutivos caracterizados por perfiles químicos consistentes desde el centro hasta la superficie y cubriendo un amplio rango de masa estelar, espesor de la envoltura de hidrógeno y temperatura efectiva. Este enfoque representa una mejora significativa sobre cálculos previos, que se basan en modelos de enanas blancas DA caracterizados por perfiles químicos simplificados para la envoltura y/o el núcleo. La muestra de enanas blancas DAV consiste en 44 estrellas ZZ Ceti, provenientes del grupo de estrellas brillantes, para las cuales los parámetros superficiales están bien determinados. En esta muestra se incluye la estrella arquetípica G117–B15A. El estudio astrosismológico simultáneo de un número elevado de estrellas permite, en principio, derivar características y propiedades comunes de esta clase de enanas blancas variables.

Dado que G117–B15A es la estrella ZZ Ceti más estudiada en la literatura, hemos puesto mayor énfasis en el análisis y descripción de los resultados para este objeto en particular. Los resultados principales para G117–B15A son:

- Encontramos un modelo astrosismológico para G117–B15A caracterizado por $T_{\text{eff}} = 11\,985 \pm 200$ K, $\log g = 8.00 \pm 0.09$ y $M_* = 0.593 M_{\odot}$, en excelente acuerdo con las determinaciones espectroscópicas.
- Por primera vez, se rompe la degeneración relacionada con el espesor de la envoltura de hidrógeno en las soluciones astrosismológicas de G117–B15A, presentada en estudios previos, dependiendo de la identificación del orden radial k de los tres modos que exhibe esta estrella. Encontramos una identificación $k = 2, 3, 4$ como la única posible en el marco de nuestros modelos de pulsación. Se debe tener en cuenta que, si permitiéramos la variación de algún otro parámetro estructural, probablemente recuperaríamos la degeneración en las soluciones sismológicas reportada por los trabajos previos sobre esta estrella ZZ Ceti. Recordar que los parámetros como el espesor del buffer de helio, la forma de

los perfiles de las abundancias de carbono y oxígeno, el ancho de las regiones de transición química, etc, no son parámetros libres en nuestros modelos, sino que son fijados estrictamente según las predicciones de la teoría de evolución estelar.

- El modelo de mejor ajuste tiene una envoltura de hidrógeno con $M_H = (1.25 \pm 0.7) \times 10^{-6} M_*$, alrededor de dos ordenes de magnitud más delgada que el valor predicho por los cálculos evolutivos canónicos, de $M_H \sim 10^{-4} M_*$ para esta masa estelar.
- El valor obtenido para el espesor de la envoltura de hidrógeno del modelo de mejor ajuste de G117–B15A está en muy buen acuerdo con las predicciones del escenario post-LTP propuesto por Althaus et al. (2005a) para la formación de enanas blancas DA con una envoltura delgada.
- La luminosidad del modelo astrosismológico permite inferir una paralaje sis-mológica para G117–B15A, que es bastante más grande que el valor trigonométrico. Dado que se encuentra en acuerdo con trabajos previos, concluimos que la paralaje trigonométrica tiene incertezas altas y que el valor astrosismológico es robusto.

Para el conjunto de las 44 estrellas ZZ Ceti brillantes, los resultados astrosismológicos principales son:

- Determinamos la masa espectroscópica de las 44 estrellas analizadas usando los tracks evolutivos de enanas blancas DA calculados en este trabajo.
- El valor medio para la masa astrosismológica de $\langle M_* \rangle_{\text{sis}} = 0.636 \pm 0.019 M_\odot$, un poco más alto que la masa media espectroscópica, de $\langle M_* \rangle_{\text{espec}} = 0.630 \pm 0.028 M_\odot$. Dado que se utilizaron dos enfoques completamente diferentes para derivar los dos valores, consideramos que se encuentran en buen acuerdo.
- El valor derivado para $\langle M_* \rangle_{\text{sis}}$ se corresponde con el valor medio de la masa de las enanas blancas DA inferida por Tremblay et al. (2011), $\langle M_* \rangle_{\text{DA}} = 0.631 M_\odot$, y en buen acuerdo con el valor derivado por Falcon et al. (2010), $\langle M_* \rangle_{\text{DA}} = 0.647^{+0.013}_{-0.014} M_\odot$.
- Existe un rango en el espesor de la envoltura de hidrógeno para las estrellas ZZ Ceti estudiadas, cualitativamente de acuerdo con los resultados de Castanheira & Kepler (2009). Nuestra distribución en el espesor de la envoltura de hidrógeno está caracterizada por un pico dominante en envolturas gruesas [$\log(M_H/M_*) \sim -4.5$] y otro mucho menos pronunciado para envolturas muy delgadas [$\log(M_H/M_*) \sim -9.5$], con un valle evidente para valores intermedios.
- Para la mayoría de las estrellas DAV analizadas (34 de un total de 44) los modelos astrosismológicos tienen envolturas de hidrógeno más delgadas que los valores predichos por la evolución estelar estándar para una masa estelar dada. Sin embargo, los valores para la masa de la envoltura de hidrógeno se acumulan

más cerca de los valores canónicos que aquellos derivados por Castanheira & Kepler (2009).

- De acuerdo con nuestros resultados el valor medio de la masa de la capa de hidrógeno es $\langle M_{\text{H}}/M_{*} \rangle = 2.71 \times 10^{-5}$. Este valor es alrededor de 50 veces más alto que el valor presentado por Castanheira & Kepler (2009), basado en una muestra de estrellas diferente, $\langle M_{\text{H}}/M_{*} \rangle = 5.01 \times 10^{-7}$.

WD J1919+3938 es la primera estrella ZZ Ceti que se encuentra en el campo del satélite *Kepler*, con lo cual se espera obtener la mejor curva de luz detectada en una estrella DAV. Como primer paso realizamos un estudio astrosismológico preliminar de esta estrella utilizando el espectro de períodos observados, hasta el momento, desde la Tierra. Los resultados principales son:

- Haciendo algunas suposiciones sobre el valor del grado armónico y del orden radial para los períodos de pulsación observados en este objeto, encontramos un modelo sismológico caracterizado por $T_{\text{eff}} = 11\,380 \pm 70$ K, $\log g = 8.39 \pm 0.07$, $M_{*} = (0.837 \pm 0.034)M_{\odot}$, $M_{\text{H}}/M_{*} = (4.41 \pm 2.39) \times 10^{-8}$ y $M_{\text{He}}/M_{*} = 3.16 \times 10^{-3}$.
- La masa estelar del modelo sismológico está en buen acuerdo con las estimaciones espectroscópicas ($M_{*} = 0.8M_{\odot}$). Por otro lado, la temperatura efectiva sismológica es un poco más alta que el valor espectroscópico ($11\,129 \pm 115$ K).
- Estimamos un período de rotación de 18.77 h para WD J1919+3938, basado en la hipótesis de que los modos con períodos de 823.9 s y 834.1 s corresponden a las componentes $m = +1$ y $m = -1$ de un triplete, respectivamente, producto de la rotación de la estrella.
- Es importante notar que la posibilidad de que una estrella ZZ Ceti masiva, como WD J1919+3938, sea monitoreada por la misión *Kepler* con un alto grado de detalle, hace de esta estrella la candidata ideal para estudiar la física de los procesos de cristalización a altas densidades.

Tanto los resultados obtenidos en este trabajo como aquellos presentados en Castanheira & Kepler (2008, 2009) concluyen que una fracción importante de enanas blancas DA podría haberse formado con un valor de M_{H} más pequeña que el valor predicho por la evolución estelar estándar.

En resumen, los resultados apuntan a la posible existencia de una fracción no despreciable de enanas blancas DA con envolturas de hidrógeno delgadas. Un posible escenario de formación, es aquel propuesto por Althaus et al. (2005b) para la formación de una enana blanca DA con una M_{H} más pequeña ($\sim 10^{-5}M_{*}$) que la predicha por la teoría estándar ($\sim 10^{-4}M_{*}$), en acuerdo con el valor de la envoltura de hidrógeno estimado para G117–B15A. Un nuevo análisis astrosismológico sobre un conjunto muy numeroso de estrellas DAV, incluyendo las estrellas ZZ Ceti del SDSS, basado en modelos evolutivos completos de enanas blancas DA con perfiles realistas como los calculado en este trabajo, ayudará a encontrar bases más firmes sobre esta idea.

En el futuro se pretende explotar el potencial de la gran grilla de modelos evolutivos representativos de las estrellas ZZ Ceti para realizar estudios astrosismológicos de este tipo de estrellas pulsantes, ya sea para estrellas aisladas como para investigar las propiedades de las estrellas DAV como un grupo.

En esta sección desarrollaremos la teoría de pulsaciones no-radiales adiabáticas en la aproximación lineal, o de pequeñas perturbaciones, para un sistema con simetría esférica, es decir, en ausencia de rotación o campos magnéticos. Partiremos entonces de las ecuaciones de la hidrodinámica para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales que tiene como solución las autofunciones y autofrecuencias de oscilación. El tratamiento que se muestra a continuación sigue el tratamiento y la derivación de Unno et al. (1989). Las ecuaciones básicas de la hidrodinámica son las ecuaciones de conservación de masa (ec. A.1), del momento (ec. A.2) y de la energía (ec. A.3):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = \rho \vec{f} - \nabla P - \rho \nabla \Phi + \nabla \Theta \quad (\text{A.2})$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) S = \rho (\epsilon_N + \epsilon_V) - \nabla \cdot \vec{F}_R \quad (\text{A.3})$$

En estas ecuaciones ρ denota la densidad de masa, P la presión, T la temperatura, \vec{u} la velocidad de flujo, S la entropía específica, Φ el potencial gravitatorio, \vec{f} las fuerzas electromagnéticas externas, Θ el tensor de esfuerzos viscosos, ϵ_N la tasa de generación de energía nuclear, ϵ_V la generación de calor por viscosidad, \vec{F}_R el flujo de energía por radiación y ∇ es el operador gradiente.

Para completar la descripción del sistema debemos agregar ecuaciones suplementarias. Estas ecuaciones son: la ecuación de Poisson, que relaciona el potencial gravitatorio con la distribución de masa,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (\text{A.4})$$

y la ecuación de difusión radiativa,

$$\hat{F}_R = -K \nabla T \quad (\text{A.5})$$

donde G es la constante de gravitación universal, ∇^2 es el operador Laplaciano y K es la constante de conductividad radiativa, que se puede escribir en función de la opacidad κ como:

$$K = \frac{4ac}{3\kappa\rho}T^3 \quad (\text{A.6})$$

En esta ecuación a es la constante de densidad de radiación y c es la velocidad de la luz. También existe un conjunto de ecuaciones que proporcionan las expresiones para $P(\rho, T)$, $S(\rho, T)$, $\epsilon_N(\rho, T)$ y $\kappa(\rho, T)$.

Generalmente la viscosidad es pequeña en el interior estelar y en ausencia de convección. Por lo tanto, podemos despreciar el término de viscosidad en (ec.A.2) ($\nabla \cdot \Theta \approx 0$) y el término que contiene ϵ_N en la ecuación A.3 ($\epsilon_V \approx 0$).

Si consideramos también un sistema autogravitante y en ausencia de campos magnéticos tenemos que $f = 0$. Bajo estas suposiciones las ecuaciones (A.1)-(A.3) resultan:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = \rho \vec{f} - \nabla P - \rho \nabla \Phi \quad (\text{A.8})$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) S = \rho \epsilon_N - \nabla \cdot \overline{F_R} \quad (\text{A.9})$$

Mientras que las ecuaciones (A.4) y (A.5) no varían.

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (\text{A.10})$$

$$\overline{F_R} = -\frac{4ac}{3\kappa\rho}T^3 \nabla T \quad (\text{A.11})$$

Notar que la ecuación (A.8) es la aproximación de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido no viscoso, es decir, la ecuación de Euler. En las ecuaciones anteriores notamos con \vec{v} a la velocidad del fluido en ausencia de convección para diferenciarla de la velocidad general \vec{u} que puede incluir campos de velocidad turbulentos.

Ahora consideremos el estado de equilibrio, para ello fijamos $v_0 = 0$ y $(\partial/\partial t = 0)$ en las ecuaciones (A.7)-(A.11). Esto resulta en:

$$-\nabla P_0 - \rho_0 \nabla \Phi_0 = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\rho_0 \epsilon_{N,0} - \nabla \cdot \overline{F_{R,0}} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0 \quad (\text{A.14})$$

$$\overline{F_{R,0}} = -K_0 \nabla T \quad (\text{A.15})$$

donde el indicamos con un subíndice 0 las variables físicas en equilibrio. Notar que la ecuación (A.14) es la condición de equilibrio hidrostático.

Para derivar las ecuaciones de oscilación, consideramos el estado no perturbado o en equilibrio y le superponemos pequeñas perturbaciones. Dado que las perturbaciones son mucho menores en magnitud que las variables en equilibrio, podemos asumir que vale la teoría lineal y descartar así términos de orden mayor a uno en las perturbaciones.

Las perturbaciones de cierta cantidad física f se pueden describir matemáticamente de dos maneras: con variaciones Lagrangianas (δf) o Eulerianas (f').

$$\begin{aligned}\delta f(\bar{r}, t) &= f(\bar{r}, t) - f_0(\bar{r}) \\ f'(\bar{r}, t) &= f(\bar{r}, t) - f_0(\bar{r})\end{aligned}\tag{A.16}$$

Si definimos $\bar{\xi} = \bar{r} - \bar{r}_0$ como la variación Lagrangiana de la posición de un elemento de fluido, tenemos que la relación entre los dos tipos de perturbaciones está dada, a primer orden, por:

$$\delta f(\bar{r}, t) = f'(\bar{r}, t) + \bar{\xi} \cdot \nabla f_0(\bar{r}_0)\tag{A.17}$$

Las variaciones Lagrangiana y Euleriana coinciden para el caso no perturbado ($\bar{v}_0=0$) y están dadas por:

$$\bar{v} = \bar{v}' = \delta\bar{v} = \frac{d\bar{\xi}}{dt}\tag{A.18}$$

Ahora procederemos a la linealización de las ecuaciones (A.7)-(A.11). Para ello escribimos a cada variable física como su valor en equilibrio más una pequeña perturbación Euleriana.

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho' \\ \Phi &= \Phi_0 + \Phi' \\ P &= P_0 + P' \\ \bar{v} &= \bar{v}_0 + \bar{v}'\end{aligned}\tag{A.19}$$

Reemplazando las expresiones (A.19) en las ecuaciones (A.7)-(A.11), despreciando términos de orden mayor o igual a dos en las perturbaciones y usando que las variables de equilibrio satisfacen las ecuaciones (A.12)-(A.15), se obtiene:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \bar{v}) = 0\tag{A.20}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla P' + \rho_0 \nabla \Phi' + \rho' \nabla \Phi_0 = 0\tag{A.21}$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho'\tag{A.22}$$

$$\bar{F}'_R = -K_0 \nabla T' - K' \nabla T_0\tag{A.23}$$

Las ecuaciones (A.20)-(A.23) forman un sistema de ecuaciones diferenciales lineales

en derivadas parciales para las variables perturbadas (ρ', Φ', T' , etc) y para el vector velocidad $\bar{v} = \bar{v}' = \delta\bar{v}$ o la variación Lagrangiana del desplazamiento $\bar{\xi}$. Los coeficientes de estas ecuaciones diferenciales incluyen solamente cantidades en equilibrio, que son funciones solo de r ya que estamos considerando que el modelo no perturbado tiene simetría esférica.

$$\rho_0 = \rho_0(r), \quad T_0 = T_0(r), \quad \Phi_0 = \Phi_0(r) \quad (\text{A.24})$$

En adelante, para simplificar la notación, omitiremos los subíndices 0.

Las perturbaciones o variaciones Eulerianas son funciones del tiempo y de las coordenadas. Si elegimos coordenadas esféricas podemos escribir estas funciones como:

$$f' = f'(r, \theta, \phi, t)$$

A partir de aquí se puede hacer la primera separación de variables. Suponemos una dependencia temporal oscilatoria de la forma $e^{i\sigma t}$, donde σ es la frecuencia angular de oscilación, que se relaciona con la frecuencia cíclica ν y el período Π de la siguiente manera:

$$\nu = \frac{\sigma}{2\pi} = \frac{1}{\Pi}$$

Así podemos escribir cualquier cantidad física de la forma

$$f'(r, \theta, \phi, t) = f'(r, \theta, \phi)e^{i\sigma t} \quad (\text{A.25})$$

Consideremos la siguiente relación termodinámica (Unno et al. 1989):

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{P'}{p} - A\xi_r - \nabla_{ad} \frac{\rho T}{p} \delta S \quad (\text{A.26})$$

En la ecuación (A.26)

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_{S'}, \quad \nabla_{ad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_{S'} \quad (\text{A.27})$$

donde el subíndice S' indica que las derivadas se realizan a entropía constante, ξ_r es la componente radial de $\bar{\xi}$ y A es el discriminante de Schwarzschild que denota el grado de estabilidad ($A < 0$) o inestabilidad ($A > 0$) convectiva y está dado por:

$$A = \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr}$$

Utilizando la dependencia dada en la ec (A.25), la ecuación (A.26) y operando con las ecuaciones (A.20)-(A.23) obtenemos:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\rho g}{\Gamma_1 P} \right) P' - (\sigma^2 + gA) \xi_r + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} = g \nabla_{ad} \frac{\rho T}{P} \delta S \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r^2 \xi_r)}{\partial r} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} \xi_r + \left(\frac{\rho}{\Gamma_1 P} + \frac{\nabla_{\perp}^2}{\sigma^2} \right) \frac{P'}{\rho} + \frac{1}{\sigma^2} \nabla_{\perp}^2 \Phi' = \nabla_{ad} \frac{\rho T}{P} \delta S \quad (\text{A.29})$$

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \nabla_{\perp}^2 \right) \Phi' - 4\pi G \rho \left(\frac{P'}{\Gamma_1 P} - A \xi_r \right) = -4\pi G \nabla_{ad} \frac{\rho^2 T}{P} \delta S \quad (\text{A.30})$$

$$i\sigma \rho T \delta S = (\rho \epsilon_N)' - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r')}{\partial r} + \nabla_{\perp}^2 (KT') \quad (\text{A.31})$$

$$F_r' = -K \frac{\partial T'}{\partial r} - K' \frac{dT}{dr} \quad (\text{A.32})$$

donde ∇_{\perp}^2 es el operador diferencial.

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (\text{A.33})$$

Aquí F_r' es la componente radial de la variación Euleriana en el flujo, F_R' .

Como resultado, las ecuaciones (A.28)-(A.32) son independientes del tiempo. Los coeficientes dependen solamente de la coordenada radial r , y el único operador diferencial con derivadas respecto de los ángulos es ∇_{\perp}^2 . Por lo tanto, podemos hacer otra separación de variables, en una parte radial y otra angular. La dependencia de la parte angular se puede especificar en función de los armónicos esféricos $Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$. Estas funciones son autofunciones del operador $L^2 = r^2 \nabla_{\perp}^2$ con autovalores $\ell(\ell + 1)$.

$$L^2 Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = \ell(\ell + 1) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (\text{A.34})$$

La forma explícita de los armónicos esféricos está dada por:

$$Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = (-1)^{m+|m|/2} \left[\frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{2\pi(\ell + m)!} \right]^{1/2} P_{\ell}^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (\text{A.35})$$

donde $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$ y $P_{\ell}^{|m|}(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre.

Después de esta separación de variables, para los modos normales, las perturbaciones toman la forma:

$$f'(r, \theta, \phi) = f(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (\text{A.36})$$

Y la expresión para la variación Lagrangiana del desplazamiento es:

$$\bar{\xi} = \left[\xi_r(r), \xi_h(r) \frac{\partial}{\partial \theta}, \xi_h(r) \frac{\partial}{\sin \theta \partial \phi} \right] Y_{\ell}^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t} \quad (\text{A.37})$$

donde

$$\xi_h = \frac{1}{\sigma^2 r} \left(\frac{P'}{\rho} + \Phi' \right) \quad (\text{A.38})$$

Asumiendo que las perturbaciones de las cantidades físicas tienen la forma (A.36), las ecuaciones (A.28)-(A.32) se transforman en:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dr} + \frac{g}{\rho c_S^2} P' + (N^2 - \sigma^2) \xi_r + \frac{d\Phi'}{dr} = g \nabla_{ad} \frac{\rho T}{P} \delta S \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} \xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) \frac{P'}{\rho c_S^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi' = \nabla_{ad} \frac{\rho T}{P} \delta S \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' - 4\pi G \rho \left(\frac{P'}{\rho c_S^2} + \frac{N^2}{g} x i_r \right) = -4\pi G \nabla_{ad} \frac{\rho^2 T}{P} \delta S \quad (\text{A.41})$$

$$K \frac{dT'}{dr} = -F'_r - K' \frac{dT}{dr} \quad (\text{A.42})$$

$$i\sigma \rho T \delta S = (\rho \epsilon_N)' - \frac{1}{r^2} \frac{r^2 F'_r}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} K T' \quad (\text{A.43})$$

siendo $c_S^2 = (\Gamma_1 p / \rho)^{1/2}$ la velocidad local del sonido. N y L_ℓ son las frecuencias de Brunt-Väisälä y Lamb, respectivamente, y están dadas por:

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -gA \quad (\text{A.44})$$

$$L_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} c_S^2 \quad (\text{A.45})$$

Las frecuencias de Brunt-Väisälä y de Lamb cumplen un rol fundamental en la teoría de pulsaciones estelares no-radiales. En particular, la frecuencia de Brunt-Väisälä define las características globales del espectro de modos g .

Consideremos ahora la aproximación adiabática. Para ello suponemos que no hay intercambio de calor entre los elementos del fluido al oscilar. Esta condición se cumple principalmente en las zonas internas de la estrella, pero no lo hace en las regiones próximas a la superficie. La condición de oscilaciones adiabáticas es equivalente a decir que la entropía específica se conserva, tal que

$$\delta S = 0 \quad (\text{A.46})$$

A partir de esta condición la relación termodinámica (A.26) toma la siguiente forma simplificada:

$$\rho' = \frac{P'}{c_S^2} + \frac{\xi_r \rho N^2}{g} \quad (\text{A.47})$$

que expresa la perturbación en la densidad en función de la perturbación en la presión.

Tomando en cuenta la relación (A.47), las ecuaciones básicas (A.39)-(A.41) se reducen a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} - \frac{g}{c_S^2} \xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2}\right) \frac{P'}{\rho c_S^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi' \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dr} + \frac{g}{\rho c_S^2} P' + (N^2 - \sigma^2) \xi_r = -\frac{d\Phi'}{dr} \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' = 4\pi G \rho \left(\frac{P'}{\rho c_S^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r \right) \quad (\text{A.50})$$

Las ecuaciones (A.48)-(A.50) con las condiciones de contorno apropiadas en el centro ($r=0$) y en la superficie de la estrella ($r=R$ ó $P=0$), constituyen un problema de autovalores (σ^2). donde las soluciones están dadas por los modos normales de oscilación. Podemos ver también que estas ecuaciones son independientes del número azimutal m y muestran, por consiguiente, una degeneración del orden $2\ell+1$ en los autovalores. Esta degeneración se rompe, por ejemplo, para sistemas rotantes o que poseen un campo magnético.

Las ecuaciones (A.48)-(A.50) aplicadas a modelos estelares generales deben resolverse en forma numérica. Para realizar un análisis numérico del sistema planteado, es necesario escribir el sistema de ecuaciones en forma adimensional, para lo cual debemos definir también las variables del problema en su forma adimensional. Las nuevas variables adimensionales se definen como:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\xi_r}{r} & y_2 &= \frac{1}{gr} \left(\frac{P'}{\rho} \right) \\ y_3 &= \frac{\Phi'}{gr} & y_4 &= \frac{1}{g} \frac{d\Phi'}{dr} & \omega^2 &= \frac{R_*^3}{GM_*} \sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

por lo tanto, las incógnitas del problema se pueden expresar en función de las variables adimensionales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \xi_r &= r y_1 & P' &= \rho g r (y_2 - y_1) \\ \Phi' &= g r y_3 & \frac{d\Phi'}{dr} &= g y_4 & \sigma^2 &= \frac{GM_*}{R_*^3} \omega^2 \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Sustituyendo las expresiones (A.52) en las ecuaciones (A.48)-(A.50) obtenemos un sistema de ecuaciones adimensionales dado por:

$$x \frac{dy_1}{dr} = (V_g' 3) y_1 + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{C_1 \omega^2} - V_g \right] y_2 + V_g y_3 \quad (\text{A.53})$$

$$x \frac{dy_2}{dr} = (C_1 \omega^2 - A^*) + (A^* - U + 1) y_2 - A^* y_3 \quad (\text{A.54})$$

$$x \frac{dy_3}{dr} = (1 - U) y_3 + y_4 \quad (\text{A.55})$$

$$x \frac{dy_4}{dr} = U A^* y_1 + U V_g y_2 + [\ell(\ell+1) - U V_g] y_3 - U y_4 \quad (\text{A.56})$$

donde

$$V_g = \frac{V}{\Gamma_1} = -\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{gr}{c_S^2} = \frac{gr\rho}{\Gamma_1 p} \quad (\text{A.57})$$

$$U = \frac{d \ln M_r}{d \ln r} = \frac{4\pi\rho r^3}{M_r} \quad (\text{A.58})$$

$$C_1 = \left(\frac{r}{R_*}\right)^3 \frac{M_*}{M_r} \quad (\text{A.59})$$

$$A^* = -rA = \frac{r}{g} N^2 = r \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) \quad (\text{A.60})$$

La variable adimensional x es la coordenada radial escaleada con el radio estelar ($x = r/R_*$), M_r es la masa contenida en una esfera de radio r , y M_* es la masa total de la estrella.

Las condiciones de contorno en la formulación adimensional que completan el sistema son, en el centro del modelo ($x = 0$):

$$y_1 C_1 \omega^2 - \ell y_2 = 0, \quad \ell y_3 - y_4 = 0 \quad (\text{A.61})$$

y en la superficie estelar ($x = 1$):

$$y_1 - y_2 + y_3 = 0, \quad (\ell + 1)y_3 + y_4 = 0 \quad (\text{A.62})$$

además de la condición de normalización $y_1 = 1$ en $x = 1$.

■ **Armónicos esféricos:**

$$Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \left[\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2\pi(\ell+m)!} \right]^{1/2} P_{\ell}^{|m|} \cos \theta e^{im\phi}$$

- **Estrellas de Población I:** Las estrellas de Población I son estrellas jóvenes de cúmulos abiertos, en los brazos espirales de la Galaxia, que se forman a partir del material procesado por generaciones anteriores. Estas estrellas se consideran de metalicidad alta.
- **Estrellas de Población II:** Las estrellas de Población II son estrellas viejas de cúmulos globulares, en el halo de la Galaxia, formadas en los primeros tiempos del Universo a partir de material primordial, principalmente hidrógeno y helio y bajas concentraciones de elementos más pesados. Estas estrellas son de baja metalicidad.
- **Estrellas de Población III:** Las estrellas de Población III son aquellas estrellas masivas que se formaron a partir de los elementos producto de la nucleosíntesis en el Big Bang, esencialmente de hidrógeno y helio.
- **Luminosidad:** Energía emitida por unidad de tiempo. Se puede definir como: $L = F \times A$, donde F es la densidad de flujo de energía y A es el área. Suponiendo que la estrella es una esfera de radio r que emite como un cuerpo negro de temperatura T_{eff} , la luminosidad está dada por:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$$

- **Magnitud Bolométrica M_{bol} :** El flujo total recibido de un cuerpo luminoso y que comprende todo el espectro electromagnético con la corrección necesaria para compensar el efecto de la atmósfera terrestre. La diferencia entre la magnitud bolométrica y la magnitud en una longitud de onda λ se denomina corrección bolométrica BC_{λ} . La cantidad BC usualmente se refiere a la

corrección sobre la magnitud visual. El cero de la escala de las magnitudes bolométricas se fija adoptando $M_{\text{bol}}(\odot) = 4.75$.

- **Metalicidad Z** : La metalicidad de una estrella es la fracción de masa formada por elementos químicos que no son hidrógeno y helio. La metalicidad solar es $Z = 0.01$.
- **Opacidad**: La opacidad es una medida de la permeabilidad del medio material a la radiación. Aplicado a la astrofísica, una región con opacidad baja es transparente a la radiación, mientras que regiones de opacidad alta, bloquean el flujo de radiación.
- **Parsec (pc)**: Medida de longitud igual a distancia al Sol de un objeto que tiene un ángulo de paralaje de 1 arcseg. Equivale a 3.26 años luz, o a 3.1×10^{13} km.
- **Relación politrópica**: Una relación politrópica está dada por:

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}},$$

donde K es la constante politrópica y n es el índice politrópico.

- **Temperatura efectiva**: Temperatura de la fotosfera de la estrella que se corresponde a la temperatura de un cuerpo negro con las dimensiones de la estrella, tal que

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$$

BIBLIOGRAFÍA

- Aizenman, M., Smeyers, P., & Weigert, A., 1977, *A&A*, 58, 41
- Alexander, D.R., & Ferguson, J.W., 1994, *ApJ*, 437, 879
- Allen, C.W., 1973, London: University of London, Athlone Press, 3rd ed.
- Althaus, L.G., & Benvenuto, O.G., 2000, *MNRAS*, 317, 952
- Althaus, L.G., Serenelli, A.M., Córscico, A.H., & Montgomery, M.H., 2003, *A&A*, 404, 593
- Althaus, L.G., Serenelli, A.M., Panei, J.A., et al., 2005a, *A&A*, 435, 631
- Althaus, L.G., Miller Bertolami, M.M., Córscico, A.H., García-Berro, E., & Gil-Pons, P., 2005b, *A&A*, 440, L1
- Althaus, L.G., Serenelli, A.M., Panei, J.A., et al., 2005c, *A&A*, 435, 631
- Althaus, L.G., García-Berro, E., Isern, J., Córscico, A.H., & Rohrmann, R.D., 2007, *A&A*, 465, 249
- Althaus, L.G., García-Berro, E., Córscico, A.H., Miller Bertolami, M.M., & Romero, A.D., 2009a, *ApJL*, 693, L23
- Althaus, L.G., Córscico, A.H., Torres, S., & García-Berro, E., 2009b, *A&A*, 494, 1021
- Althaus, L.G., Panei, J.A., Romero, A.D., et al., 2009c, *A&A*, 502, 207
- Althaus, L.G., Panei, J.A., Miller Bertolami, M.M., et al., 2009d, *ApJ*, 704, 1605
- Althaus, L.G., Córscico, A.H., Isern, J., & García-Berro, E., 2010a, *A&A Review*, 18, 471
- Althaus, L.G., Córscico, A.H., Bischoff-Kim, A., Romero, A.D., Renedo, I., García-Berro, E. & Miller Bertolami, M.M., 2010b, *ApJ*, 717, 897
- Althaus, L.G., Córscico, A.H., Torres, S., et al., 2011, *A&A*, 527, A72

- Angulo, C., Arnould, M., Rayet, M., et al., 1999, *Nuclear Physics A*, 656, 3
- Arcoragi, J.-P., & Fontaine, G., 1980, *ApJ*, 242, 1208
- Baglin, A., & Schatzman, E., 1969, *Low-Luminosity Stars*, 385
- Barlow, B.N., Dunlap, B.H., Rosen, R., & Clemens, J.C., 2008, *ApJL*, 688, L95
- Beauchamp, A., Wesemael, F., Bergeron, P., et al., 1999, *ApJ*, 516, 887
- Benvenuto, O.G., 1988, *Tesis Doctoral*
- Benvenuto, O.G., Córscico, A.H., Althaus, L.G., & Serenelli, A.M. 2002a, *MNRAS*, 335, 480
- Benvenuto, O.G., Córscico, A.H., Althaus, L.G., & Serenelli, A.M., 2002b, *MNRAS*, 332, 399
- Benvenuto, O.G., García-Berro, E., & Isern, J., 2004, *Phys. Rev. D*, 69, 082002
- Bergeron, P., Fontaine, G., Brassard, P., et al., 1993, *AJ*, 106, 1987
- Bergeron, P., Wesemael, F., Lamontagne, R., et al., 1995a, *ApJ*, 449, 258
- Bergeron, P., Wesemael, F., & Beauchamp, A., 1995b, *PASP*, 107, 1047
- Bergeron, P., Leggett, S.K., & Ruiz, M.T., 2001, *ApJS*, 133, 413
- Bergeron, P., Fontaine, G., Billères, M., Boudreault, S., & Green, E.M., 2004, *ApJ*, 600, 404
- Bischoff-Kim, A., Montgomery, M.H., & Winget, D.E., 2008a, *ApJ*, 675, 1505
- Bischoff-Kim, A., Montgomery, M.H., & Winget, D.E., 2008b, *ApJ*, 675, 1512
- Bischoff-Kim, A., 2009, *American Institute of Physics Conference Series*, 1170, 621
- Bischoff-Kim, A., & Østensen, R.H., 2011, *ApJL*, 742, L16
- Blöcker, T., 2001, *Ap&SS*, 275, 1
- Bond, H.E., Grauer, A.D., Green, R.F., & Liebert, J.W., 1984, *ApJ*, 279, 751
- Bognár, Z., Páparó, M., Bradley, P.A., & Bischoff-Kim, A., 2009, *MNRAS*, 399, 1954
- Bognár, Z., & Páparó, M., 2010, *American Institute of Physics Conference Series*, 1273, 504
- Bradley, P.A., Winget, D.E., & Wood, M.A., 1993, *ApJ*, 406, 661
- Bradley, P.A., 1993, *Ph.D.Thesis*,
- Bradley, P.A., & Winget, D.E., 1994, *ApJ*, 430, 850

- Bradley, P.A., 1995, *Baltic Astronomy*, 4, 536
- Bradley, P.A., 1996, *ApJ*, 468, 350
- Bradley, P., & Kleinman, S.J., 1997, *White dwarfs*, 214, 445
- Bradley, P.A., 1998, *ApJS*, 116, 307
- Bradley, P.A., 2001, *ApJ*, 552, 326
- Bradley, P.A., 2006, *Merorie della Societa Astronomica Italiana*, 77, 437
- Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., Kawaler, S.D., & Tassoul, M., 1991, *ApJ*, 367, 601
- Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., & Hansen, C.J., 1992a, *ApJS*, 80, 369
- Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., & Tassoul, M., 1992b, *ApJS*, 81, 747
- Brickhill, A.J., 1991, *MNRAS*, 251, 673
- Brickhill, A.J., 1992, *MNRAS*, 259, 519
- Burgers, J.M., 1969, *Flow Equations for Composite Gases*, New York: Academic Press, 1969,
- Cassisi, S., Potekhin, A.Y., Pietrinferni, A., Catelan, M., & Salaris, M., 2007, *ApJ*, 661, 1094
- Castanheira, B.G., Kepler, S.O., Moskalik, P., et al., 2004, *A&A*, 413, 623
- Castanheira, B.G., Kepler, S.O., Handler, G., & Koester, D., 2006, *A&A*, 450, 331
- Castanheira, B.G., Kepler, S.O., Costa, A.F.M., et al., 2007, *A&A*, 462, 989
- Castanheira, B.G., 2007, PhD Thesis
- Castanheira, B.G., & Kepler, S.O., 2008, *MNRAS*, 385, 430
- Castanheira, B.G., & Kepler, S.O., 2009, *MNRAS*, 396, 1709
- Castanheira, B.G., Kepler, S.O., Kleinman, S.J., Nitta, A., & Fraga, L., 2010, *MNRAS*, 405, 2561
- Catalán, S., Isern, J., García-Berro, E., & Ribas, I., 2008, *MNRAS*, 387, 1693
- Caughlan, G.R., Fowler, W.A., Harris, M.J., & Zimmerman, B.A., 1985, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 32, 197
- Christensen-Dalsgaard, J., Arentoft, T., Brown, T.M., et al., 2009, *Communications in Asteroseismology*, 158, 328
- Clemens, J.C., 1993, *Baltic Astronomy*, 2, 407

- Clemens, J.C., van Kerkwijk, M.H., & Wu, Y., 2000, MNRAS, 314, 220
- Córsico, A. H., Benvenuto, O. G., Althaus, L. G., Isern, J., & García-Berro, E. 2001, *New Astronomy*, 6, 197
- Córsico, A.H., & Benvenuto, O.G., 2002, *Astrophysics and Space Science*, 279, 281
- Córsico, A.H., Benvenuto, O.G., Althaus, L.G., & Serenelli, A.M., 2002a, MNRAS, 332, 392
- Córsico, A.H., Althaus, L.G., Benvenuto, O.G., & Serenelli, A.M., 2002b, *A & A*, 387, 531
- Córsico, A. H., 2003, Tesis Doctoral, UNLP: *Pulsaciones en estrellas enanas blancas variables ZZ Ceti*
- Córsico, A. H., García-Berro, E., Althaus, L.G., & Isern, J., 2004, *A&A*, 427, 923
- Córsico, A.H., Althaus, L.G., Montgomery, M.H., & García-Berro, E., 2005, 14th European Workshop on White Dwarfs, 334, 537
- Córsico, A.H., Althaus, L.G., & Miller Bertolami, M.M. 2006, *A&A*, 458, 259
- Córsico, A.H., & Althaus, L.G., 2006, *A&A*, 454, 863
- Córsico, A.H., Althaus, L.G., Miller Bertolami, M.M., & Werner, K., 2007a, *A & A*, 461, 1095
- Córsico, A. H., Miller Bertolami, M.M., Althaus, L.G., Vauclair, G., & Werner, K., 2007b, *A & A*, 475, 619
- Córsico, A.H., Althaus, L.G., Kepler, S.O., Costa, J. E.S., & Miller Bertolami, M.M., 2008, *A & A*, 478, 869
- Córsico, A.H., Althaus, L.G., Miller Bertolami, M.M., & García-Berro, E. 2009a, *Journal of Physics Conference Series*, 172, 012075
- Córsico, A.H., Althaus, L.G., Miller Bertolami, M.M., & García-Berro, E. 2009b, *A&A*, 499, 257
- Córsico, A.H., Romero, A.D., Althaus, L.G., & García-Berro, E. 2009c, *A&A*, 506, 835
- Córsico, A.H., Althaus, L.G., Romero, A.D., et al., 2011a, arXiv:1108.3541
- Córsico, A.H., Althaus, L.G., Miller Bertolami, M.M., & Bischoff-Kim, A., 2011b, arXiv:1112.5882
- Córsico, A.H., Romero, A.D., Althaus, L.G., & Miller Bertolami, M. M. 2011c, arXiv:1112.4805
- Costa, J.E.S., & Kepler, S.O., 2008, *A&A*, 489, 1225

- Cox, J. P.: 1980, *Theory of Stellar Pulsation* Princeton University Press, Princeton
- Cowling, T.G., 1941, MNRAS, 101, 367
- Cowling, T.G., & Newing, R.A. 1949, ApJ, 109, 149
- Diaz-Pinto, A., Garcia-Berro, E., Hernanz, M., Isern, J., & Mochkovitch, R., 1994, A&A, 282, 86
- Dolez, N., & Vauclair, G., 1981, A&A, 102, 375
- Dufour, P., Liebert, J., Fontaine, G., & Behara, N. 2007, NATURE, 450, 522
- Dufour, P., Fontaine, G., Liebert, J., Schmidt, G.D., & Behara, N. 2008a, ApJ, 683, 978
- Dufour, P., Fontaine, G., Liebert, J., Williams, K., & Lai, D.K., 2008b, ApJL, 683, L167
- Dufour, P., Green, E.M., Fontaine, G., et al., 2009b, ApJ, 703, 240
- Dufour, P., Fontaine, G., Bergeron, P., et al., 2010, American Institute of Physics Conference Series, 1273, 64
- Dufour, P., Béland, S., Fontaine, G., Chayer, P., & Bergeron, P., 2011, ApJL, 733, L19
- Dunlap, B.H., Barlow, B.N., & Clemens, J.C., 2010, ApJL, 720, L159
- Dziembowski, W., 1977, Acta Astron., 27, 203
- Dziembowski, W., & Koester, D., 1981, A&A, 97, 16
- Eisenstein, D. J., Liebert, J., Harris, H. C., et al. 2006, ApJS, 167, 40
- Falcon, R.E., Winget, D.E., Montgomery, M.H., & Williams, K.A., 2010, ApJ, 712, 585
- Faulkner, J., & Gribbin, J.R., 1968, Nature, 218, 734
- Fontaine, G., Brassard, P., Bergeron, P., & Wesemael, F., 1992, ApJL, 399, L91
- Fontaine, G., Brassard, P., & Charpinet, S. 2003a, ApS&S, 284, 257
- Fontaine, G., Bergeron, P., Billères, M., & Charpinet, S., 2003b, ApJ, 591, 1184
- Fontaine, G., & Brassard, P., 2008, Pub. Astron. Soc. Pas, 120, 1043
- Fontaine, G., Brassard, P., & Dufour, P., 2008, A&A, 483, L1
- Fontaine, G., Brassard, P., Dufour, P., Green, E.M., & Liebert, J., 2009, Journal of Physics Conference Series, 172, 012066

- García-Berro, E., Hernanz, M., Mochkovitch, R., & Isern, J., 1988, *A&A*, 193, 141
- García-Berro, E., Hernanz, M., Isern, J., & Mochkovitch, R. 1988, *NATURE*, 333, 642
- García-Berro, E., Hernanz, M., Isern, J., & Mochkovitch, R., 1995, *MNRAS*, 277, 801
- García-Berro, E., Torres, S., Althaus, L.G., et al., 2010, *NATURE*, 465, 194
- Gautschy, A., 1997, *Vistas in Astronomy*, 41, 95
- Gautschy, A., 1997b, *A&A*, 320, 811
- Gautschy, A., Althaus, L.G., & Saio, H., 2005, *A&A*, 438, 1013
- Gianninas, A., Bergeron, P., & Fontaine, G., 2005, *ApJ*, 631, 1100
- Gianninas, A., Bergeron, P., & Fontaine, G., 2006, *Astron. J.*, 132, 831
- Goldreich, P., & Wu, Y., 1999, *ApJ*, 511, 904
- Grauer, A.D., & Bond, H.E., 1984, *ApJ*, 277, 211
- Guerrero, J., García-Berro, E., & Isern, J., 2004, *A&A*, 413, 257
- Haft, M., Raffelt, G., & Weiss, A., 1994, *ApJ*, 425, 222
- Handler, G., O'Donoghue, D., Müller, M., et al., 2003, *MNRAS*, 340, 1031
- Hansen, B.M.S., Brewer, J., Fahlman, G.G., et al., 2002, *ApJL*, 574, L155
- Hansen, B. M. S., & Liebert, J., 2003, *A&A Annual Review*, 41, 465
- Hansen, B. M. S., Anderson, J., Brewer, J., et al., 2007, *ApJ*, 671, 380
- Harper, R.V.R., & Rose, W.K., 1970, *ApJ*, 162, 963
- Hermes, J.J., Mullally, F., Østensen, R.H., et al., 2011, *ApJL*, 741, L16
- Hernanz, M., García-Berro, E., Isern, J., et al., 1994, *ApJ*, 434, 652
- Herwig, F., Bloeker, T., Schoenberner, D., & El Eid, M., 1997, *A&A*, 324, L81
- Herwig, F., Blöcker, T., Langer, N., & Driebe, T., 1999, *A&A*, 349, L5
- Holberg, J.B., Bergeron, P., & Gianninas, A., 2008, *AJ*, 135, 1239
- Homeier, D., Koester, D., Hagen, H.-J., et al., 1998, *A&A*, 338, 563
- Iglesias, C.A., & Rogers, F.J., 1996, *ApJ*, 464, 943
- Isern, J., Hernanz, M., & García-Berro, E., 1992, *ApJL*, 392, L23

- Isern, J., Mochkovitch, R., García-Berro, E., & Hernanz, M., 1997, *ApJ*, 485, 308
- Isern, J., García-Berro, E., Hernanz, M., & Chabrier, G., 2000, *ApJ*, 528, 397
- Isern, J., García-Berro, E., Althaus, L.G., & Córscico, A.H., 2010, *A&A*, 512, A86
- Itoh, N., Hayashi, H., Nishikawa, A., & Kohyama, Y., 1996, *ApJS*, 102, 411
- Jones, P.W., Hansen, C.J., Pesnell, W.D., & Kawaler, S.D. 1989, *ApJ*, 336, 403
- Kanaan, A., Nitta, A., Winget, D.E., et al., 2005, *A&A*, 432, 219
- Kawaler, S.D., & Bradley, P.A., 1994, *ApJ*, 427, 415
- Kawaler, S.D., O'Brien, M.S., Clemens, J.C., et al., 1995, *ApJ*, 450, 350
- Kepler, S.O., Robinson, E.L., & Nather, R.E., 1983, *ApJ*, 271, 744
- Kepler, S.O., Nather, R.E., McGraw, J.T., & Robinson, E.L., 1982, *ApJ*, 254, 676
- Kepler, S.O., Giovannini, O., Wood, M.A., et al., 1995, *ApJ*, 447, 874
- Kepler, S.O., Robinson, E.L., Koester, D., et al., 2000, *ApJ*, 539, 379
- Kepler, S.O., Costa, J.E.S., Castanheira, B.G., et al. 2005a, *ApJ*, 634, 1311
- Kepler, S.O., Castanheira, B.G., Saraiva, M.F.O., et al., 2005b, *A&A*, 442, 629
- Kepler, S.O., Kleinman, S.J., Nitta, A., et al., 2007, *MNRAS*, 375, 1315
- Kepler, S.O., Kleinman, S.J., Pelisoli, I., et al., 2010, *American Institute of Physics Conference Series*, 1273, 19
- Kilkenny, D., O'Donoghue, D., Crause, L.A., Hambly, N., & MacGillivray, H., 2009, *MNRAS*, 397, 453
- Kippenhahn, R., Weigert, A., and Hofmeister, E., 1967, *Methods in Computational Physics*, 6, 129
- Kippenhahn, R., & Weigert, A., 1994, *Stellar Structure and Evolution*, XVI, 468 pp.192 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also *Astronomy and Astrophysics Library*,
- Kleinman, S.J., Nather, R.E., Winget, D.E., et al., 1998, *ApJ*, 495, 424
- Kleinman, S.J., 2010, *American Institute of Physics Conference Series*, 1273, 156
- Koester, D., & Allard, N.F., 2000, *Baltic Astronomy*, 9, 119
- Koester, D., & Holberg, J.B., 2001, *12th European Workshop on White Dwarfs*, 226, 299
- Koesterke, L., Dreizler, S., & Rauch, T., 1998, *A&A*, 330, 1041

- Kotak, R., van Kerkwijk, M.H., & Clemens, J.C., 2004, A&A, 413, 301
- Kotak, R., van Kerkwijk, M.H., & Clemens, J.C., 2002, A&A, 388, 219
- Kotak, R., van Kerkwijk, M.H., Clemens, J.C., & Koester, D., 2003, A&A, 397, 1043
- Kotak, R., van Kerkwijk, M.H., & Clemens, J.C., 2004, A&A, 413, 301
- Kunz, R., Fey, M., Jaeger, M., et al., 2002, ApJ, 567, 643
- Landolt, A. U., 1968, ApJ, 153, 151
- Ledoux, P., 1951, ApJ, 114, 373
- Lorén-Aguilar, P., Isern, J., & García-Berro, E., 2009, A&A, 500, 1193
- Lugaro, M., Herwig, F., Lattanzio, J.C., Gallino, R., & Straniero, O., 2003, ApJ, 586, 1305
- Magni, G., & Mazzitelli, I., 1979, A& A, 72, 134
- McGraw, J. T., 1977, PhD. Thesis, Univ. Texas at Austin
- McGraw, J.T., 1979, ApJ, 229, 203
- McGraw, J.T., Liebert, J., Starrfield, S.G., & Green, R., 1979, IAU Colloq. 53: White Dwarfs and Variable Degenerate Stars, 377
- Metcalf, T.S., Nather, R.E., & Winget, D.E., 2000, ApJ, 545, 974
- Metcalf, T.S., Winget, D.E., & Charbonneau, P., 2001, ApJ, 557, 1021
- Metcalf, T.S., Salaris, M., & Winget, D.E., 2002, ApJ, 573, 803
- Metcalf, T.S., Montgomery, M.H., & Kawaler, S.D., 2003, MNRAS, 344, L88
- Metcalf, T.S., Montgomery, M.H., & Kanaan, A., 2004, ApJL, 605, L133
- Metcalf, T.S., 2007, Communications in Asteroseismology, 150, 227
- Miller Bertolami, M.M., Alhaus, L.G., & Córscico, A.H., 2005, Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata Argentina, 48, 185
- Miller Bertolami, M.M., & Alhaus, L.G. 2006, A&A, 454, 845
- Miller Bertolami, M.M., Alhaus, L.G., Unglaub, K., & Weiss, A., 2008, A&A, 491, 253
- Miller Bertolami, 2009, Tesis Doctoral, UNLP: *Formación de estrellas deficientes en hidrógeno por medio de flashes tardíos de helio*
- Miller Bertolami, M.M., Córscico, A.H., & Alhaus, L.G., 2011, arXiv:1111.2335

- Montgomery, M.H., & Winget, D.E., 1999, ApJ, 526, 976
- Montgomery, M.H. 2005a, ApJ, 633, 1142
- Montgomery, M.H., 2005b, 14th European Workshop on White Dwarfs, 334, 553
- Montgomery, M.H., 2007, 15th European Workshop on White Dwarfs, 372, 635
- Montgomery, M.H., Williams, K.A., Winget, D.E., et al., 2008, ApJL, 678, L51
- Mukadam, A.S., Mullally, F., Nather, R.E., et al., 2004, ApJ, 607, 982
- Mukadam, A.S., Montgomery, M.H., Winget, D.E., Kepler, S.O., & Clemens, J.C., 2006, ApJ, 640, 956
- Mullally, F., Thompson, S.E., Castanheira, B.G., et al., 2005, ApJ, 625, 966
- Mullally, F., Winget, D.E., De Gennaro, S., et al., 2008, ApJ, 676, 573
- Nather, R.E., Winget, D.E., Clemens, J.C., Hansen, C.J., & Hine, B.P., 1990, ApJ, 361, 309
- Nitta, A., Kleinman, S.J., Krzesinski, J., et al., 2009, ApJ, 690, 560
- Østensen, R.H., Bloemen, S., Vučković, M., et al., 2011, ApJL, 736, L39
- Ostriker, J.P., & Tassoul, J.-L., 1968, Nature, 219, 577
- Pakštienė, E., Solheim, J.-E., Handler, G., et al., 2011, MNRAS, 415, 1322
- Pech, D., & Vauclair, G., 2006, A & A, 453, 219
- Pech, D., Vauclair, G., & Dolez, N., 2006, A&A, 446, 223
- Pfeiffer, B., Vauclair, G., Dolez, N., et al., 1996, A & A, 314, 182
- Prada Moroni, P.G., & Straniero, O., 2002, ApJ, 581, 585
- Quirion, P.-O., Fontaine, G., & Brassard, P., 2004, ApJ, 610, 436
- Quirion, P.-O., Fontaine, G., & Brassard, P., 2007, ApJS, 171, 219
- Renedo, I., Althaus, L.G., Miller Bertolami, M.M., et al., 2010, ApJ, 717, 183
- Richer, H. B., Fahlman, G. G., Ibata, R. A., et al., 1997, ApJ, 484, 741
- Ritossa, C., García-Berro, E., & Iben, I., Jr., 1999, ApJ, 515, 381
- Robinson, E.L., Kepler, S.O., & Nather, R.E., 1982, ApJ, 259, 219
- Robinson, E.L., Mailloux, T.M., Zhang, E., et al., 1995, ApJ, 438, 908
- Romero, A. D, 2007, Tesis de Licenciatura, UBA: *Propiedades evolutivas y pulsacionales de estrellas sub-enanas B*

- Romero, A.D., Córscico, A.H., Althaus, L.G., et al., 2012, MNRAS, 420, 1462
- Saio, H., Winget, D.E., & Robinson, E.L., 1983, ApJ, 265, 982
- Saio, H., 1996, Hydrogen Deficient Stars, 96, 361
- Salaris, M., Dominguez, I., Garcia-Berro, E., et al., 1997, ApJ, 486, 413
- Salaris, M., García-Berro, E., Hernanz, M., Isern, J., & Saumon, D., 2000, ApJ, 544, 1036
- Salaris, M., Serenelli, A., Weiss, A., & Miller Bertolami, M., 2009, ApJ, 692, 1013
- Sarna, M.J., Antipova, J., & Ergma, E. 1999, 11th European Workshop on White Dwarfs, 169, 400
- Serenelli, A. M., 2002, Tesis Doctoral, UNLP: *Evolución de enanas blancas de masas baja e intermedia*
- Schröder, K.-P., & Cuntz, M., 2005, ApJL, 630, L73
- Segretain, L., & Chabrier, G., 1993, A & A, 271, L13
- Segretain, L., Chabrier, G., Hernanz, M., et al., 1994, ApJ, 434, 641
- Siess, L., 2007, A&A, 476, 893
- Silvotti, R., Voss, B., Bruni, I., et al., 2005, A&A, 443, 195
- Silvotti, R., Fontaine, G., Pavlov, M., et al., 2007, 15th European Workshop on White Dwarfs, 372, 593
- Starrfield, S.G., Cox, A.N., Hodson, S.W., & Pesnell, W.D., 1983, ApJL, 268, L27
- Straniero, O., Domínguez, I., Imbriani, G., & Piersanti, L., 2003, ApJ, 583, 878
- Tassoul, M., & Tassoul, J.L., 1968, ApJ, 153, 127
- Tassoul, M.: 1980, *The Astrophysical Journal Supplement Series* , 43, 469
- Tassoul, M., Fontaine, G., & Winget, D.E., 1990, ApJS, 72, 335
- Thompson, S.E., van Kerkwijk, M.H., & Clemens, J.C., 2008, MNRAS, 389, 93
- Thompson, S.E., Provençal, J.L., Kanaan, A., et al., 2009, Journal of Physics Conference Series, 172, 012067
- Torres, S., García-Berro, E., Burkert, A., & Isern, J., 2002, MNRAS, 336, 971
- Tremblay, P.-E., & Bergeron, P., 2008, ApJ, 672, 1144
- Tremblay, P.-E., Bergeron, P., & Gianninas, A., 2011, ApJ, 730, 128

- Unglaub, K., & Bues, I., 2000, *A&A*, 359, 1042
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H. and Shibahashi, H.:1989, *Nonradial Oscillation in Stars* University of Tokyo Press 2nd. ed.
- van Altena, W.F., Lee, J.T., & Hoffleit, E.D., 1994, *Galactic and Solar System Optical Astrometry*, 50
- van Kerkwijk, M.H., Clemens, J.C., & Wu, Y., 2000, *MNRAS*, 314, 209
- Vassiliadis, E., & Wood, P.R., 1993, *ApJ*, 413, 641
- Vauclair, G., 1971, *ApLetter*, 9, 161
- Vauclair, G., Dolez, N., Fu, J.-N., et al., 2000, *A&A*, 355, 291
- von Hippel, T., & Gilmore, G. 2000, *AJ*, 120, 1384
- von Hippel, T., Jefferys, W. H., Scott, J., et al., 2006, *ApJ*, 645, 1436
- Voss, B., Koester, D., Østensen, R., et al., 2006, *A&A*, 450, 1061
- Voss, B., Koester, D., Napiwotzki, R., Christlieb, N., & Reimers, D., 2007, *A&A*, 470, 1079
- Vuille, F., 1998, Ph.D. Thesis,
- Weiss, A., & Ferguson, J.W., 2009, *A&A*, 508, 1343
- Werner, K., & Herwig, F., 2006, *Pub. Astron. Soc. Pas*, 118, 183
- Winget, D.E., Hansen, C.J., Liebert, J., et al., 1987, *ApJL*, 315, L77
- Winget, D.E., van Horn, H.M., & Hansen, C.J., 1981, *ApJL*, 245, L33
- Winget, D.E., van Horn, H. M., Tassoul, M., et al., 1982a, *ApJL*, 252, L65
- Winget, D.E., Robinson, E.L., Nather, R.D., & Fontaine, G., 1982b, *ApJL*, 262, L11
- Winget, D.E., 1988, *Advances in Helio- and Asteroseismology*, 123, 305
- Winget, D.E., Nather, R.E., Clemens, J.C., et al., 1991, *ApJ*, 378, 326
- Winget, D.E., Nather, R.E., Clemens, J.C., et al., 1994, *ApJ*, 430, 839
- Winget, D.E., & Kepler, S.O., 2008, *Anu. Rev. Astron, Astrophys*, 46, 157
- Wood, M.A., 1990, Ph.D.Thesis,
- Wood, M. A., 1992, *ApJ*, 386, 539
- Wu, Y., 2001, *MNRAS*, 323, 248
- Yeates, C.M., Clemens, J.C., Thompson, S.E., & Mullally, F., 2005, *ApJ*, 635, 1239

York, D.G., Adelman, J., Anderson, J.E., Jr., et al., 2000, AJ, 120, 1579

Zhang, E.-H., Robinson, E.L., & Nather, R.E., 1986, ApJ, 305, 740