

**Tesis de Licenciatura**

**PULSACIONES DE ESTRELLAS DE BAJA MASA EN  
LA SECUENCIA PRINCIPAL.**



**Julieta Paz Sánchez Arias**

**Director: Dr. Alejandro H. Córscico**

**CoDirector: Dr. Leandro G. Althaus**

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Universidad Nacional de La Plata

La Plata, Junio de 2013

# ÍNDICE GENERAL

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Evolución Estelar y Pulsaciones</b>                    | <b>1</b>  |
| 1.1. Evolución estelar                                       | 1         |
| 1.1.1. Formación y pre-Secuencia                             | 1         |
| 1.1.2. Secuencia Principal                                   | 2         |
| 1.1.3. Evolución post-Secuencia Principal                    | 4         |
| 1.2. Pulsaciones   | 8         |
| 1.2.1. Modos de presión y modos de gravedad                  | 10        |
| 1.3. Clases de estrellas pulsantes                           | 14        |
| 1.3.1. Estrellas variables $\delta$ Scuti y $\gamma$ Doradus | 17        |
| 1.3.2. Motivación de esta tesis                              | 21        |
| <b>2. Códigos Numéricos</b>                                  | <b>24</b> |
| 2.1. Generalidades del código evolutivo                      | 24        |
| 2.2. Código de pulsaciones                                   | 27        |
| <b>3. Simulaciones</b>                                       | <b>32</b> |
| 3.1. Modos de gravedad                                       | 40        |
| 3.1.1. Energía cinética y autofunciones                      | 43        |
| 3.1.2. Función peso  | 48        |
| 3.2. Modos de presión  | 50        |
| 3.2.1. Energía cinética y autofunciones                      | 53        |
| 3.2.2. Función peso  | 56        |
| 3.2.3. Evolución temporal de los períodos de pulsación       | 57        |
| 3.3. Influencia de la masa estelar                           | 59        |
| 3.3.1. Modos de gravedad                                     | 59        |
| 3.3.2. Modos de presión                                      | 65        |

|   |           |
|---|-----------|
| 3.4. Fenómeno de overshooting . . . . . | 65        |
| 3.4.1. Modos de gravedad . . . . .      | 68        |
| 3.4.2. Modos de presión . . . . .       | 73        |
| <b>4. Conclusiones</b>                  | <b>76</b> |

# CAPÍTULO 1

## EVOLUCIÓN ESTELAR Y PULSACIONES

### 1.1. Evolución estelar

#### 1.1.1. Formación y pre-Secuencia

La formación estelar comienza con el colapso gravitatorio de una nube masiva de gas y polvo en la cual la temperatura y la densidad están en aumento. La principal fuente de energía que permite este aumento de temperatura en la nube es la energía gravitatoria.

A medida que continúa el colapso, aumenta la cantidad de energía gravitacional liberada, y puesto que la energía irradiada no puede filtrarse a través de la masa de polvo opaco, la nube colapsante aumenta su temperatura sublimando partículas sólidas e ionizando rápidamente los átomos, formando así una proto-estrella.

La proto-estrella continúa colapsando, aumentando su densidad y temperatura central hasta que alcanza en su interior el equilibrio hidrostático. El aumento de temperatura y densidad favorece la convección en la superficie de este objeto que se propaga luego hasta el interior, formándose un objeto completamente convectivo. En el diagrama Hertzsprung-Russell (H-R) estos objetos se ubican sobre una línea denominada línea de Hayashi. En la región ubicada a la derecha de esta línea en el diagrama H-R se encuentra la zona denominada “prohibida” en donde no es posible encontrar objetos en equilibrio hidrostático.

Durante la etapa evolutiva de pre-Secuencia, una parte importante de la energía irradiada por la estrella es extraída de la energía gravitatoria. En esta etapa la temperatura superficial de la estrella se mantiene aproximadamente

constante, sin embargo su temperatura interna aumentará mientras que la luminosidad irá disminuyendo. El objeto seguirá comprimiéndose, hasta que la temperatura central alcance valores propicios para la disminución de la opacidad interna. Esto provocará que el interior más profundo de la estrella deje de ser convectivo y de esta manera salga de la línea de Hayashi.

Durante el colapso la proto-estrella alcanza un máximo de temperatura. Si esta temperatura es menor a  $8,6 \times 10^6 K$ , entonces no se produce la ignición del hidrógeno y nunca será una estrella estable de la Secuencia Principal. Existe una masa mínima a partir de la cual el objeto alcanza estas temperaturas, permitiendo la quema de hidrógeno, esta masa es  $M_c = 0,08M_\odot$ . Si la masa del objeto se ubica entre  $0,015M_\odot$  y  $0,08M_\odot$ , no se alcanza la ignición del hidrógeno en el núcleo de forma estable y se denomina enana marrón. Estos objetos continuarán su evolución enfriándose muy lentamente y contrayéndose hasta llegar al equilibrio. Si la masa es menor a  $0,015M_\odot$ , no existe ningún tipo de reacciones y el objeto entra en la categoría de planeta.

Antes de alcanzar la Secuencia Principal, se produce un reajuste de abundancias, debido a la gran cantidad de carbono presente en el material interestelar, mediante la reacción:



Luego de este reajuste, la estrella llega a la ZAMS con abundancias en equilibrio. El tiempo que tarda estos objetos en alcanzar la Secuencia Principal es del orden de  $10^6$  años. Para una estrella de  $5M_\odot$  demora  $5,7 \times 10^5$  años, mientras que un objeto de  $0,5M_\odot$  tarda en llegar  $155 \times 10^6$  años.

### 1.1.2. Secuencia Principal

Luego de la etapa de pre-Secuencia, la estrella se sitúa en la denominada ZAMS (Zero Age Main Sequence). En el diagrama H-R, la ZAMS es la envolvente izquierda de la Secuencia Principal y se representa con una "línea". Durante la ZAMS las estrellas se consideran químicamente homogéneas y en equilibrio térmico e hidrostático. Una estrella entra en la Secuencia Principal cuando comienza la quema estable de hidrógeno en el núcleo. Es la etapa más larga de la evolución estelar.

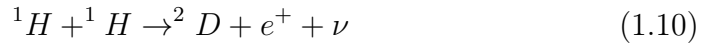
Si la estrella posee una masa superior a  $1,2M_\odot$  comenzará esta etapa quemando hidrógeno mediante el ciclo CNO. Si en cambio, su masa es menor a  $1,2M_\odot$  lo hará mediante el ciclo PP. En general ambos ciclos ocurren simultáneamente, pero uno predomina sobre el otro.

El ciclo CNO consiste en transformar 4 núcleos de hidrógeno en uno de helio, usando como catalizadores al carbono, nitrógeno y oxígeno mediante las siguientes reacciones:

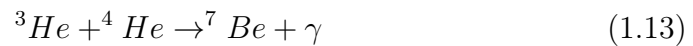


Este ciclo tiene una dependencia muy fuerte con la temperatura y en general se enciende a una temperatura cercana a los  $16 \times 10^6 K$  y se vuelve más efectivo alrededor de los  $30 - 40 \times 10^6 K$ .

Existen tres caminos posibles para el ciclo PP, el ciclo PPI, PPII y PPIII. El ciclo PPI involucra las siguientes reacciones:



En el ciclo PPII, en lugar de que ocurra la reacción  $^3\text{He} + ^3\text{He}$ , el  $^3\text{He}$  reacciona con un  $^4\text{He}$  dando lugar al siguiente ciclo:



Por último, si el  $^7\text{Be}$  reacciona con un protón en lugar de capturar un electrón, la cadena corresponde al ciclo PPIII y es la siguiente:



Como ya se mencionó, para estrellas con masa superior a  $1,2M_\odot$  la mayor fuente de energía proviene del ciclo CNO.

Otra diferencia significativa para estrellas de distintas masas es su estructura interna. Si la estrella tiene una masa mayor a  $1,2M_\odot$  presentará

un núcleo convectivo con una envoltura radiativa. En cambio, si la masa es menor tendrá un interior radiativo con una envoltura convectiva, para metalicidades del tipo solar. En las envolturas la convección aparece debido a la alta opacidad del medio. En el interior la convección ocurre porque la radiación no es capaz de transportar toda la energía que genera el ciclo CNO (este ciclo tiene una dependencia muy fuerte con la temperatura).

El tiempo de permanencia de una estrella en la Secuencia Principal está determinado principalmente por su masa. Estrellas muy masivas completan su estadía en la Secuencia Principal en tiempos más cortos que las menos masivas. Una estrella de  $0,4M_{\odot}$  permanece alrededor de  $10^{11}$  años, mientras que una de  $50M_{\odot}$  cerca de  $6 \times 10^5$  años.

Durante la evolución posterior a la ZAMS, la estrella deja de ser “estática” ya que la quema de hidrógeno en helio conduce a una evolución química del objeto. La composición química no se mantiene homogénea en el tiempo y se desarrollan inhomogeneidades, este hecho permite la evolución estelar.

### 1.1.3. Evolución post-Secuencia Principal

El parámetro principal que determina la evolución subsecuente es la masa de la estrella. Se dice que una estrella es masiva cuando su masa es mayor a  $10M_{\odot}$ . Las estrellas con masa entre  $2,3M_{\odot}$  y  $9-11M_{\odot}$  se denominan estrellas de masa intermedia y las de baja masa son aquellas entre  $0,08M_{\odot}$  y  $2,3M_{\odot}$ . La degeneración electrónica en el núcleo luego de la quema de hidrógeno determina esta clasificación. Describiremos brevemente la evolución de estrellas con masa intermedia y baja en esta etapa.

**Estrellas de Masa Intermedia:** Luego de la Secuencia Principal, la estructura de estrellas con masa intermedia es la siguiente: presentan un núcleo de helio inerte, una delgada capa (shell) en la cual se quema hidrógeno en helio y una envoltura rica en hidrógeno y helio.

Un núcleo de helio que no presente degeneración colapsará si su masa es mayor al 10% de la masa estelar. Esto ocurre para estrellas con masa estelar mayor a  $2,3M_{\odot}$ . En esta situación la temperatura central coincide con la temperatura del shell y toda la luminosidad de la estrella proviene de esta capa. A medida que el shell avanza y crea helio, la masa del núcleo irá en aumento hasta que en algún momento supere el límite del 10% de la masa estelar y finalmente colapse. Cuando colapsa lo hacen todas las capas por debajo del shell y la estrella se contrae aumentando su temperatura y liberando energía. Esta energía es utilizada por la estrella para expandir sus capas externas y convertirse en una gigante roja desplazándose hacia la Rama de Gigantes Rojas (Red Giant Branch-RGB).

Este colapso se detiene cuando la estrella alcanza temperaturas cercanas

a los  $80 \times 10^6 K$ , suficientes para comenzar con la quema de helio a través del ciclo Triple  $\alpha$  que consiste en las siguientes reacciones:



La etapa de la quema de helio dura un 20 % de la etapa de quema de hidrógeno y se encarga de estabilizar el colapso. Es importante destacar que cuando una estrella de masa intermedia enciende el helio, el gas de la parte interna no está degenerado o presenta una degeneración muy débil. Esto impide que se produzca de manera explosiva la combustión de helio, a diferencia de lo que ocurre con estrellas de baja masa.

Si la masa de la estrella es cercana a  $5M_\odot$  el recorrido evolutivo cruza varias veces, mediante lazos (llamados “loops” en la literatura científica), la llamada banda de inestabilidad en el diagrama H-R. El mecanismo que provoca la aparición de estos loops en la secuencia evolutiva de la estrella (también llamado “track”), es el mecanismo  $\kappa$ . Será detallado en la sección de pulsaciones pero adelantamos que este fenómeno explica la aparición de Cefeidas.

La configuración interna de la estrella luego de la ignición del helio está modelada por una estructura en capas. Presenta un núcleo rico en carbono y oxígeno envuelto por una capa que quema helio en carbono y oxígeno. En la región externa a esta capa hay helio inerte y rodeando esta zona hay una capa que quema hidrógeno en helio, por último una envoltura inerte de hidrógeno y helio. El 70 % exterior de la estrella es convectiva, esto permite que los elementos que estaban en la capa con helio en combustión, suban a la superficie pudiendo así detectarlos en el espectro.

Posteriormente, como ya mencionamos, la estrella se expande y avanza en el diagrama H-R, hacia una línea de Hayashi correspondiente a su masa, en la llamada Rama Asintótica de las Gigantes (Asymptotic Giant Branch-AGB). El material de la envoltura externa de la estrella posee una energía de ligadura cada vez menor a causa de esta expansión y por lo tanto todo tipo de perturbación puede favorecer la pérdida de masa.

Existe un límite para la masa del núcleo a partir del cual la estrella finalizará su evolución como una supernova. Este límite es  $1,4M_\odot$ . El núcleo de las estrellas con masas entre  $2,3M_\odot$  y  $8 - 9M_\odot$  no alcanza nunca este valor. La combustión de carbono en el núcleo, entonces, no se enciende por dos motivos: primero, por la fuerte degeneración que presenta el núcleo de carbono-oxígeno debido a las altas densidades y, segundo, a causa del enfriamiento del núcleo por la generación de neutrinos que escapan sin interactuar con el medio, removiendo energía térmica y actuando como refrigerantes.



Finalmente, estas estrellas, remueven casi toda su envoltura exterior dejando un núcleo de carbono y oxígeno compacto, altamente degenerado, con una masa cercana a  $0,65M_{\odot}$  (en el caso de que la masa inicial sea  $\approx 2,5M_{\odot}$ ) y un radio comparable al de la Tierra. Su temperatura superficial inicialmente es muy alta, cercana a los  $100000K$  pero se enfriará en forma gradual perdiendo energía térmica y convirtiéndose en una enana blanca. La materia eyectada alrededor de la estrella forma lo que se denomina una Nebulosa Planetaria que brilla por algunos miles de años como resultado de la fluorescencia causada por la radiación UV del objeto central antes de ser dispersada en el medio interestelar.

Las estrellas que poseen masas entre  $8 - 10M_{\odot}$  alcanzan la temperatura suficiente para la combustión de carbono en condiciones semi-degeneradas dando como resultado enanas blancas masivas con núcleos de oxígeno y neón.

**Estrellas de Baja Masa:** Veamos cual es el recorrido evolutivo de una estrella con masa inferior a  $2,3M_{\odot}$ , luego de la Secuencia Principal. La evolución de estas estrellas, es muy distinta a las demás, básicamente por dos motivos: su cercanía a la línea de Hayashi afecta su evolución y el núcleo de helio que queda cuando termina la quema de hidrógeno está muy próximo a degenerarse, retrasando la quema de helio.

Una vez que la estrella abandona la Secuencia Principal, comienza a ascender por la RGB aumentando la masa del núcleo a causa de la combustión de hidrógeno en helio de la capa delgada que lo rodea. Si la estrella no sufre una pérdida importante de masa, evolucionará alcanzando temperaturas del orden de  $10^8K$ . Estas temperaturas son alcanzadas cuando la masa del núcleo es aproximadamente  $0,45M_{\odot}$ . Bajo estas condiciones se inicia la combustión nuclear de helio mediante el proceso “Triple  $\alpha$ ”. La quema de helio en el núcleo degenerado es altamente inestable, la energía liberada de las reacciones nucleares produce un aumento no controlado de la temperatura y de la tasa de fusión del helio, resultando una desestabilización térmica denominada “flash” de helio. La luminosidad que se alcanza es del orden de  $10^{11}L_{\odot}$  y únicamente utiliza algunos minutos para producir cerca de  $1,5 \times 10^{49}$  erg de energía que es utilizada en gran parte para remover dicha degeneración electrónica.

El flash de helio no se produce en el centro de la estrella sino en una región o capa más externa, debido a la gran cantidad de neutrinos que se producen en el núcleo que actúan como refrigerantes. Esta degeneración del núcleo, como dijimos, es removida por el flash debido al aumento de presión y calor, regresando a su condición normal en la cual la presión sigue la ecuación de estado de un gas ideal.

Cuando la estrella comienza finalmente la fusión estable de helio, se asienta en la llamada ZAHB (Zero Age Horizontal Branch) que es el comienzo de la Rama Horizontal (Horizontal Branch-HB) del diagrama H-R. Esta etapa

de la evolución es lenta. La estructura interna de la estrella en la HB está formada por un núcleo convectivo de carbono-oxígeno, seguido por una capa de helio en combustión, otra de helio inerte, luego una envoltura con hidrógeno en fusión y por último una capa convectiva de hidrógeno y helio inertes. La masa del núcleo más la de la capa de helio en combustión que le sigue suman aproximadamente  $0,45M_{\odot}$ .

Se puede interpretar a la Rama Horizontal como una secuencia de objetos que poseen la misma masa de helio en el núcleo y por encima una envoltura con distintos valores de masa de hidrógeno. Su ubicación está dada por la metalicidad que presenten y por la masa. En las regiones de mayor temperatura efectiva se ubicarán las estrellas de baja masa y metalicidad.

La quema central de helio sobre la HB dura aproximadamente  $10^7$  años. Cuando finaliza esta combustión, la estrella comienza a subir por la AGB. Su evolución durante la AGB es rápida, dura alrededor de  $10^3 - 10^4$  años, esto permite la formación posterior de Nebulosas Planetarias. La estrella termina la etapa de la AGB cuando la masa de la envoltura es menor al 1% de la masa del núcleo.

Existen dos factores principales que determinan la evolución de una estrella de baja masa luego de la AGB. El primero es la interacción entre las fuentes de luminosidad de la capa de hidrógeno, helio y la liberación de energía gravitacional que llamaremos respectivamente  $L_H$ ,  $L_{He}$  y  $L_g$ . El segundo es la formación de zonas convectivas exteriores.

Para estrellas de baja masa, la formación de una envoltura extendida gigante está directamente relacionada con el crecimiento de  $L_H$  (Dorman et al., 1993). Si la masa de la envoltura es pequeña, también lo será  $L_H$  y la estrella no podrá convertirse en una gigante fría.

Cuando se agota el helio central y el núcleo se contrae, se enciende la combustión de helio en la capa. El orden de magnitud de  $L_g$ , que proviene de la contracción, es comparable al de  $L_H$ , mientras que  $L_{He} \approx 0$ . A medida que la evolución prosigue, la capa de helio aumenta su brillo y frena el aumento de  $L_H$ . Entonces,  $L_{He}$  aumenta bastante rápido y alcanza eventualmente valores de equilibrio nuclear, a partir de los cuales la evolución prosigue con escalas de tiempo nucleares y tanto  $L_g$  como  $L_H$  comienzan a aumentar nuevamente. Luego de establecida la fase de combustión de helio, ésta continúa durante 20 millones de años aproximadamente.

Para estrellas con envolturas masivas, la capa de hidrógeno en combustión que está en aumento, expande las capas exteriores alcanzando una configuración de gigante.

Para un rango intermedio de masas de envolturas, el aumento en  $L_{He}$  empuja el modelo hacia la línea de Hayashi. A medida que la combustión de hidrógeno reduce la masa de la envoltura,  $L_H$  disminuye y el modelo sigue el

comportamiento de una estrella post early AGB (Brocato et al., 1990)

Cuando finalmente la estrella llega a una temperatura efectiva cercana a  $10^5 K$  y la luminosidad proveniente de la combustión en capa del hidrógeno tiende a cero, la estrella evoluciona hacia una enana blanca (White Dwarf), con un núcleo de carbono y oxígeno y una envoltura muy delgada de hidrógeno. En general cuando la enana blanca es muy luminosa emite neutrinos, en cambio a bajas luminosidades presentan cristalización en el núcleo.

## 1.2. Pulsaciones

El fenómeno de pulsaciones estelares se manifiesta en el cambio de brillo periódico de una estrella. Una estrella variable pulsante es una estrella aislada que en algún momento de su evolución, sufre cambios periódicos en su volumen que pueden ser apreciados en su luminosidad y también en variaciones de sus líneas espectrales.

En términos cualitativos, se puede explicar el fenómeno de pulsaciones estelares como el resultado de aplicar una perturbación a estados de equilibrio. Sabemos que la mayor parte de la vida de una estrella está caracterizada por estados de equilibrio térmico e hidrostático. El equilibrio térmico se da cuando la pérdida de energía radiada desde su superficie se compensa con la energía nuclear que se genera en su interior. El equilibrio hidrostático cuando en cada punto de la estrella, la presión del gas mantiene el peso de las capas que están por encima de él. Entonces una perturbación en las ecuaciones que modelan a la estrella teniendo en cuenta estos estados, provocará el fenómeno de pulsaciones. Cuando se resuelven las ecuaciones, se pueden adoptar dos tipos de descripciones, la descripción Lagrangiana o la Euleriana. En la descripción Lagrangiana se considera al fluido formado por una gran cantidad de masas puntuales y se estudia el movimiento de los puntos individuales de masa. En la descripción Euleriana, todas las propiedades físicas del fluido, como la velocidad, la presión, la masa, la densidad, son consideradas campos; es decir, funciones que dependen de la posición y el tiempo.

Según el origen de esta perturbación, se pueden caracterizar a las pulsaciones en dos tipos: forzadas y autoexcitadas. En las forzadas la acción de una fuerza externa es necesaria para que se produzca el fenómeno, como ocurre generalmente en el caso de las estrellas pulsantes que se observan en sistemas binarios. En las pulsaciones autoexcitadas, mediante mecanismos de excitación, la energía de radiación se convierte en energía cinética de oscilación, lo cual permite aumentar su amplitud naturalmente a partir de perturbaciones, que luego pueden ser percibidas en un movimiento macroscópico, observable desde la Tierra.

En este trabajo se estudiarán por primera vez las pulsaciones adiabáticas no-radiales de estrellas de baja masa situadas en la Secuencia Principal (MS) y saliendo de la misma (Post-MS) empleando los códigos detallados de evolución estelar y pulsaciones estelares desarrollados por el Grupo de Evolución Estelar y Pulsaciones de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata.

Las pulsaciones no-radiales se producen cuando la estrella oscila de tal manera que se desvía de su forma esférica y un desplazamiento de masa de la estrella puede tener una dirección arbitraria. En cambio en las pulsaciones radiales, la estrella oscila en torno a su forma esférica de equilibrio, expandiéndose y contrayéndose, siempre manteniendo su forma y por lo tanto el movimiento de un elemento de masa en este caso será solo en dirección radial. Observamos que el caso de pulsaciones radiales es un caso especial de pulsaciones no-radiales.

Veamos cuales son las propiedades básicas de las oscilaciones no-radiales. Para esto, consideremos a una estrella con simetría esférica como un estado sin perturbar estático sobre el cual se aplican pequeñas perturbaciones. Despreciaremos los efectos de rotación y de campo magnético. Entonces el estado de equilibrio será una función que depende únicamente del radio de la estrella y la perturbación dependerá de las coordenadas angulares y del tiempo. Luego de linealizar las ecuaciones diferenciales que describen el modelo, limitando la solución a perturbaciones infinitamente pequeñas y con variaciones que se suponen con una dependencia sinusoidal en el tiempo, resultan perturbaciones proporcionales a  $Y_l^m(\theta, \phi) \exp(i\sigma t)$ , donde  $Y_l^m(\theta, \phi)$  es el armónico esférico de grado  $l$  y orden azimutal  $m$ ,  $\sigma$  la frecuencia angular o autofrecuencia y  $t$  el tiempo.

El nombre de autofrecuencia se debe a que  $\sigma^2$  resulta ser el autovalor del problema de autovalores que constituyen las ecuaciones de pulsaciones donde las soluciones son los modos normales de oscilación. Es importante destacar que existe una degeneración de orden  $2l + 1$  con respecto a  $m$  para cada frecuencia de oscilación no-radial. Esto es, los  $2l + 1$  modos normales caracterizados por el mismo  $k$  (ver más abajo) y  $l$  oscilan con la misma frecuencia  $\sigma$ . Esto se debe a la ausencia de rotación y campos magnéticos, que provocan apartamientos de la simetría esférica en los modelos de equilibrio. Otra simplificación a las ecuaciones que se puede considerar es la aproximación adiabática, en la cual se supone despreciable el calor cedido o ganado entre los elementos de masa del fluido estelar. Esta aproximación se empleó para el estudio pulsacional de las estrellas consideradas en este trabajo.

Los números que caracterizan los modos normales de oscilación son, el orden radial  $k$ , el grado armónico  $l$  y el orden azimutal  $m$ . El orden radial indica, para modelos sencillos, el número de superficies esféricas en donde el

movimiento radial del fluido es nulo. El grado armónico puede tomar valores enteros y positivos, y el orden azimutal toma valores enteros entre  $-l$  y  $l$ . Estos números dividen a la superficie estelar en zonas delimitadas por las llamadas líneas nodales, en las cuales el movimiento sobre la superficie estelar es nulo. La cantidad de líneas nodales perpendiculares al ecuador es  $|m|$  y la de líneas paralelas es  $l - |m|$ .

Estos sectores presentan fases opuestas en brillo y velocidad de material estelar y están indicados en la Figura 1.1 con líneas llenas y líneas punteadas respectivamente. En esta figura también podemos apreciar que a medida que  $l$  aumenta, la superficie queda dividida en mayor cantidad de zonas, por lo tanto los modos de bajo grado armónico se observan con mayor facilidad. Esto se debe a que las contribuciones de las regiones se cancelan entre sí de manera tal que la amplitud de variabilidad es muy pequeña para ser detectada.

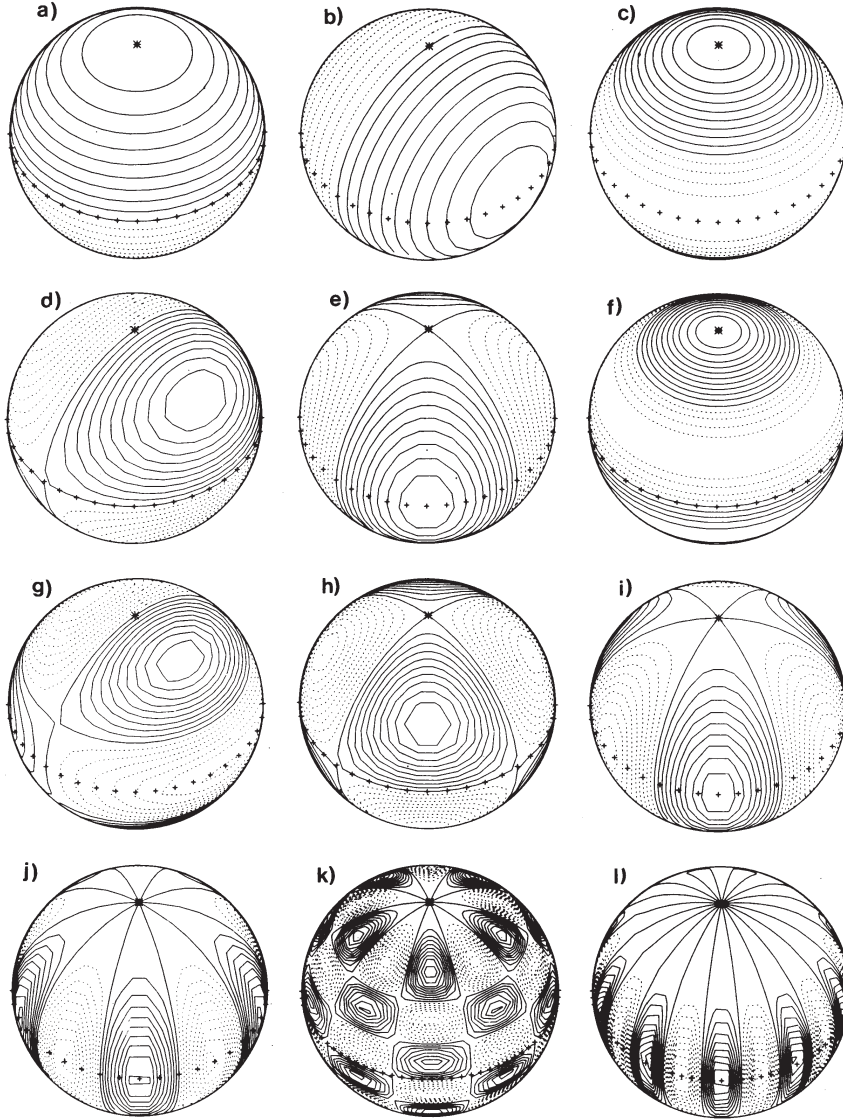
### 1.2.1. Modos de presión y modos de gravedad

Existen dos tipos de modos en una oscilación no-radial estelar: los modos de presión o modos p y los modos de gravedad o modos g, que se encuentran dependiendo de la fuerza restitutiva que actúe en mayor medida sobre la estrella. La fuerza restauradora de los modos p son los gradientes de presión provenientes de la compresibilidad del gas. Están caracterizados por variaciones grandes de presión, análogas a las ondas de sonido; y su movimiento es, principalmente, en dirección radial. Presentan altas frecuencias de oscilación y se incrementan a medida que  $k$  y  $l$  aumentan. Se propagan generalmente cerca de la superficie estelar.

Para los modos g, la principal fuerza restitutiva es la gravedad, que actúa a través de la flotación. Se distinguen por pequeñas variaciones de la presión y a diferencia de los modos p, su principal desplazamiento está dado en la dirección tangencial. Se corresponden al dominio de bajas frecuencias y se propagan generalmente en zonas internas de la estrella, cercanas al núcleo.

Existe también, una tercera clase de modos, el llamado modo f. Se caracteriza por no presentar nodos en la dirección radial y su autofrecuencia aumenta lentamente con  $l$  creciente. Presenta características tanto de los modos g como de los modos p y es único para un dado valor de  $l > 1$ .

La clasificación de modos, sin embargo, no es tan sencilla en general en modelos estelares realistas. Si se considera una zona convectiva en el interior de la estrella, aparece un espectro de modos inestables. Estos modos se los denomina con  $g^-$  para distinguirlos de los g, poseen una variación exponencial con el tiempo y un carácter espacial oscilatorio sólo en regiones convectivas de la estrella. En cambio los modos g son oscilatorios sólo en zonas radiativas y se vuelven evanescentes en zonas convectivas.



**Figura 1.1:** Esquema de contornos de los armónicos esféricos sobre la superficie de una estrella. El ecuador se indica con '+'. Los casos ilustrados son a)  $l=1, m=0$ ; b)  $l=1, m=1$ ; c)  $l=2, m=0$ ; d)  $l=2, m=1$ ; e)  $l=2, m=2$ ; f)  $l=3, m=0$ ; g)  $l=3, m=1$ ; h)  $l=3, m=2$ ; i)  $l=3, m=3$ ; j)  $l=5, m=5$ ; k)  $l=10, m=5$ ; l)  $l=10, m=10$  (Adaptado de Christensen-Dalsgaard 1998)

El número de onda radial  $k_r$ , se relaciona con la frecuencia  $\sigma$  mediante la relación de dispersión:

$$k_r^2 = \frac{(\sigma^2 - L_l^2)(\sigma^2 - N^2)}{\sigma^2 c_s^2} \quad (1.21)$$

donde  $L_l$  y  $N$  son las frecuencias Lamb y Brunt-Väisälä, y  $c_s$  es la velocidad de sonido local, definida como  $c_s^2 = \Gamma_1 P / \rho$ , con  $P$  la presión,  $\rho$  la densidad y  $\Gamma_1 = \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho}\right)_S$ . Estas frecuencias se encuentran definidas respectivamente de la siguiente manera:

$$L_l^2 = \frac{l(l+1)c_s^2}{r^2} = (k_h c)^2 \quad (1.22)$$

$$N^2 = g \left( \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = g \left( \frac{-g}{c_s^2} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) \quad (1.23)$$

donde  $g$  es la aceleración gravitatoria local  $g = GM_r/r^2$  y  $k_h$  está relacionado con la longitud de onda horizontal.

La frecuencia de Lamb caracteriza los modos p; en efecto el tiempo que tarda una onda acústica en recorrer una longitud de onda ( $\lambda_l = 2\pi r/l$ ) horizontalmente es igual a la inversa de la frecuencia de Lamb multiplicada por  $2\pi$ .

La frecuencia de Brunt-Väisälä se corresponde a la frecuencia de una burbuja de gas con la que puede oscilar adiabáticamente y de manera vertical alrededor de su posición de equilibrio, bajo la acción de la gravedad a través de la fuerza de flotación (buoyancy). Caracteriza, entonces a las propiedades de los modos g.

Para oscilaciones de alta frecuencia, en donde  $\sigma^2 > L_l^2, N^2$ , la fuerza restitutiva se debe principalmente al exceso de presión y la oscilación muestra principalmente características de ondas acústicas. Para oscilaciones de baja frecuencia en donde  $\sigma^2 < L_l^2, N^2$  la fuerza restitutiva es debida a la flotación. En ambos casos el número de onda  $k_r$  resulta positivo. Esto significa que las autofunciones son ondas que se propagan espacialmente en la dirección radial. En cambio si  $L_l^2 > \sigma^2 > N^2$  o  $L_l^2 < \sigma^2 < N^2$ , el número de onda es imaginario, no presenta una oscilación espacial y decrece exponencialmente con la distancia a la región de propagación de las ondas. La oscilación temporal en tal región se llama onda evanescente. Con esto se define en el interior estelar zonas evanescentes y las zonas de propagación.

Para visualizar dicho comportamiento se suelen representar ambas frecuencias en función del radio estelar en un diagrama denominado diagrama de propagación (Cox, 1980);(Unno et al., 1989). En la Figura 1.2 se muestra un diagrama de propagación de una politropa de índice 3 para  $l = 2$ . Están

graficadas las frecuencias de Lamb y de Brunt-Väisälä adimensionales junto con las autofrecuencias adimensionales  $\omega^2$ . Se puede observar que existen dos zonas de propagación que forman cavidades resonantes donde los modos oscilan. En la región donde  $\omega^2 > L_l^2, N^2$ , denotada con P en la figura, se propagan los modos p, esto ocurre principalmente en la zona externa de la estrella. Los modos g, por el contrario, se propagan principalmente en la región central, en donde  $\omega^2 < L_l^2, N^2$  y está denotada con G en la figura. Los modos que se propagan dentro de estas cavidades resonantes se vuelven ondas estacionarias si sus autofrecuencias son tales que las ondas reflejadas en los bordes de la cavidad retornan en fase con sí mismas, quedando atrapadas dentro de la cavidad en donde la densidad de energía de oscilación es máxima en estas regiones de la estrella. El modo f cuya autofrecuencia  $\omega^2$  es cercana al máximo de  $N^2$ , separa las zonas de propagación de los modos de presión y los modos de gravedad.

A partir de los diagrama de propagación se puede visualizar que el comportamiento de  $L_l^2$  no difiere cualitativamente para distintos tipos de estrellas. En cambio, el comportamiento de  $N^2$  varía sensiblemente con la evolución estelar. Cabe aclarar que para modelos estelares que presenten una alta densidad central, la clasificación de modos de bajo orden radial se torna menos clara. En este caso los modos en cuestión muestran propiedades tanto de los modos p, como de modos g. A medida que una estrella con masa superior a  $1,2M_\odot$  (dentro del rango de masas de las estrellas  $\delta$  Scuti y  $\gamma$  Doradus que estudiaremos en este trabajo) evoluciona desde la ZAMS, se forma un gradiente químico en el borde del núcleo convectivo que se encoje, esto provoca que la frecuencia de los modos g para pequeños valores de  $l$  disminuya. Los modos p que aparecen puros en la ZAMS se vuelven contaminados con un aumento del número de modos g.

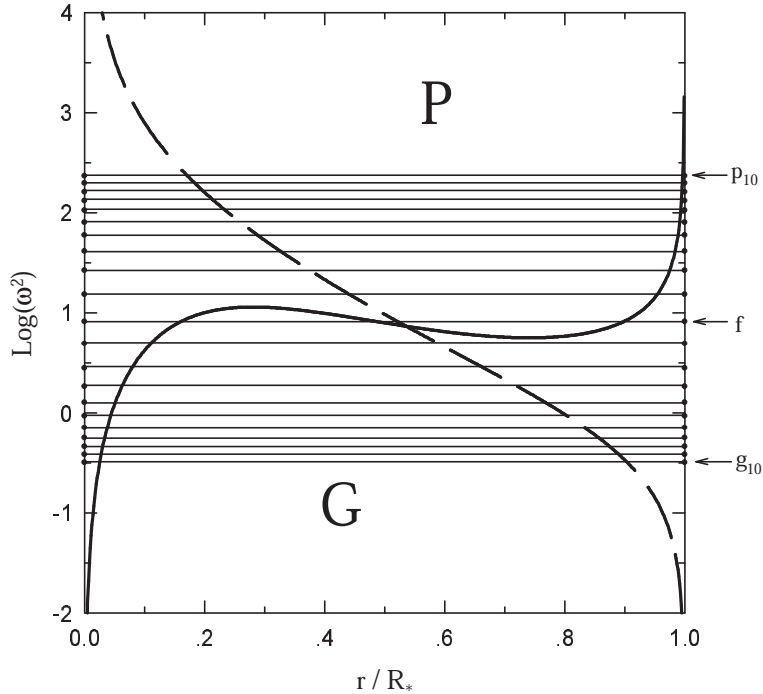
Otra caracterización para los distintos modos que tendremos en cuenta en las simulaciones realizadas, es el espaciamiento asintótico de frecuencias y de períodos. Cuando el orden radial es alto ( $k \gg 1$ ) y para un valor pequeño de  $l$  dado, el espaciamiento asintótico de frecuencias de los modos p es independiente de  $l$ . Esto es (Tassoul, 1980):

$$\Delta\sigma = \sigma_{k+1,l} - \sigma_{k,l} = \pi \left[ \int_0^R \frac{1}{c_s(r)} dr \right]^{-1} = \text{constante} \quad (1.24)$$

De manera similar se puede hallar una expresión para el espaciamiento de períodos asintóticos para los modos g.

$$\Delta P_l = P_{k+1,l} - P_{k,l} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{l(l+1)}} \left[ \int_0^R \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1} = \text{constante} \quad (1.25)$$





**Figura 1.2:** Diagrama de propagación para una polítropa de índice  $n=3$  y un valor de  $l=2$ . La línea de trazos representa el cuadrado de la frecuencia de Lamb y la línea llena la de Brunt-Väisälä ambas normalizadas por el factor  $GM/R^3$ . Se incluyeron los valores de las autofrecuencias adimensionales  $w^2 = \sigma^2/(GM/R^3)$  para los 10 primeros modos p y g y el modo f. El subíndice indica el valor de  $k$ . Figura tomada de [Córscico \(2003\)](#).

donde  $P_{k,l} = 2\pi/\sigma_{k,l}$  es el período de oscilación. Resulta constante en el límite de alto orden radial, pero a diferencia del espaciamiento asintótico de frecuencia, depende de  $l$ .

### 1.3. Clases de estrellas pulsantes

En esta sección, describiremos las principales características de los distintos tipos de estrella pulsantes que existen, haciendo hincapié en las  $\delta$  Scuti y  $\gamma$  Doradus. La motivación del estudio de las pulsaciones estelares es testear modelos físicos propuestos para los objetos de estudio, mediante la comparación directa con las frecuencias pulsacionales observadas. La diferencia que pueda existir entre las frecuencias derivadas del modelo y las observadas permite hacer correcciones adecuadas al modelo físico propuesto. Esto nos permite

CAPÍTULO 1. EVOLUCIÓN ESTELAR Y PULSACIONES  
1.3. CLASES DE ESTRELLAS PULSANTES

| Clase                 | TE          | Períodos   | Modos             |
|-----------------------|-------------|------------|-------------------|
| Sol                   | G           | 2 – 6 min  | p                 |
| Tipo solar            | G           | > 10 min   | p ( $k \gg 1$ )   |
| DAV, DABV, DOV, PNNV  | DA, DB, DO  | 2 – 30 min | g ( $k \gg 1$ )   |
| roAp                  | F, A        | 5 – 15 min | p ( $k \gg 1$ )   |
| $\delta$ Scuti        | F5-A2       | 0,5 – 7 hs | p, g ( $k$ bajos) |
| $\beta$ Cephei        | B1-B2       | 2 – 6 días | p, g              |
| SPB                   | B3-B9       | 1 – 4 días | g ( $k \gg 1$ )   |
| $\gamma$ Doradus      | F tempranas | 1 – 2 días | g ( $k \gg 1$ )   |
| EC14026 (Subenanas B) | B           | 2 – 9 min  | p,f               |

**Tabla 1.1:** Parámetros y nomenclatura de algunas de las clases de estrellas pulsantes conocidas.

extraer información acerca de parámetros estelares como la masa, el perfil de composición química, el perfil rotacional, etc. Este prodecimiento se denomina astrosismología (Balona, 2010) Su origen se debe al éxito alcanzado por la heliosismología, que permitió estudiar en detalle la estructura interna y evolución del Sol. Además, las frecuencias de oscilación pueden medirse muy precisamente en una estrella, por lo que la técnica de la astrosismología constituye una herramienta astrofísica muy importante.

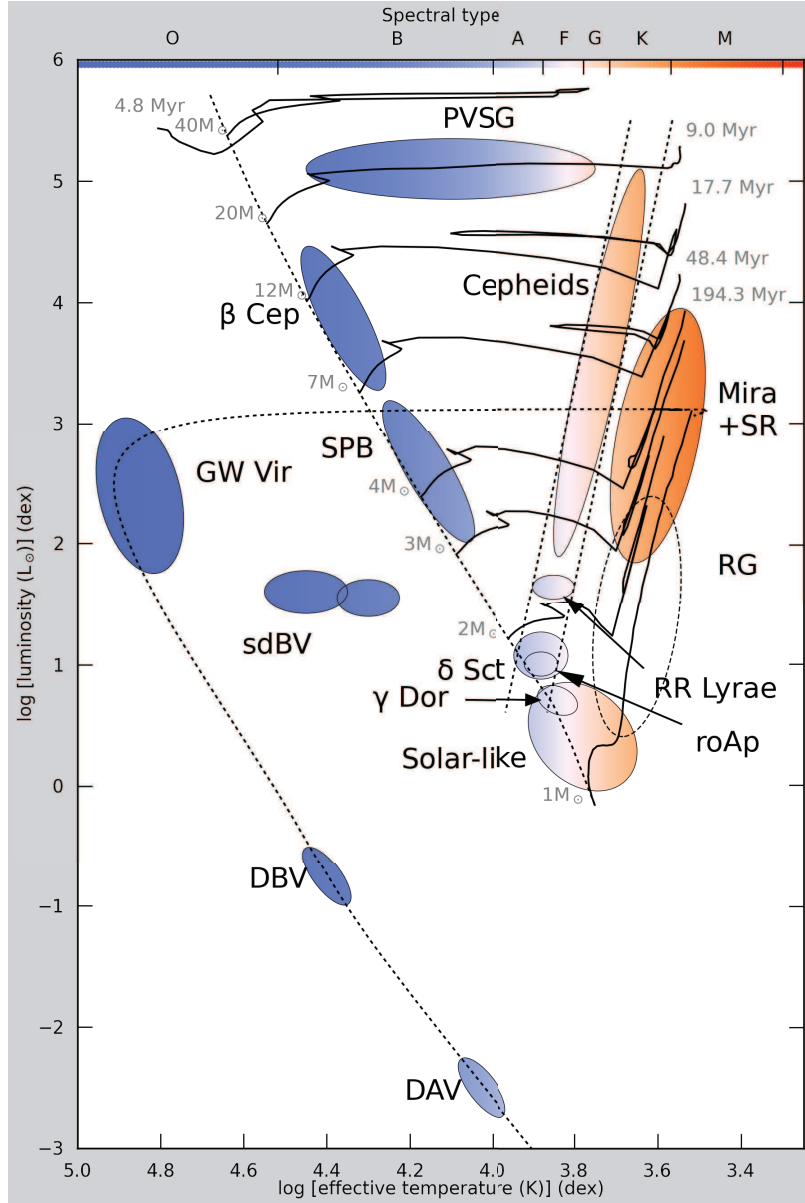
La creciente sensibilidad y refinamiento en las técnicas observacionales de los últimos años, ha conducido al descubrimiento de pulsaciones de baja amplitud en varias estrellas, incluso en algunas que eran consideradas como estrellas no variables. Estos avances sugieren que posiblemente la mayoría de las estrellas pulsan y que las clasificadas como no variables poseen amplitudes de oscilación por debajo del límite de detectabilidad de las técnicas actuales.

En la Tabla 1.1 se muestran algunas estrellas variables conocidas junto con sus períodos y modos de oscilación.

Las pulsaciones pueden encontrarse en muchas etapas de evolución estelar. En la Figura 1.3 se muestra cómo las estrellas pulsantes ocupan amplias regiones en el Diagrama H-R, con un alto rango de masas.

A lo largo de la Secuencia Principal, encontramos varios tipos de variables, desde estrellas oscilantes tipo solar, hasta estrellas  $\beta$  Cephei. Entre las dos líneas diagonales se encuentra la “banda de inestabilidad” que contiene a las variables Cefeida, las RRLira y las  $\delta$  Scuti. Las variables Mira, que poseen grandes amplitudes están en la región más fría del Diagrama H-R, seguidas de las variables Irregulares, que muestran una variabilidad caótica de brillo. Sobre la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas encontramos tres grupos de estrellas degeneradas; las PG1159, que incluyen núcleos de nebulosas planetarias variables y las DOV para las cuales no se observan nebulosas

CAPÍTULO 1. EVOLUCIÓN ESTELAR Y PULSACIONES  
1.3. CLASES DE ESTRELLAS PULSANTES



**Figura 1.3:** Diagrama H-R sísmico. Los tracks evolutivos son tomados de Schaller et al. (1992) y Driebe et al. (1998), y las masas y las escalas de tiempo evolutivas están agregadas en gris. (*RG* = gigantes rojas, *roAp* = estrellas peculiares rápidamente oscilantes, *SR* = variables semi-regulares, *sdBV* = estrellas B variables subenanas, *DBV/DAV* = enanas blancas variables de tipo B/A, *PVSG* = variables periódicas supergigantes). Notar que el tipo espectral enana blanca no se corresponde necesariamente a su temperatura de color. Figura tomada de Degroote (2010).

planetarias; las estrellas DBV que son enanas blancas DB con envoltura de helio; y las estrellas DAV que incluyen enanas blancas con envoltura de hidrógeno.

### 1.3.1. Estrellas variables $\delta$ Scuti y $\gamma$ Doradus

Las estrellas  $\delta$  Scuti y  $\gamma$  Doradus son estrellas variables de tipo espectral A y F. Yacen en la Secuencia Principal del diagrama H-R y abarcan también las regiones de la post-Secuencia y pre-Secuencia, con masas entre  $1,2M_{\odot}$  y  $2,5M_{\odot}$ .

Las estrellas  $\gamma$  Doradus fueron descubiertas como una nueva clase de estrellas pulsantes hace menos de 20 años. Pulsan con modos g de alto orden radial y con períodos típicos que oscilan entre 8 horas y 3 días y frecuencias menores a  $5d^{-1}$ . Su temperatura varía entre  $6900 - 7500K$ .

El mecanismo típico de excitación de estas estrellas es mediante el “bloqueo convectivo”. La envoltura convectiva de las  $\gamma$  Doradus es profunda y se extiende más allá de la región de ionización parcial del He II donde opera el mecanismo  $\kappa$  de excitación (ver más adelante). Como la mayoría del flujo es transportado por convección, el mecanismo  $\kappa$  no se aplica. Esta teoría aceptada explica el origen de la pulsación mediante un bloqueo de la luminosidad radiada en la parte interior de la zona convectiva (Christensen-Dalsgaard et al., 2000). En la fase caliente de la pulsación, el excedente de calor en el fondo de la zona convectiva, no puede ser transportado inmediatamente por la convección. Esto se debe a que la escala de tiempo local de un elemento de volumen convectivo en estas regiones es del mismo orden o mayor al período de pulsación. En estas circunstancias, no hay tiempo suficiente para que el calor en la base del elemento de volumen convectivo sea transportado hacia la cima de dicho elemento dentro de un ciclo pulsacional. Como resultado el calor es bloqueado, la presión aumenta en la base de la zona convectiva y las capas se expanden produciendo la pulsación. El balance entre la excitación por bloqueo convectivo y el amortiguamiento radiativo en la cavidad de los modos g, explica la ubicación de las  $\gamma$  Doradus en la banda de inestabilidad.

Las variables  $\delta$  Scuti, por otra parte, se conocen desde hace décadas. Tienen una temperatura efectiva que oscila entre  $6300K$  y  $8600K$  y sus frecuencias son mayores a  $5d^{-1}$ . Presentan modos g y modos p de pulsación de bajo orden con períodos entre 15 minutos y 5 horas. Estos modos son excitados a través del mecanismo  $\kappa$  de pulsación (Breger, 2000); (Bouabid et al., 2009).

La opacidad es una medida de la absorción de un fotón y es una cantidad fundamental en el cálculo de la estructura interna de un modelo estelar y de su estabilidad pulsacional. Comúnmente la opacidad disminuye a medida

que la temperatura aumenta. Durante la contracción aumenta la temperatura y la disminución resultante de la opacidad contribuye fuertemente a la fuga de calor estabilizando a la estrella. En una zona donde las especies atómicas abundantes están ionizadas parcialmente, la opacidad aumenta con la temperatura porque la radiación es absorbida por la ionización del material. Durante la compresión, parte del calor es absorbido para ionizar mayor cantidad de especies atómicas, con lo cual se absorbe energía en la compresión y es liberada durante la expansión. En esta etapa de pérdida y ganancia de calor, la presión máxima en la región relevante aparecerá luego de un máximo de densidad, que conduce a un efecto desestabilizante. Esta inestabilidad debida al gradiente de opacidad es lo que se denomina, mecanismo  $\kappa$ .

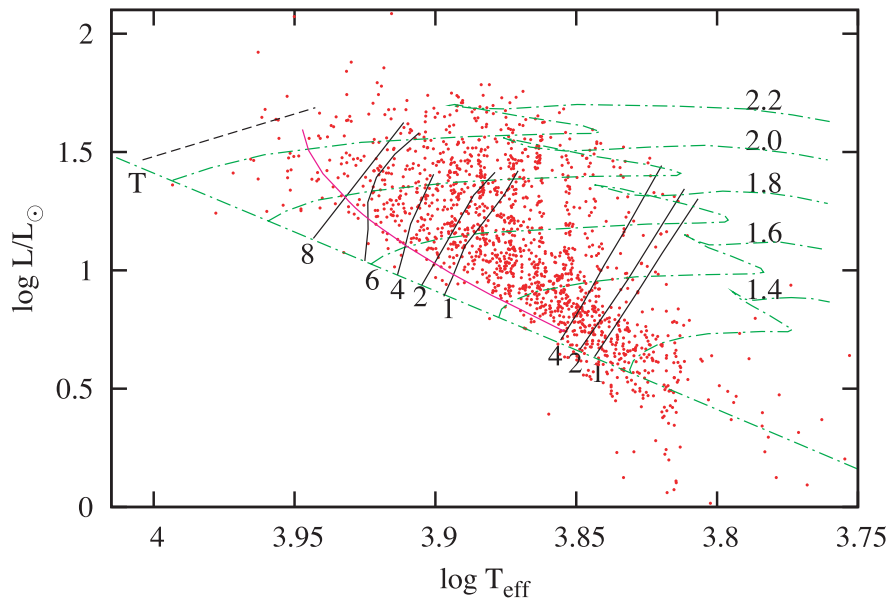
El mecanismo  $\epsilon$  de excitación juega un pequeño rol en los modos g de bajo orden para estrellas de secuencia (Dupret et al., 2006). Este mecanismo es causado por la generación de energía nuclear y a pesar de que puede ser despreciado en la mayoría de los casos, puede tener un efecto menor en los modos g de bajo orden para estrellas de secuencia ya que presentan amplitudes mayores en la región de generación de energía nuclear, a diferencia de otros modos.

La ubicación de las estrellas  $\delta$  Scuti observadas por el telescopio Kepler en un diagrama H-R, puede observarse en la Figura 1.4. La misión espacial Kepler fue lanzada en marzo de 2009. Su objetivo primario es detectar planetas de tamaño similar a la Tierra alrededor de estrellas de tipo solar. Sin embargo, sus curvas de luz, que se extienden ininterrumpidamente por largos períodos de tiempo, están revolucionando muchas áreas de la astrosismología (Borucki et al., 2010).

En este diagrama podemos observar una brecha (comúnmente denominada “gap”) entre la ZAMS y las estrellas  $\delta$  Scuti de baja luminosidad que se incrementa hacia las estrellas más calientes. Pareciera no haber una dependencia con la metalicidad en la ubicación de estas estrellas en el diagrama H-R. La envolvente inferior de las estrellas, está bien descrita por una isocrona de edad  $5 \times 10^8$  años, con lo cual el “gap” es probablemente resultado de la edad general de la población del disco en el campo de observación del telescopio.

Se observan, también muchas  $\delta$  Scuti con mayor temperatura que el borde azul del modo radial fundamental. Las estrellas con esta característica pulsan con armónicos de altos órdenes radiales o no-radiales.

La gran mayoría de las estrellas  $\delta$  Scuti son objetos que presentan una alta velocidad de rotación y sus modos radiales son de baja amplitud presentando también modos no-radiales. Pero dentro de este grupo de estrellas podemos encontrar a objetos peculiares como lo son las HADS (High-Amplitud  $\delta$  Scuti). Estas estrellas son principalmente rotadores lentos y sus propie-



**Figura 1.4:** Diagrama H-R de las estrellas  $\delta$  Scuti observadas por Kepler. Se muestra también, la ZAMS, los tracks evolutivos para modelos con masas entre  $1.4 - 2.2 M_{\odot}$  sin overshooting y una isocrona con  $\log t = 8.7$ . Además están representados el borde azul de los armónicos radiales para algunos modelos y el borde rojo para los armónicos radiales 1,2 y 4 con  $\alpha_{ML} = 1.8$ . El borde azul para los modos atrapados está marcado con la letra T. Figura tomada de [Balona & Dziembowski \(2011\)](#).

dades pulsacionales se hallan entre las Cefeidas y las  $\delta$  Scuti. Una posible explicación para la diferencia aparente entre el comportamiento pulsacional de las HADS y de las  $\delta$  Scuti, es el acoplamiento de modos resonantes que junto con los efectos de rotación provocan una limitación en las amplitudes de estas estrellas.

Una de las sorpresas que surgieron de las observaciones del Kepler, fue encontrar bajas frecuencias en las estrellas  $\delta$  Scuti. Estas frecuencias, no sólo se hallaron en las  $\delta$  Scuti sino también en todas las estrellas de tipo espectral A-F en general. Si bien es posible explicar la presencia de la frecuencia baja dominante como un efecto de la rotación; la existencia de gran cantidad de frecuencias bajas detectadas en estas estrellas, hace improbable que la rotación sea la única causa de este fenómeno. Se debe considerar la posibilidad de que varios cuerpos pequeños orbitando la estrella sean la causa de la presencia de estas bajas frecuencias (Balona & Dziembowski, 2011).

Existe un tercer grupo observado de estrellas pulsantes de tipo espectral A-F: las denominadas estrellas híbridas (Henry & Fekel, 2005); (Uytterhoeven et al., 2008); (Bouabid et al., 2009). Estas estrellas se ubican en la superposición de las bandas de inestabilidad de las estrellas  $\delta$  Scuti y  $\gamma$  Doradus. Son objetos cuyas pulsaciones son excitadas mediante diferentes mecanismos y muestran frecuencias con períodos comprendidos entre los rangos de ambas clases, mencionadas anteriormente.

Recientemente, gracias al telescopio *Kepler*, se han podido monitorear durante un largo período de tiempo miles de estrellas, lo que permitió la determinación de oscilaciones de largo período y la resolución precisa de frecuencias. También permitió ampliar el espectro de frecuencias y detectar variaciones de baja amplitud que eran inapreciables desde la Tierra. El conjunto de estas observaciones hizo posible una caracterización detallada de las estrellas  $\delta$  Scuti,  $\gamma$  Doradus y las llamadas híbridas.

Uno de los resultados interesantes que se encontró en las últimas misiones espaciales es que para muchas estrellas híbridas no se presentan bien definidos los dominios de los modos g y p. Teóricamente, las frecuencias de estos modos se encuentran claramente separadas mediante un “gap” de frecuencias entre 5 y  $10d^{-1}$  (Grigahcène et al., 2010), pero se han observado que algunas poseen un continuo de frecuencias excitadas, llenando el “gap” entre los modos g de alto orden y los modos p de bajo orden radial. Una de las posibles explicaciones para este hecho, es que los modos presentes en este “gap” tengan un alto grado esférico ( $l \geq 6$ ) sólo observable gracias a la gran calidad de las observaciones espaciales. Otra posibilidad es que posean velocidades de rotación altas. A bajas velocidades de rotación el espectro de modos p y g está bien separado, sin embargo a medida que aumenta la velocidad, la región de los modos g se extiende y los modos p se desplazan por efecto de

la rotación a frecuencias más bajas.

Es posible, también, que el espectro de amplitudes de estas estrellas que parecen tener demasiadas frecuencias, esté afectado por un “ruido granulado”, dada la presencia de convección en la superficie estelar que aparece en estrellas dentro de la banda de inestabilidad de las  $\delta$  Scuti (Uytterhoeven et al., 2011). En estrellas menos masivas como el Sol, la convección transporta masa y energía a través del 30 % de las capas más externas de la estrella, excitando un espectro muy rico de modos acústicos resonantes. Los modelos predicen, entonces que las estrellas  $\delta$  Scuti tienen una envoltura convectiva que no se extiende más allá del 1 % de su radio, pero con suficiente energía para excitar oscilaciones del tipo solar. Estos modelos pudieron ser corroborados gracias a la misión Kepler, la cual detectó la presencia de oscilaciones tipo solares en la estrella  $\delta$  Scuti HD187547, mostrando que la convección superficial actúa eficientemente en estrellas de hasta  $2M_{\odot}$  (Antoci et al., 2011).

Otro de los resultados de las observaciones hechas por Kepler, es que no hay prácticamente estrellas pulsantes  $\delta$  Scuti o  $\gamma$  Doradus “puras”. Los datos proporcionados por Kepler muestran que basándonos únicamente en los modos de frecuencia todas las estrellas con variabilidad en estos rangos de frecuencias, son híbridas. Grigahcène et al. (2010) propusieron un nuevo criterio de clasificación considerando la amplitud, además de la frecuencia.

La clasificación es la siguiente:

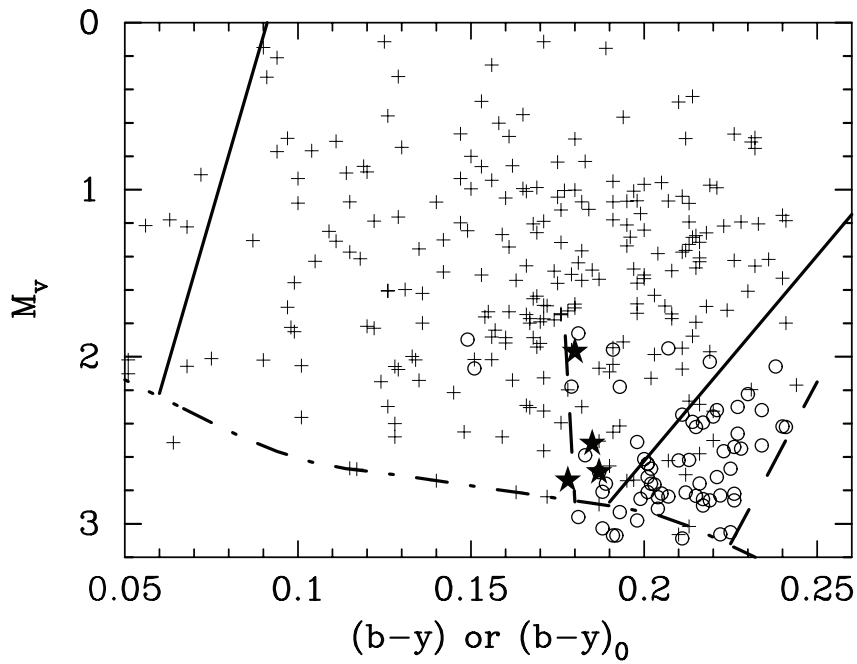
1.  $\delta$  Sct: la mayoría sus frecuencias son superiores a  $5d^{-1}$ , y las frecuencias más bajas son de amplitudes relativamente menores.
2.  $\delta$  Sct/ $\gamma$  Dor: son estrellas híbridas que poseen frecuencias superiores a  $5d^{-1}$ , pero tienen algunas frecuencias más bajas que son comparables en amplitud.
3.  $\gamma$  Dor: sus frecuencias son menores a  $5d^{-1}$ , y las frecuencias más altas son relativamente de baja amplitud.
4.  $\gamma$  Dor/ $\delta$  Sct: estrellas híbridas cuyas frecuencias son menores a  $5d^{-1}$ , pero tienen algunas frecuencias altas con una amplitud comparable.

En la Figura 1.5 están representadas las estrellas observadas por Kepler en un diagrama H-R con la clasificación propuesta.

### 1.3.2. Motivación de esta tesis

La principal motivación de este trabajo es estudiar por primera vez en nuestro Observatorio las propiedades pulsacionales de las estrellas variables  $\delta$





**Figura 1.5:** Diagrama H-R de las estrellas observadas por Kepler. Los círculos llenos representan las  $\delta$  Sct, los círculos abiertos las  $\delta$  Sct/ $\gamma$  Dor, las cruces a las  $\gamma$  Dor/ $\delta$  Sct y los signos más a las  $\gamma$  Dor. La línea discontinua con puntos y rayas muestra la ZAMS. Las líneas continuas indican los borde rojo y azul de la banda de inestabilidad de las  $\delta$  Scuti. Las líneas discontinuas con rayas marcan los bordes rojo y azul para la banda de inestabilidad de las  $\gamma$  Doradus. Figura tomada de [Grigahcène et al. \(2010\)](#).

Scuti y  $\gamma$  Doradus. Para tal fin hemos empleado el código LPCODE de evolución (Althaus et al., 2005) y el código de pulsaciones adiabáticas no radiales (Córscico & Benvenuto, 2002) del Grupo de Evolución Estelar y Pulsaciones de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas.

Dado el carácter exploratorio de este trabajo, hemos calculado modos g y modos p en modelos estelares de 1.3, 1.5 y 1.8  $M_{\odot}$  sobre la Secuencia Principal y saliendo de la misma, cubriendo así las etapas de quema central de hidrógeno y la quema de hidrógeno en capa. Con este propósito, para cada masa, se realizaron los cálculos correspondientes con el programa de evolución desde la ZAMS y hasta la etapa de quema de hidrógeno en capa. A continuación se calculó con el código de pulsaciones para modelos seleccionados del track evolutivo de cada una de las secuencias. En particular, hemos estudiado la influencia de los cambios en las abundancias químicas del núcleo de las estrellas sobre las frecuencias críticas y sobre el espectro de períodos de modos g y frecuencias de modos p.

También se estudió el efecto del fenómeno de *overshooting* sobre los modos de pulsación. Para esto consideramos una secuencia de 1,5  $M_{\odot}$  y tomamos diferentes valores para el parámetro de overshooting (0,0075, 0,015 y 0,03).

El objetivo de la tesis es dar nuestro primer paso en el estudio de estas estrellas variables, las cuales se descubren rutinariamente hoy en día a través de las observaciones con las misiones C.O.R.O.T y Kepler y constituyen el objeto de intensos estudios astrosismológicos de la actualidad.

La misión espacial C.O.R.O.T (CONvection and ROTation) tiene como meta principal obtener información precisa acerca de la estructura y dinámica estelar, y en particular llevar a cabo observaciones relacionadas a incertezas cruciales en el modelado estelar, como lo son los procesos hidrodinámicos. Los objetivos seleccionados de la misión son estrellas de tipo espectral F,G y K en particular las estrellas  $\delta$  Scuti, para las cuales el estudio de su rotación interna y modos de excitación son de gran interés (Baglin & COROT Team, 1998).

## CAPÍTULO 2

## CÓDIGOS NUMÉRICOS

En este capítulo describiremos los códigos numéricos empleados para el cálculo de las secuencias evolutivas y las pulsaciones aplicados por primera vez en la F.C.A.G a estrellas de baja masa de Secuencia Principal y post-Secuencia.

### 2.1. Generalidades del código evolutivo

El código LPCODE que se empleó en este trabajo, fue desarrollado en su totalidad en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas. Fue principalmente desarrollado por el Dr. Leandro Althaus. Ha sido empleado, entre otras aplicaciones, para calcular modelos evolutivos detallados de las variables ZZ Ceti y sus propiedades pulsacionales (Córscico et al., 2005).

El conjunto de ecuaciones que determina la estructura y evolución estelar para el caso hidrostático es el siguiente:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_n - \epsilon_\nu - c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = - \sum_j \langle v\sigma \rangle_{ij} n_i n_j + \sum_{k,l} \langle v\sigma \rangle_{kl} n_k n_l + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D_{mix} \frac{\partial n_i}{\partial r} \right) \text{ con } i = 1, \dots, I \quad (2.5)$$

donde  $\delta = - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P$  es el coeficiente de expansión térmica,  $\epsilon_n$  es la energía nuclear liberada por unidad de masa y de tiempo,  $\epsilon_\nu$  la energía liberada por neutrinos por unidad de masa y de tiempo,  $c_p$  el calor específico a presión constante por unidad de masa;  $\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$  el gradiente adimensional de temperatura y  $D_{mix}$  representa el coeficiente de difusión que describe el proceso de mezcla.

La implementación en el código de evolución utilizado se realiza mediante la linealización implícita de este sistema de ecuaciones. El sistema algebraico resultante de dicha linealización se resuelve mediante el método iterativo de Newton-Raphson. Dentro del código se elige como variable independiente a la masa fraccionaria  $m$ , que representa la masa interna a un radio  $r$ . Por consiguiente resolviendo las ecuaciones de estructura estelar se obtienen  $T = T(m)$ ,  $P = P(m)$ ,  $r = r(m)$  y  $l = l(m)$  a un tiempo dado donde  $T$  es la temperatura,  $P$  es la presión,  $r$  es el radio y  $l$  la luminosidad. Por último, dada la composición química, las ecuaciones de estructura forman un sistema de ecuaciones bien determinado.

Con el propósito de mejorar la estabilidad de los cálculos, en el LPCODE se realizan los siguientes cambios de variables:

$$\xi = \ln(1 - m/M_*) \quad (2.6)$$

$$\theta = \ln(T/T_0) \quad (T_0 \equiv 10^6 K) \quad (2.7)$$

$$p = \ln(P/P_0) \quad (P_0 \equiv 10^{15} \text{ din cm}^{-2}) \quad (2.8)$$

$$x = \ln(r/r_0) \quad (r_0 \equiv 10^{10} \text{ cm}) \quad (2.9)$$

$$\lambda = l/(\Lambda L_0) \quad (L_0 \equiv 10^{33} \text{ erg seg}^{-1}) \quad (i = 1, \dots, I) \quad (2.10)$$

Así,  $\xi$  es la variable independiente utilizada por el LPCODE y  $\theta$ ,  $p$ ,  $x$  y  $\lambda$  son las variables dependientes. Las constantes  $T_0$ ,  $P_0$ ,  $r_0$  y  $L_0$  son factores de escala. El factor  $\Lambda$  es también un factor de escala que se reajusta automáticamente durante el cálculo, de modo tal de mantener el valor absoluto  $\lambda$  por debajo de 10. Mencionamos, por último, que  $M_*$  es la masa total de la estrella.

En los códigos de evolución estelar la composición química de un modelo no se trata de manera autoconsistente con los cambios de estructura estelar. Una vez obtenidas las variables  $T$ ,  $P$ ,  $r$  y  $l$  a un tiempo  $t_{n+1}$  se calcula la composición química usando la ecuación para un tiempo posterior  $t_{n+2}$ .

Luego se calculan las variables de estructura al tiempo  $t_{n+2}$ . suponiendo conocida la composición química, y así sucesivamente. La resolución simultánea de las ecuaciones de estructura y de composición química implican un costo computacional muy elevado, pero se puede considerar un paso temporal lo suficientemente pequeño para que las variables no cambien considerablemente, como se considera, por ejemplo, en el código de Eggleton. Este paso temporal pequeño es necesario para que la linealización de la ecuaciones sea una buena aproximación.

Para poder resolver las ecuaciones de estructura y de composición química se deben conocer:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(T, P, X_i) \\ \delta &= \delta(T, P, X_i) \\ \epsilon_{nuc} &= \epsilon_{nuc}(T, P, X_i) \\ \kappa &= \kappa(T, P, X_i) \\ \nabla_{ad} &= \nabla_{ad}(T, P, X_i) \\ c_p &= c_p(T, P, X_i) \\ \epsilon_\nu &= \epsilon_\nu(T, P, X_i) \\ v\sigma_{ij} &= v\sigma_{ij}(T, \rho)\end{aligned}$$

Las cantidades  $\rho$ ,  $\nabla_{ad}$ ,  $\delta$  y  $c_p$  se deben calcular a través de una ecuación de estado adecuada para el material estelar. El grado de ionización parcial de la materia no degenerada se obtiene mediante la ley de Saha para un gas compuesto por hidrógeno y helio. Las correcciones coulombianas por la presencia de metales son despreciables cuando se produce ionización parcial en situaciones reales por lo que la ecuación de estado que se utiliza es la de un gas ideal que es el caso de materia no degenerada.

La ecuación de estado para materia degenerada, se plantea en términos de integrales de Fermi. Estas integrales no tienen solución analítica y el código emplea desarrollos en serie de potencias adecuados para cada tipo de degeneración (Clayton, 1968). Dado el potencial químico de los electrones  $-\alpha$ , el caso de degeneración débil se presenta cuando  $|\alpha| \ll 1$ . En cambio, si  $|\alpha| \gg 1$ , se está en presencia de degeneración fuerte. En estos casos la ecuación de estado incorpora contribuciones iónicas e interacciones coulombianas y contempla también los efectos de radiación en las cantidades termodinámicas. Cuando las interacciones coulombianas son relevantes durante la ionización parcial, se utiliza la versión actualizada de la ecuación de estado de Magni & Mazzitelli (1979). Para el cálculo de la tasa de emisión de neutrinos

se siguen los lineamientos de [Itoh et al. \(1996\)](#) que contemplan los procesos de pares de neutrinos, foto- neutrinos, plasma y Bremsstrahlung.

Las opacidades radiativas se obtienen de OPAL ([Iglesias & Rogers, 1996](#)), incluyen tablas correspondientes para diferentes metalicidades. Para bajas temperaturas las opacidades radiativas están contempladas con las opacidades moleculares de [Alexander & Ferguson \(1994\)](#). Las opacidades conductivas en los regímenes de baja y alta densidad se obtienen de [Hubbard & Lampe \(1969\)](#) e [Itoh & Kohyama \(1983\)](#), respectivamente.

Las especies nucleares consideradas son  $H$ ,  $D$ ,  ${}^3He$ ,  ${}^4He$ ,  ${}^7Be$ ,  ${}^{12}C$ ,  ${}^{13}C$ ,  ${}^{14}N$ ,  ${}^{15}N$ ,  ${}^{16}O$ ,  ${}^{17}O$ ,  ${}^{18}O$ ,  ${}^{19}F$  y  ${}^{20}Ne$ , a menos que se indique lo contrario. La red de reacciones nucleares incluye 30 reacciones y es la adecuada para seguir la evolución estelar durante la etapa de combustión del hidrógeno y el helio. Para el primer caso se incluyen las reacciones nucleares de las tres cadenas del ciclo PP y el ciclo CNO. En el caso de la combustión del helio, se incluyen las reacciones fundamentales que determinan la tasa de liberación de energía durante esta etapa. Las tasas de reacciones nucleares fueron tomadas en su mayoría de la compilación de [Caughlan & Fowler \(1988\)](#). La reacción  ${}^{12}C(He, \gamma){}^{16}O$  en particular, fue tomada de [Angulo \(1999\)](#).

## 2.2. Código de pulsaciones

Este código fue desarrollado en forma independiente con el fin de estudiar las propiedades pulsacionales en estrellas variables, específicamente para calcular modos no-radiales en estrellas esféricamente simétricas ([Córscico & Benvenuto, 2002](#)).

Inicialmente el código fue diseñado para resolver las ecuaciones que modelan las oscilaciones adiabáticas. Este problema es más sencillo que el que se presenta en el caso general no-adiabático. Los cálculos adiabáticos proporcionan suficiente información acerca de la estructura mecánica de la estrella por lo que son empleados en el estudio pulsacional de este trabajo. También se ha desarrollado un código no-adiabático para estudiar la estabilidad vibracional de las estrellas variables, pero no fue empleado en el desarrollo de este trabajo.

El método utilizado para resolver las ecuaciones de estructura y evolución química en el LPCODE está basado en un esquema tipo Henyey. Este tipo de esquemas es el más difundido entre los códigos de evolución estelar. El código de pulsaciones no-radiales está basado en una modificación de la técnica de Newton-Raphson generalizada presentada en [Hofmeister et al. \(1964\)](#) para resolver un conjunto de ecuaciones en diferencias que presentan las ecuaciones diferenciales de oscilaciones no-radiales, lineales y adiabáticas para estrellas

simétricamente esféricas. Estas ecuaciones son:

$$x \frac{dy_1}{dr} = (V_g - 3)y_1 + \left[ \frac{l(l+1)}{C_1 w^2} - V_g \right] y_2 + V_g y_3 \quad (2.11)$$

$$x \frac{dy_2}{dr} = (C_1 w^2 - A^*)y_1 + (A^* - U + 1)y_2 - A^* y_3 \quad (2.12)$$

$$x \frac{dy_3}{dr} = (1 - U)y_3 + y_4 \quad (2.13)$$

$$x \frac{dy_4}{dr} = U A^* y_1 + U V_g y_2 + [l(l+1) - U V_g] y_3 - U y_4 \quad (2.14)$$

donde  $y_1, y_2, y_3$  y  $y_4$  son las autofunciones adimensionales de [Dziembowski \(1971\)](#) dadas por:

$$y_1 = \frac{\xi_r}{r} \quad (2.15)$$

$$y_2 = \frac{P'}{gr\rho} \quad (2.16)$$

$$y_3 = \frac{\Phi'}{gr} \quad (2.17)$$

$$y_4 = \frac{1}{g} \frac{d\Phi'}{dr} \quad (2.18)$$

y  $V_g, U, A^*, \omega$  y  $C_1$  tienen la siguiente expresión:

$$V_g = \frac{gr}{c^2} \quad (2.19)$$

$$U = \frac{4\pi\rho r^3}{M_r} \quad (2.20)$$

$$A^* = \frac{r}{g} N^2 \quad (2.21)$$

$$\omega^2 = \frac{R_*^3}{GM_*} \sigma^2 \quad (2.22)$$

$$C_1 = \left( \frac{r}{R} \right)^3 \left( \frac{M_*}{M_r} \right) \quad (2.23)$$

Junto con las condiciones de contorno adecuadas, este sistema de ecuaciones, constituye un problema lineal de autovalores de cuarto orden, el cual se resuelve numéricamente. Para la resolución numérica de este problema,

se divide el modelo de equilibrio en un número finito de capas concéntricas. Esto es equivalente a discretizar el dominio de la variable independiente  $x$  en  $N$  puntos, es decir  $N - 1$  segmentos,  $x_j$  no necesariamente equiespaciadas, con  $j = 1, \dots, N$ . En este contexto se define  $x_1 = 1$  como la superficie de la estrella y  $x_N = 0$  como el punto central del modelo. A continuación para implementar el método de diferencias finitas se piensa a las ecuaciones como:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, y_2, y_3, y_4, \lambda), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (2.24)$$

donde  $\lambda = \omega^2$  y se reemplaza a las derivadas por el cociente incremental:

$$\frac{[y_i]_{j+1} - [y_i]_j}{x_{j+1} - x_j} = f_i([y_1, y_2, y_3, y_4]_{j+\frac{1}{2}}; \lambda) \quad (2.25)$$

con  $i = 1, 2, 3, 4$  y  $j = 1, \dots, N - 1$  y en donde el subíndice  $\frac{1}{2}$  indica un promedio:

$$[t]_{j+\frac{1}{2}} = \frac{[t]_j + [t]_{j+1}}{2} \quad (2.26)$$

Las condiciones de contorno superficiales están dadas por:

$$[y_1]_1 (1 + [l(l+1)/\omega^2 - 4 - \omega^2]/V) - [y_2]_1 + [y_3]_1 (1 + [l(l+1)/\omega^2 - l - 1]/V) = 0 \quad (2.27)$$

$$(l+1)[y_3]_1 + [y_4]_1 = 0 \quad (2.28)$$

$$[y_1]_1 = 1 \quad (2.29)$$

y las condiciones de contorno en el interior, son (Unno et al., 1989):

$$[y_1]_N [C_1]_N \frac{\lambda}{l} - [y_2]_N = 0 \quad (2.30)$$

$$l[y_3]_N - [y_4]_N = 0 \quad (2.31)$$

Para resolver el sistema se utiliza el método de Kippenhahn, Weigert & Hofmeister(1967) para el caso de evolución estelar. Se comienza con una solución aproximada y se mejora dicha solución en forma iterativa. Si la solución no difiere demasiado de la solución exacta, se realiza un desarrollo a primer orden en las correcciones de las autofunciones para cada punto de la grilla y también para el autovalor  $w^2$ , obteniendo de esta manera un sistema lineal de ecuaciones donde las incógnitas son las correcciones a primer orden.



El sistema algebraico de ecuaciones para las correcciones de primer orden se puede expresar como:

$$\frac{\partial B_k}{\partial [y_1]_1} \delta [y_1]_1 + \dots + \frac{\partial B_k}{\partial [y_4]_1} \delta [y_4]_1 + \frac{\partial B_k}{\partial \lambda} \delta \lambda = -B_k; k = 1, 2, 3, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_j} \delta [y_1]_j + \dots + \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_4]_j} \delta [y_4]_j + \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_{j+1}} \delta [y_1]_{j+1} + \dots + \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_4]_{j+1}} \delta [y_4]_{j+1} + \\ + \frac{\partial G_i^j}{\partial \lambda} \delta \lambda = -G_i^j; i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial [y_1]_N} \delta [y_1]_N + \dots + \frac{\partial C_m}{\partial [y_4]_N} \delta [y_4]_N + \frac{\partial C_m}{\partial \lambda} \delta \lambda = -C_m; m = 1, 2, \quad (2.34)$$

donde los  $\delta [y_i]_j$  son las correcciones a las autofunciones  $y_i$  en el punto  $j$  de la grilla, y  $\delta \lambda$  es la corrección al autovalor  $\lambda$ . Las cantidades  $B_k$ ,  $G_i^j$  y  $C_m$  son los valores de las ecuaciones en diferencias evaluadas en la solución que se quiere mejorar de forma iterativa.

Luego de trabajar algebraicamente se logra un sistema de ecuaciones que se puede resolver para obtener las correcciones del autovalor  $\lambda$  y de las autofunciones  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  e  $y_4$  en el punto central de la grilla. También se obtiene la corrección en la autofunción  $y_4$  en el punto externo de la malla. Esta corrección en la autofunción  $\delta [y_4]_{N-1}$  funciona como acoplamiento entre los puntos  $N$  y  $N - 1$  y sirve para obtener el resto de las correcciones a las autofunciones en el punto  $N - 1$ . La aplicación de este procedimiento para sucesivos valores decrecientes de  $j$ , usando  $\delta [y_4]_{j+1}$  como acoplamiento para puntos consecutivos, conduce a encontrar las correcciones para el autovalor y las autofunciones para el modelo completo. Estas correcciones son aplicadas a la solución inicial y se emplea este método iterativamente hasta el estado en el cual todas las correcciones en valor absoluto son menor a algún valor prefijado.

Para encontrar la primera aproximación a la solución y poder continuar con el procedimiento iterativo descrito, se utiliza el método del discriminante presentado por [Unno et al. \(1989\)](#).

Para cada modo el código de pulsaciones calcula la frecuencia adimensional  $w_k$ , donde  $k$  es el orden radial del modo correspondiente, y las autofunciones  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  e  $y_4$  definidas en las ecuaciones [2.15](#), [2.16](#), [2.17](#) y [2.18](#).

## CAPÍTULO 2. CÓDIGOS NUMÉRICOS

### 2.2. CÓDIGO DE PULSACIONES

---

A partir de estas cantidades básicas el código de pulsación calcula los períodos de pulsación  $P_k$ , la energía cinética de oscilación  $E_{cin}$ , los coeficientes de splitting rotacional  $C_k$  y las funciones peso, entre otras cosas.

Los esquemas descritos en esta sección fueron programados en el lenguaje FORTRAN 77.

## CAPÍTULO 3

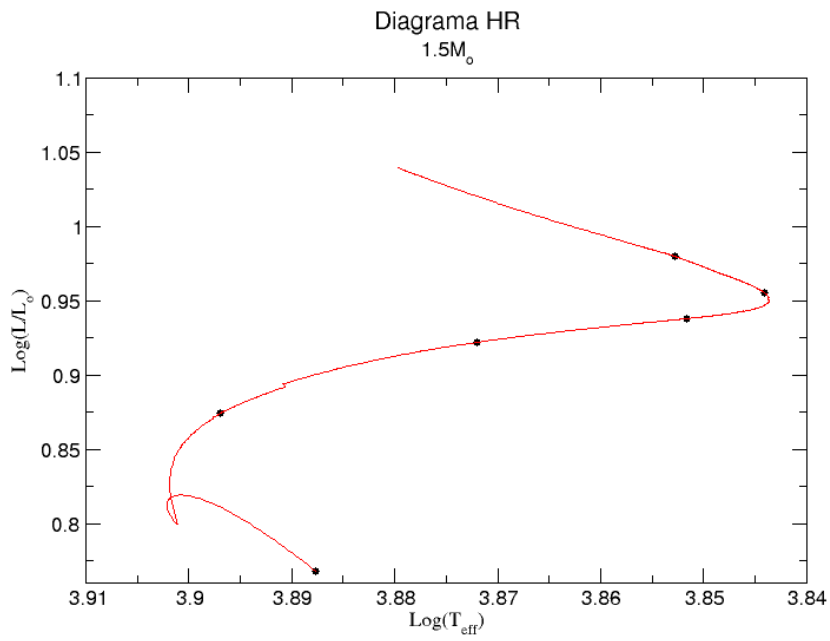
## SIMULACIONES

En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas. Comenzamos explorando las propiedades pulsacionales de una estrella de  $1,5M_{\odot}$ . Para ello, como primer paso realizamos el correspondiente diagrama H-R de la estrella, considerando una abundancia central inicial de hidrógeno de 0,725 y dejando evolucionar hasta una abundancia central aproximada de hidrógeno de 0.015, alcanzando de esta manera la etapa de Post-Secuencia Principal. En la Figura 3.1 se muestra dicho diagrama. Los modelos seleccionados para realizar el estudio pulsacional a lo largo de estas etapas, están indicados con puntos sobre el gráfico y sus características están en la Tabla 3.1.

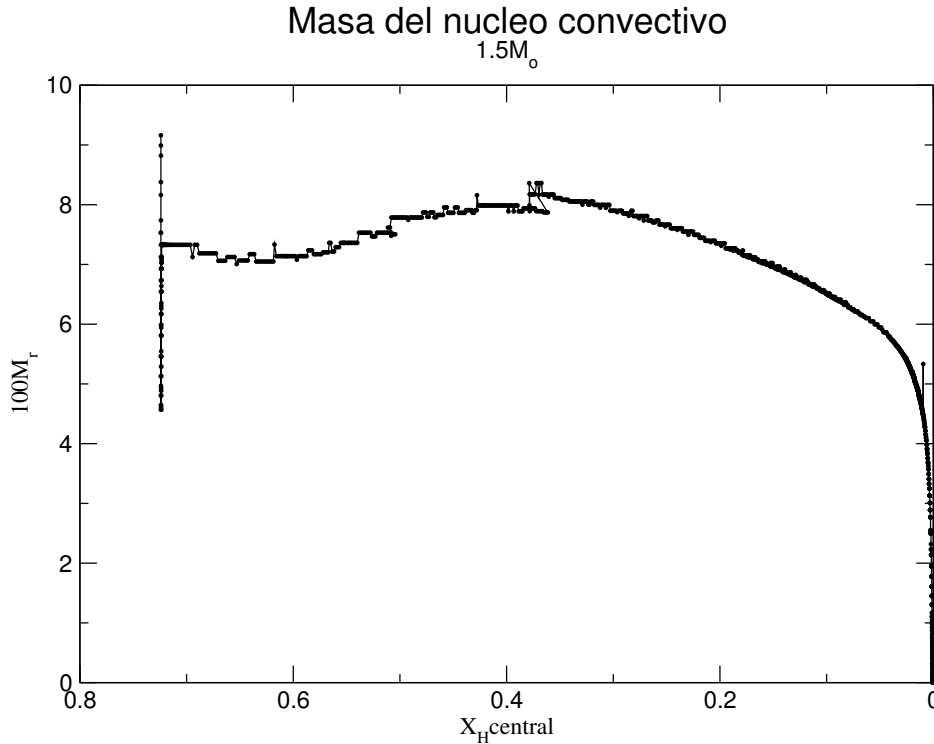
Para cada uno de los modelos seleccionados se realizaron los cálculos con el código de pulsaciones para los grados armónicos  $l = 1$  y  $l = 2$ , pudiendo así estudiar el comportamiento de las pulsaciones no-radiales en las

| Nombre      | Edad ( $10^6$ años) | $T_{\text{eff}}$ (K) | $X_{\text{H}}$ central |
|-------------|---------------------|----------------------|------------------------|
| Modelo 100  | 1,9536635           | 7721                 | 0,724                  |
| Modelo 300  | 663,37265           | 7887                 | 0,511                  |
| Modelo 500  | 1182,9418           | 7448                 | 0,281                  |
| Modelo 700  | 1412,4802           | 7107                 | 0,141                  |
| Modelo 900  | 1541,4529           | 6983                 | 0,042                  |
| Modelo 1100 | 1571,3733           | 7125                 | 0,015                  |

**Tabla 3.1:** Características de los modelos seleccionados para el estudio pulsacional de una estrella de  $1,5M_{\odot}$ . Estos modelos están indicados con puntos sobre el diagrama H-R en la Figura 3.1



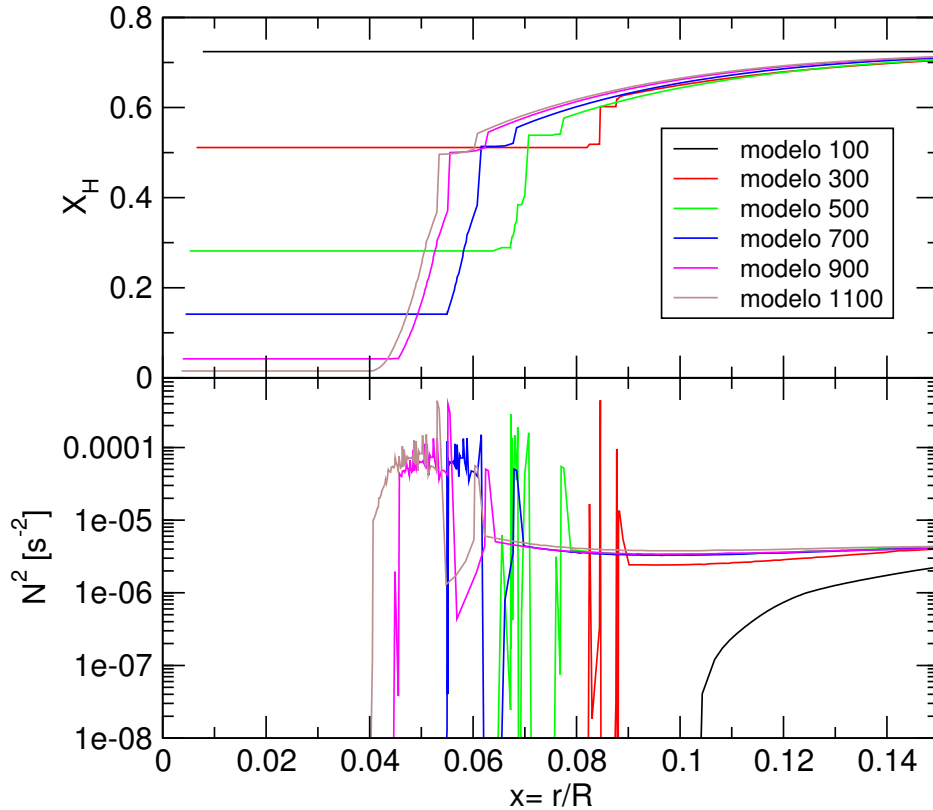
**Figura 3.1:** Diagrama H-R de una estrella de  $1,5M_{\odot}$  de la etapa de Secuencia Principal y Post-SP.



**Figura 3.2:** Masa fraccional del núcleo convectivo en función de la abundancia central de hidrógeno para masa  $1,5M_{\odot}$ .

estrellas de baja masa en la Secuencia Principal y Post Secuencia Principal. A continuación presentaremos los resultados obtenidos para  $l = 1$ .

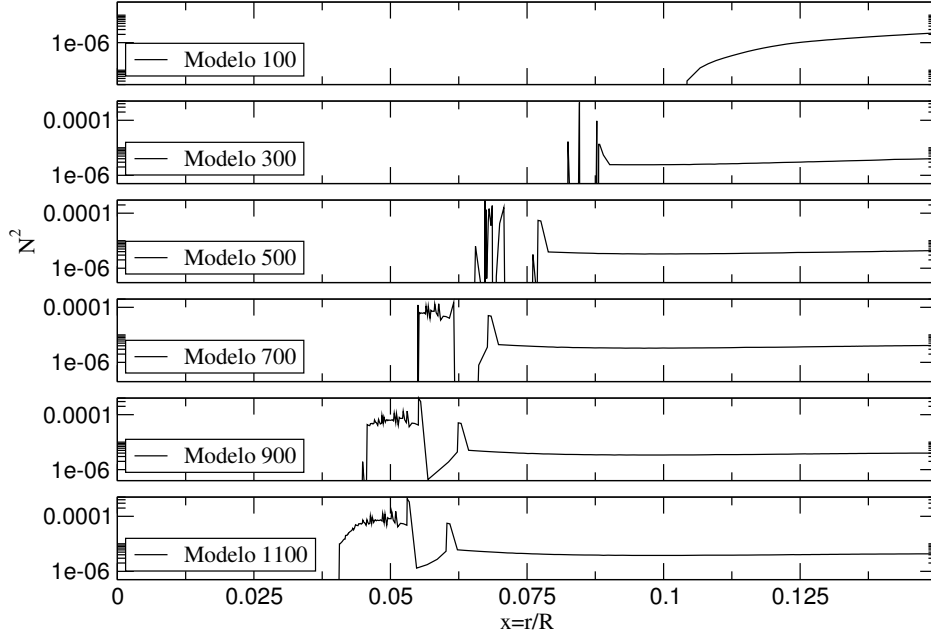
El diagrama de la abundancia fraccional de hidrógeno vs.  $x = r/R$  revela la estructura interna de la estrella y brinda información acerca del núcleo convectivo para cada modelo. Las abundancias son constantes en las zonas convectivas debido a la mezcla de elementos que se produce mediante el fenómeno de convección. En el panel superior de la Figura 3.3 se puede apreciar que a medida que la estrella evoluciona y consume el hidrógeno central, el tamaño del núcleo convectivo disminuye. Además, aparece un gradiente de composición química en cada modelo, que se ve reflejado en la región de cambio gradual en la composición química. Por ejemplo, para el “modelo 1100” esta región se encuentra entre los valores 0.04 y 0.06 de la variable  $x = r/R$ . Existe una región en el diagrama, para cada modelo que presenta un segundo escalón (para el “modelo 1100” este escalón está ubicado entre los valores 0,055 y 0,6 de la variable  $x = r/R$ , aproximadamente). Este escalón indica la presencia de una segunda región convectiva que aparece en los modelos seleccionados.



**Figura 3.3:** Panel Superior: Abundancia fraccional de hidrógeno en función de  $x = r/R$  para los modelos indicados. Panel Inferior: Perfil de frecuencia de Brunt-Väisälä vs.  $x = r/R$  para los mismos modelos.

El comportamiento del núcleo convectivo puede apreciarse en la Figura 3.2, en donde graficamos la masa del núcleo convectivo en función de la abundancia central de hidrógeno para el modelo con  $1,5M_{\odot}$ . Puede apreciarse que la masa del núcleo convectivo crece abruptamente cuando comienza a consumirse el hidrógeno en el núcleo, luego crece suavemente hasta alcanzar un máximo de  $0,08M_r$  aproximadamente, y posteriormente comienza una etapa en la que retrocede.

El cambio en la composición química de los modelos estelares influye directamente en las propiedades de los modos vibratoriales. El gradiente químico que se observa en el diagrama de las abundancias está íntimamente relacionado con el perfil de las frecuencias características. Podemos observar en la Figura 3.3 que dado un modelo, la frecuencia de Brunt-Väisälä toma valores nulos en la región correspondiente al núcleo convectivo y decrece abruptamente en aquellas regiones con abundancia química constante, presentes en el modelo debido a una mezcla convectiva. Además la aparición del



**Figura 3.4:** Frecuencia de Brunt-Väisälä para los modelos seleccionados.

primer máximo se corresponde con el borde interno de la región del gradiente de composición química y se desplaza hacia capas más internas a medida que los modelos evolucionan. La evolución de la frecuencia de Brunt-Väisälä puede observarse también en la Figura 3.4.

La frecuencia de Brunt-Väisälä esta dada por:

$$N^2 = g \left( \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) \quad (3.1)$$

donde  $N$  puede ser escrito como:

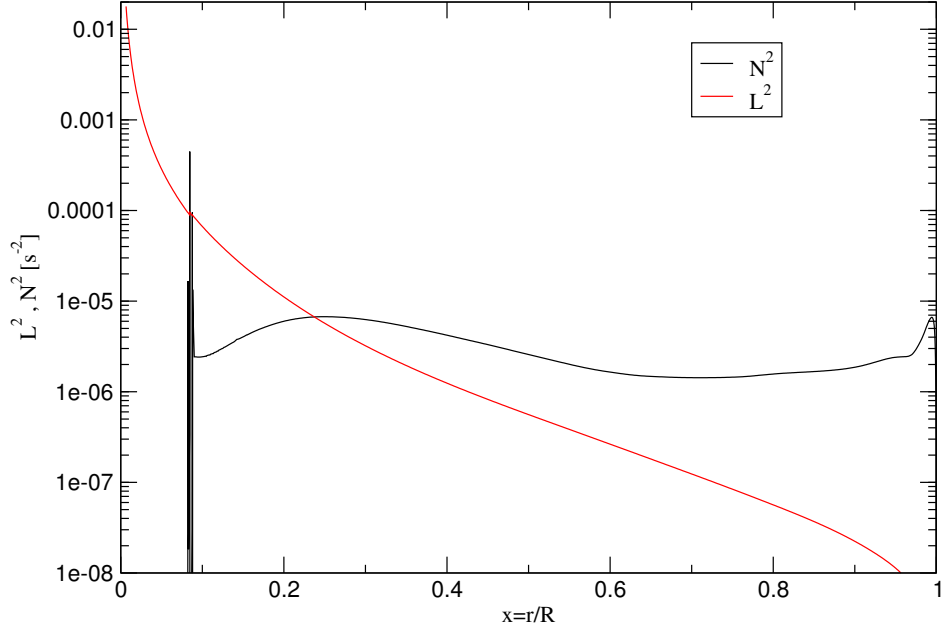
$$N^2 = \frac{g^2 \rho \chi_T}{p \chi_\rho} [\nabla_{ad} - \nabla + B] \quad (3.2)$$

Las expresiones para  $\chi_T$ ,  $\chi_\rho$  y  $B$  son las siguientes:

$$\chi_T = \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho ; \chi_\rho = \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_T ; B = -\frac{1}{\chi_T} \sum_{i=0}^{N_c} \chi_{X_i} \frac{d \ln X_i}{d \ln P} \quad (3.3)$$

con

$$\chi_{X_i} = \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln X_i} \right)_{\rho, T, X_{j \neq i}} \quad (3.4)$$



**Figura 3.5:** Diagrama de propagación para el “Modelo 300” en función de la coordenada  $x = r/R$ .

donde  $N_c$  corresponde al número de elementos químicos presentes en el gas y la suma se realiza sobre  $N_c - 1$  especies independientes, más la condición inicial  $\sum_{i=1}^{N_c} X_i = 1$ .

El factor  $B$  se denomina término de Ledoux y contiene las contribuciones específicas debidas a los gradientes de composición química que afectan la frecuencia de Brunt-Väisälä, con lo cual la expresión 3.2 permite aislar el efecto de los gradientes químicos mediante este término.

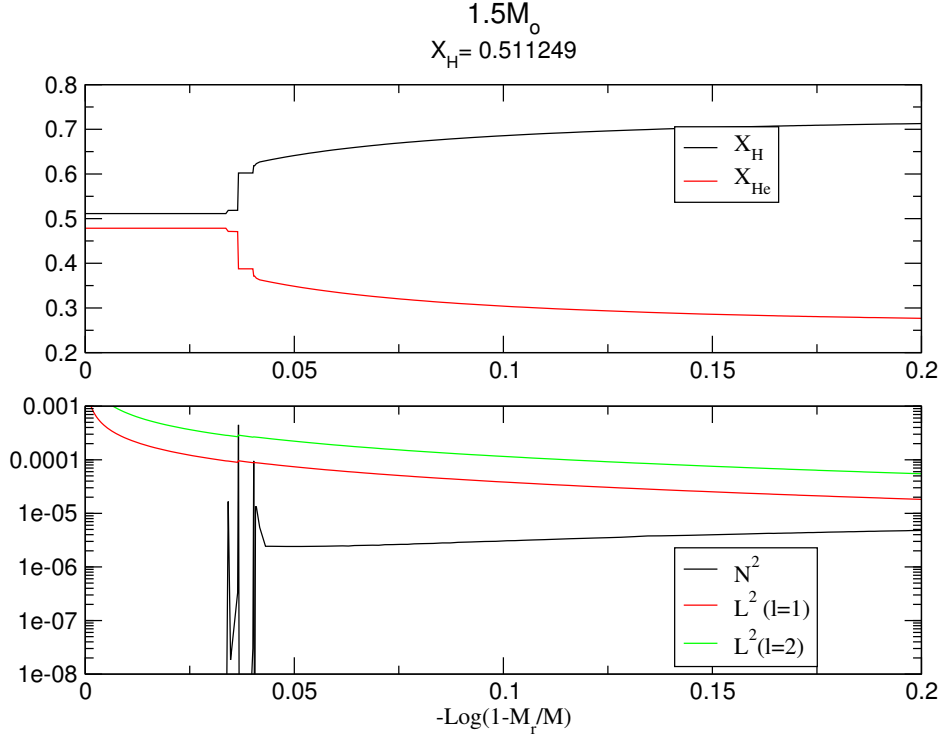
Por otra parte, la frecuencia característica de Lamb, tiene la siguiente expresión:

$$L_l^2 = \frac{l(l+1)}{r^2} c_S^2 \quad (3.5)$$

Ambas frecuencias tienen un rol fundamental en el estudio de las propiedades de los modos p y g. Una forma útil de visualizar el comportamiento local de los modos es mediante un diagrama de propagación (ver Cox (1980); Unno et al. (1989)]. Este diagrama consiste en un gráfico de  $L^2$  y  $N^2$  en función de la coordenada radial. Para el “Modelo 300” representamos dicho diagrama en la Figura 3.5. A diferencia del diagrama de propagación para una polítropa (Figura 1.2) puede observarse en este caso que los modos g han comenzado a introducirse dentro del rango de frecuencias de los modos p.

En la Figura 3.3 se puede apreciar el cambio en la frecuencia de Brunt-





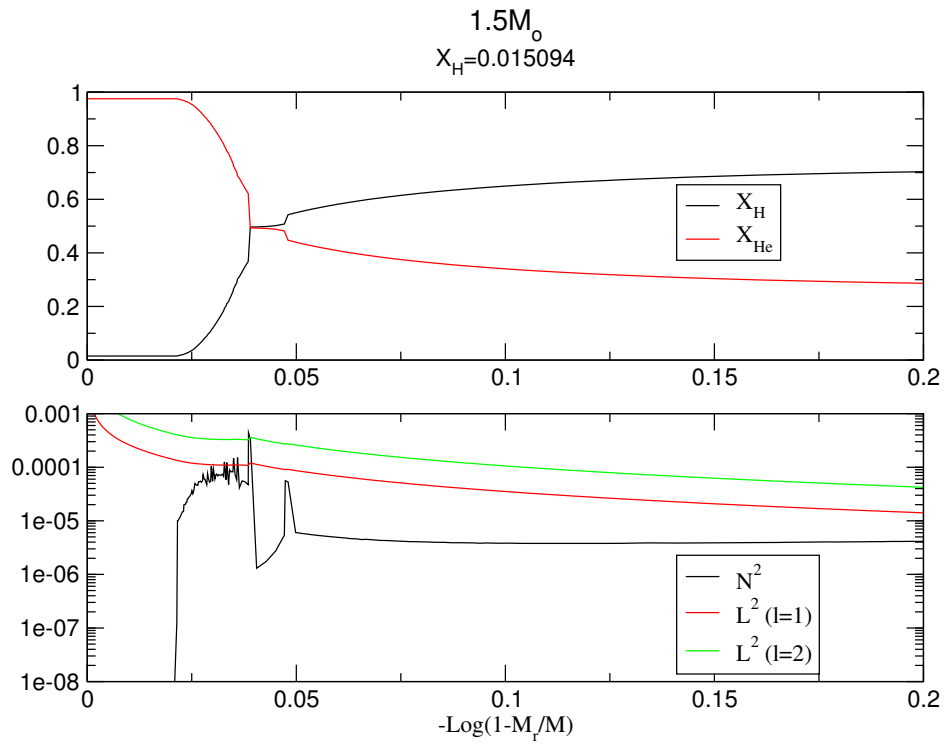
**Figura 3.6:** Panel superior: abundancia fraccional de hidrógeno y helio en función de la variable  $-\log(1 - M_r/M_*)$  para el “Modelo 300”. Panel inferior: Frecuencias características para el mismo modelo.

Väisälä a medida que evoluciona la estrella. En efecto hemos graficado,  $N^2$  para los modelos seleccionados en el panel inferior. En la tabla 3.1 están indicadas las abundancias centrales de hidrógeno para cada modelo.

Para estudiar en detalle la relación entre la estructura química de cada modelo y las frecuencias características se realizaron en un mismo gráfico un diagrama de las abundancias y de frecuencias.

En el panel superior de la Figura 3.6, se muestran las abundancias fraccionales de hidrógeno y helio para el “Modelo 300”, que tiene una abundancia central de hidrógeno de 0.511. Como ya mencionamos, notamos la presencia de un núcleo convectivo y algunos escalones en la región del gradiente de composición química. Estos escalones se ven reflejados en las frecuencias características. La frecuencia de Brunt-Väisälä tiene “picos” pronunciados en donde aparecen los escalones de las abundancias. La frecuencia de Lamb, no parece ser tan sensible a este cambio en las abundancias, pero aún así muestra un pequeño salto a la altura del escalón en el perfil de abundancias.

A medida que la estrella evoluciona (Figura 3.7), podemos notar que el gradiente químico es más ancho y se extiende abarcando un mayor rango



**Figura 3.7:** Igual que en Figura 3.6 para el “Modelo 1100”.

en la variable  $x = r/R$ . Esta zona de cambio paulatino en las abundancias se refleja en la frecuencia de Brunt-Väisälä mediante una ampliación del máximo presente, provocando de esta forma que el área debajo de la curva de la frecuencia de Brunt-Väisälä aumente.

De las Figuras 3.6 y 3.7 se puede apreciar que la frecuencia de Lamb es sensible al cambio del grado armónico, como bien lo indica su expresión y que para un mayor grado armónico  $l$  la frecuencia de Lamb toma valores mayores.

### 3.1. Modos de gravedad

Dadas las frecuencias bajas que se distinguen en las estrellas  $\gamma$  Doradus, el estudio de los modos de gravedad está asociado al comportamiento de estos objetos. Para un modelo estelar que presente un núcleo convectivo y un interior radiativo, como sucede en el caso de  $1,5M_{\odot}$  los períodos de bajo grado y alto orden radial de modos g, están dados por (Tassoul, 1980)

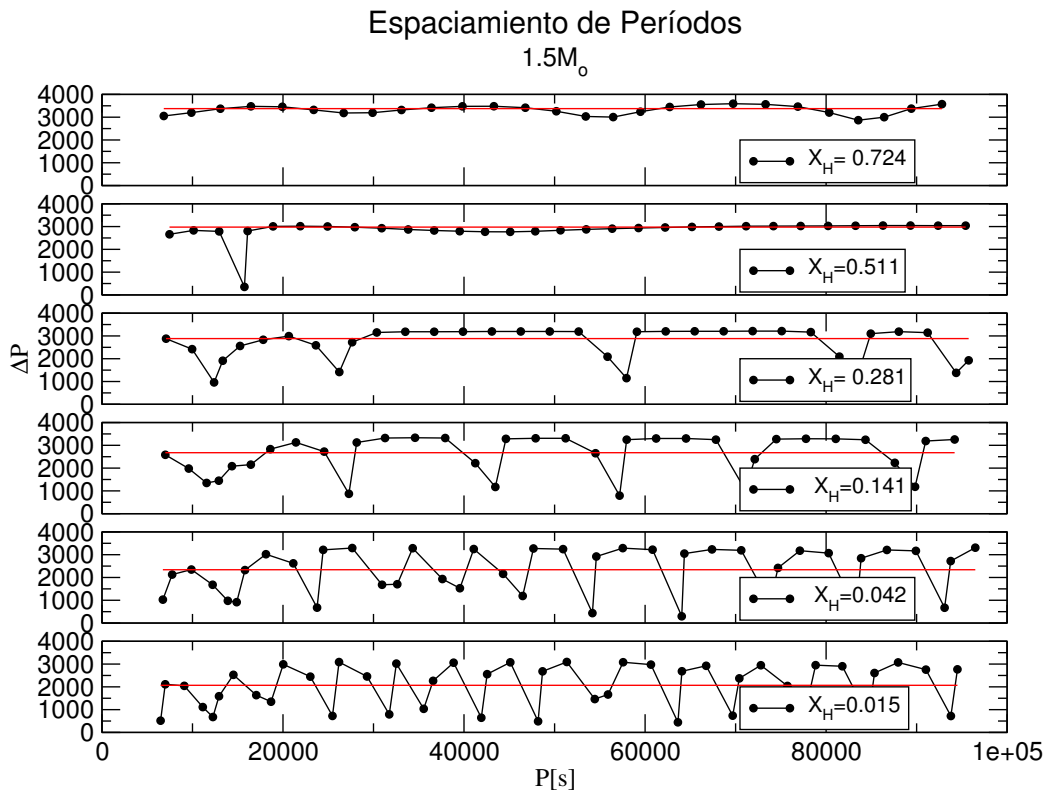
$$P_k = \frac{\pi^2}{L \int_{x_0}^1 \frac{|N|}{x} dx} (2k + n_e) \quad (3.6)$$

donde  $L = [l(l+1)]^{1/2}$  con  $l$  el grado armónico,  $n_e$  el índice politrópico efectivo de la capa superficial,  $x$  el radio normalizado  $r/R$ ,  $x_0$  corresponde al borde de la zona convectiva y  $k$  es el orden radial de los modos g. De la ecuación 3.6 podemos apreciar que los períodos son equiespaciados en  $k$  y este espaciamiento disminuye a medida que  $L$  aumenta. Se define al espaciamiento de períodos como:

$$\Delta P = P_{k+1} - P_k \quad (3.7)$$

Esta cantidad contiene información acerca del gradiente de composición química que deja la evolución del núcleo convectivo de la estrella en la Secuencia Principal (Miglio et al., 2008). En la Figura 3.8 graficamos dicho espaciamiento en función del período, considerando  $l = 1$ .

Puede observarse que para modelos cada vez más evolucionados, con menor cantidad de hidrógeno central, el espaciamiento de períodos es cada vez menor. Este resultado es consistente con la ecuación 3.6 dado que la integral de la frecuencia de Brunt-Väisälä es cada vez mayor, para modelos más evolucionados. (Ver Figuras 3.3 o Figuras 3.6 y 3.7). La razón de este comportamiento para la frecuencia de Brunt-Väisälä es el impacto que tiene el gradiente de composición química en su expresión.



**Figura 3.8:** Caso  $l = 1$ . Espaciamento asintótico de períodos vs. período para los 6 modelos seleccionados. La abundancia central de hidrógeno  $X_H$  está indicada en cada panel. Las líneas horizontales indican el espaciamento asintótico constante, predicho por la aproximación asintótica

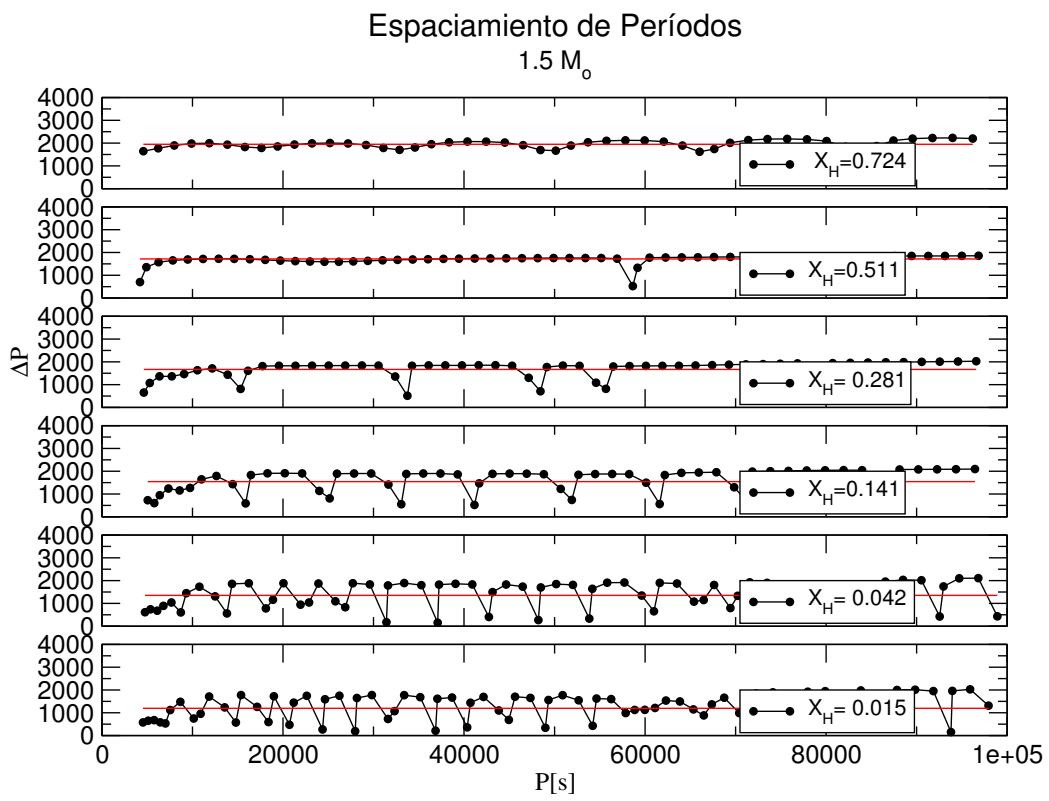


Figura 3.9: Igual que en Figura 3.8 pero para el caso  $l = 2$ .

La presencia de mínimos en las Figuras 3.8 y 3.9 se debe a la existencia del gradiente de composición química, que produce un apartamiento de un espaciamiento de períodos uniforme. Este espaciamiento depende de la forma y ubicación del gradiente de composición química, de hecho a medida que la estrella evoluciona y el gradiente se extiende en una región más grande, la cantidad de mínimos aumenta para estos modelos más evolucionados.

Para el estudio del comportamiento del espaciamiento de períodos en función del grado armónico  $l$ , se realizaron las correspondientes simulaciones con  $l = 2$ . Los resultados obtenidos pueden apreciarse en la Figura 3.9. Se observa que para un mayor grado armónico, el espaciamiento asintótico de períodos es menor; resultado también consistente con la ecuación 3.6 dada la dependencia de esta cantidad con el grado armónico. Se nota también la presencia de una mayor cantidad de mínimos cuando  $l$  aumenta.

### 3.1.1. Energía cinética y autofunciones

Podemos expresar a la energía cinética de oscilación como:

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2}\sigma^2 \int_V \rho \vec{\xi}(\vec{r}) \cdot \vec{\xi}^*(\vec{r}) dV \\ &= \frac{1}{2}(GM_* R_*^2)\omega^2 \int_0^1 x^2 \rho \left[ x^2 y_1^2 + x^2 \frac{l(l+1)}{(C_1 \omega^2)^2} y_2^2 \right] dx \quad (3.8) \end{aligned}$$

donde  $\vec{\xi}(\vec{r})$  representa el autovector desplazamiento Lagrangiano asociado al modo de pulsación; y las expresiones para  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $\omega$  y  $C_1$  fueron dadas en las ecuaciones 2.15, 2.16, 2.22 y 2.23.

A partir de esta cantidad, sólo es posible hacer un análisis cualitativo, debido a que las autofunciones están normalizadas arbitrariamente. De la expresión anterior, vemos que la energía cinética irá disminuyendo a medida que nos acerquemos a la superficie estelar, ya que la densidad disminuye en este sentido.

En las Figuras 3.10 y 3.11 graficamos el logaritmo de la energía cinética en función del período, para  $l = 1$  y  $l = 2$  respectivamente. Puede apreciarse en ambos gráficos que a medida que tomamos modelos más evolucionados, aparece una mayor cantidad de máximos. Los máximos de  $E_{cin}$  son relativamente angostos y bien definidos, mientras que los mínimos son más anchos y se extienden a 2 ó 3 modos con energía mínima relativa. Además observamos que para  $l = 1$ , estos máximos están más separados que para  $l = 2$ .

El estudio de la energía cinética está asociado con el estudio del fenómeno de atrapamiento de los modos g. Se dice que un modo está atrapado en una

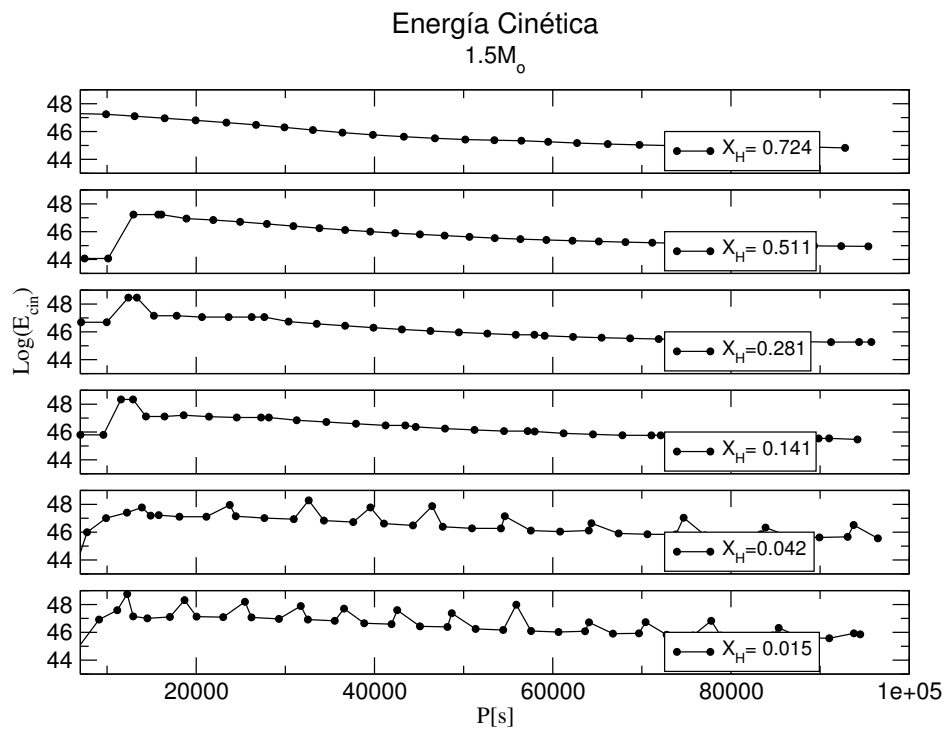


Figura 3.10: Caso  $l = 1$ .  $\log(E_{cin})$  vs.  $P[s]$  para los modelos seleccionados.

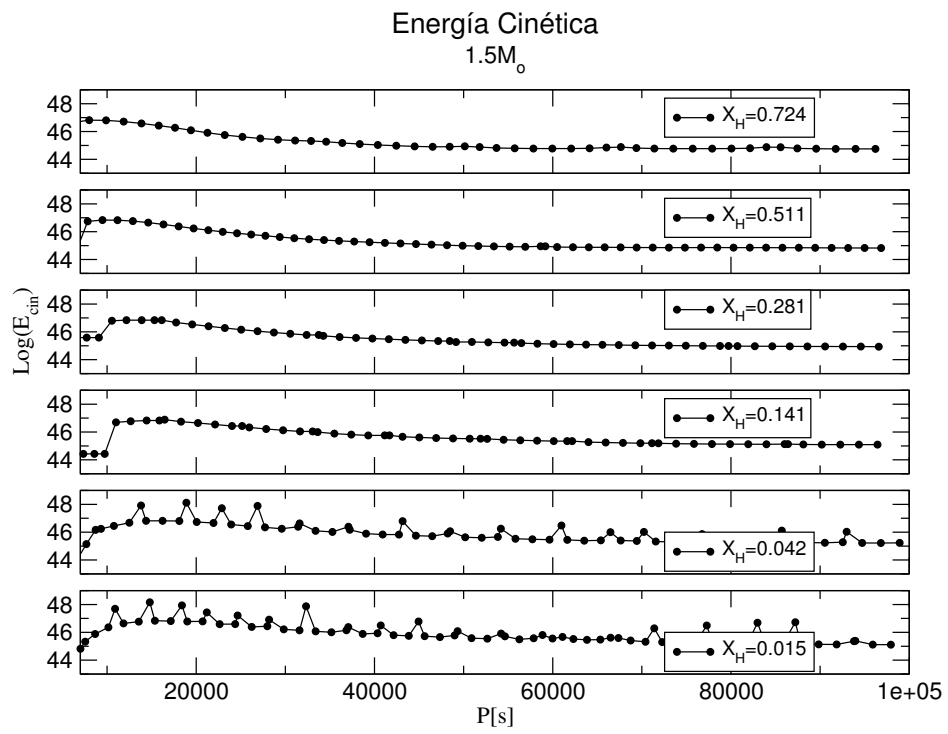
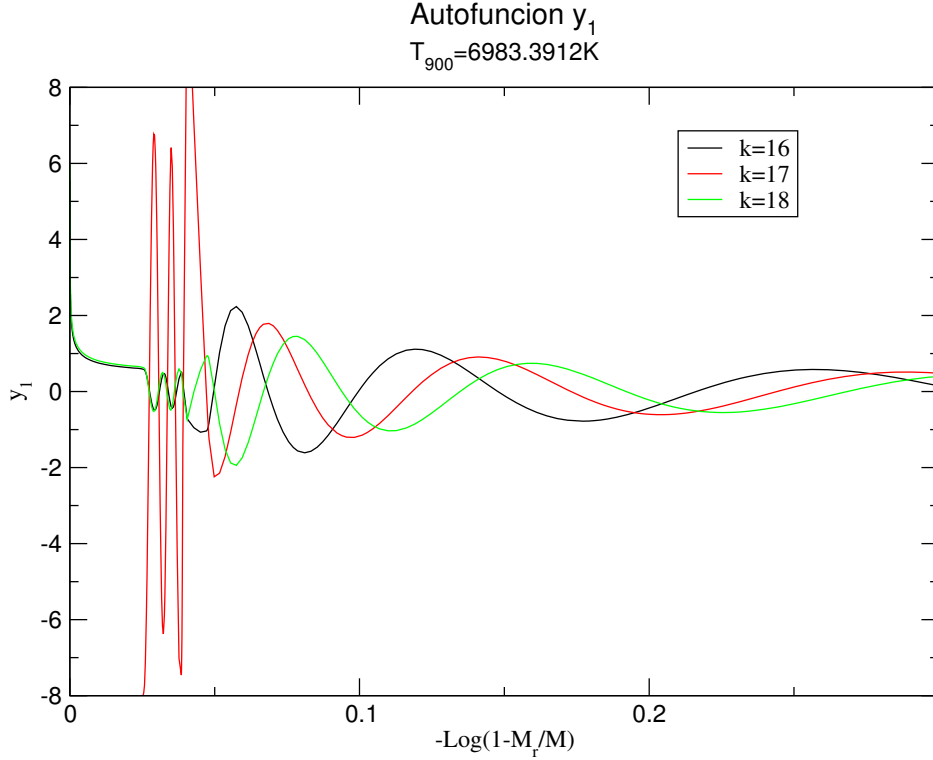


Figura 3.11: Caso  $l = 2$ .  $\log(E_{cin})$  vs.  $P[s]$  para los modelos seleccionados.



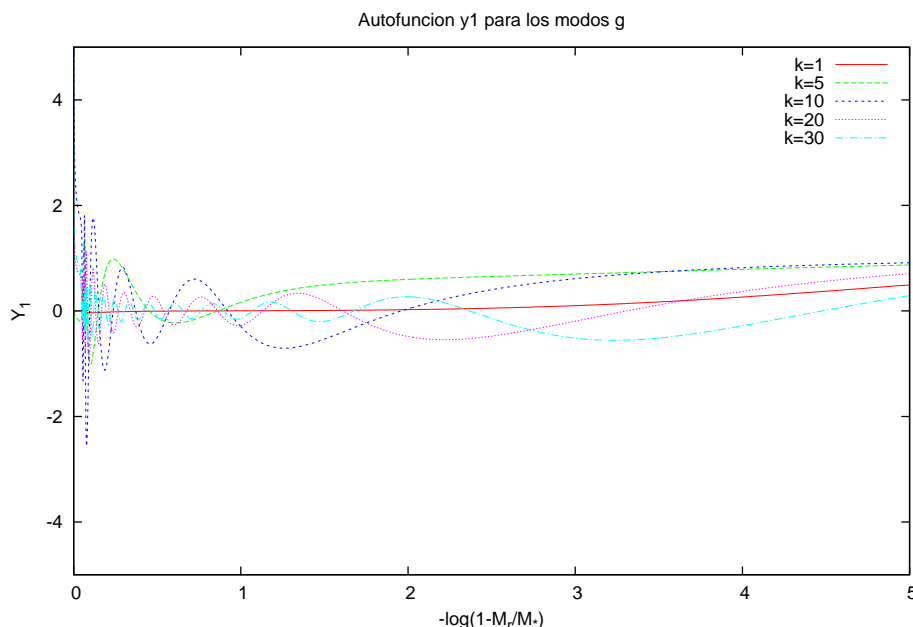


**Figura 3.12:** Autofunción  $y_1$  correspondiente a un máximo de energía cinética ( $k = 17$ ) y sus modos vecinos ( $k = 16$  y  $k = 18$ ), extraídas del “Modelo 900”, para  $l = 1$ .

región cuando su amplitud es mayor que lo usual en dicha zona, pero ésta es sólo una denominación dado que oscilan en toda la estrella, aunque con menor amplitud.

Para el estudio del fenómeno de atrapamiento, estudiamos el comportamiento de las autofunciones de un modo asociado a un máximo de energía cinética y sus modos vecinos (con orden radial  $\Delta k = \pm 1$ ). Para tal fin, elegimos del “Modelo 900” para  $l = 1$  el máximo que se corresponde con  $k = 17$  y sus vecinos  $k = 16$  y  $k = 18$ . En la Figura 3.12 graficamos la autofunción  $y_1$  para dichos modos. La autofunción adimensional  $y_1$  (ecuación 2.15) está normalizada de manera tal que en la superficie estelar  $y_1 = 1$ .

Se observa del gráfico que la autofunción  $y_1$  correspondiente al modo asociado a un máximo de energía cinética ( $k = 17$ ), muestra amplitudes relativamente grandes en la región donde se extiende el gradiente químico, en comparación con sus modos vecinos  $k = 16$  y  $k = 18$ . Este hecho es consistente con la ecuación 3.8, la cual predice que la energía cinética es mayor para los modos que poseen amplitudes mayores en la región de alta



**Figura 3.13:** Autofunción  $y_1$  para los modos g con valores seleccionados de orden radial correspondientes al “Modelo 1100”, para  $l = 1$ .

densidad.

Las autofunciones de los modos vecinos “normales” y la del modo “atrapado” se vuelven evanescentes en la región del núcleo convectivo central y no oscilan. Esto significa que los modos g no se propagan en zonas convectivas.

La existencia de estos modos atrapados, con energía cinética alta, explica los apartamientos en el espaciamiento de períodos  $\Delta P$ .

En la Figura 3.13 graficamos la autofunción  $y_1$  para los modos de gravedad. Notamos una mayor amplitud en las capas internas para estos modos lo cual indica que son propios del interior más profundo de la estrella.

Por último, las Figuras 3.8 y 3.10 muestran una tendencia entre los mínimos y máximos, respectivamente, a acercarse entre sí a medida que la concentración de hidrógeno disminuye en el centro. A medida que la evolución procede, disminuye el radio del núcleo convectivo y deja a su paso un gradiente de composición química (que se refleja con un pico en el perfil de la frecuencia de  $N^2$ ). Existe una relación entre la ubicación de este pico en la

frecuencia de Brunt-Väisälä y el borde del núcleo convectivo, mientras más separados se encuentren el borde del núcleo convectivo y la ubicación del pico en la frecuencia, el ciclo de períodos es menor y provoca una mayor cantidad de mínimos en  $\Delta P$  y máximos en  $E_{cin}$ . En el límite en el cual el borde del núcleo coincide con la ubicación del gradiente químico, el ciclo de los mínimos en  $\Delta P$  ( y máximos en  $E_{cin}$ ) es infinito, es decir no hay mínimos en  $\Delta P$ .

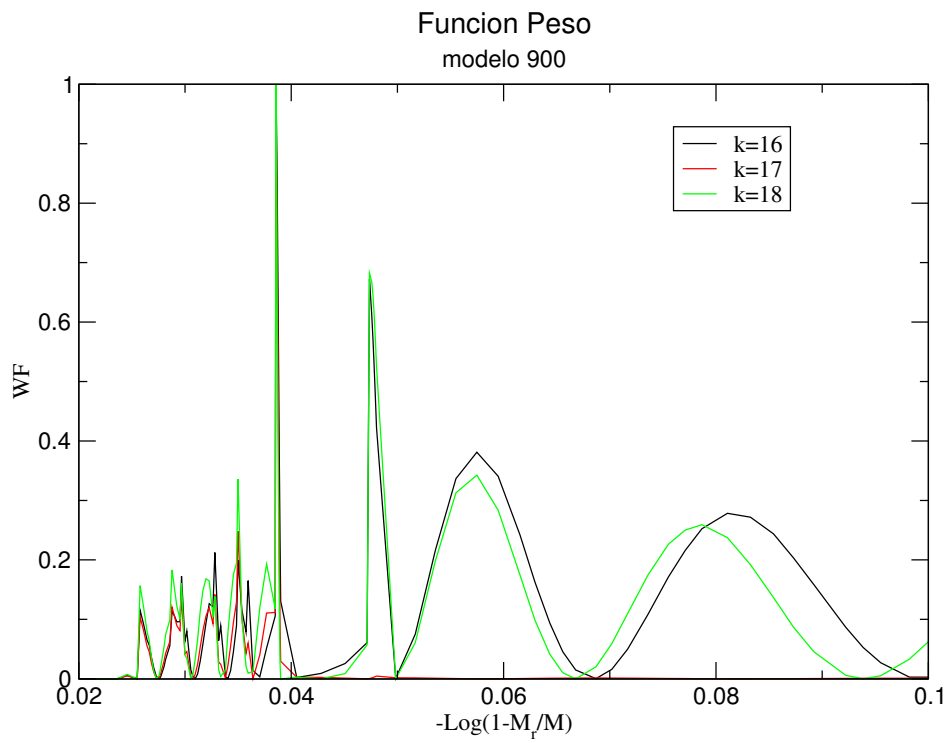
### 3.1.2. Función peso

La “función peso” proporciona información acerca de la contribución de una región considerada al período de un modo y por lo tanto es útil para el estudio de las regiones de formación de modos. Su expresión analítica está dada por:

$$W(x) = (4\pi GR_*^2) \frac{x^2 \rho^2}{U} \left[ A^* y_1^2 + V_g (y_2 - y_3)^2 - \frac{1}{U} l(l+1) y_3 + y_4^2 \right] \quad (3.9)$$

donde  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  y  $y_4$  son las autofunciones adimensionales (ecuaciones 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18) y  $V_g$ ,  $U$  y  $A^*$  están dadas por las ecuaciones 2.19, 2.20 y 2.21.

Se graficaron las funciones peso de los modos seleccionados en la sección anterior en la Figura 3.14 y obtuvimos los siguientes resultados: para el modo atrapado ( $k = 17$ ), que se corresponde con un máximo de energía cinética, la función peso sólo toma valores significativos en la región donde se extiende el gradiente de composición química y toma valores nulos o casi nulos en otras regiones. Para los modos vecinos que denominamos “normales” observamos un comportamiento similar en esta región pero a diferencia del caso anterior, la función peso toma valores no nulos en la región externa próxima a la zona de transición química, aunque continúa decreciendo hacia el exterior. Este comportamiento indica que la región que tiene un impacto significativo en la formación de períodos de modos g atrapados es aquella donde se extiende el gradiente de composición química y que las regiones más externas de la estrella no influyen. Para los modos normales vecinos, también es casi nula la contribución de la envoltura a la formación de períodos aunque existe una pequeña región luego de la transición en donde la amplitud de función peso posee valores no nulos y por lo tanto contribuye a la formación de períodos. Globalmente, este comportamiento es compatible con el hecho de que los modos g son propios del interior profundo estelar.



**Figura 3.14:** Función peso para los modos g,  $k = 17$  (atrapado) y sus vecinos “normales” ( $k = 16$  y  $k = 18$ ) correspondientes al “Modelo 900” para el caso  $l = 1$ .

## 3.2. Modos de presión

El estudio de los modos de presión está relacionado con el comportamiento pulsacional de las estrellas  $\delta$  Scuti. Para estrellas químicamente homogéneas, la teoría asintótica desarrollada por [Tassoul \(1980\)](#), predice el siguiente espectro de frecuencias:

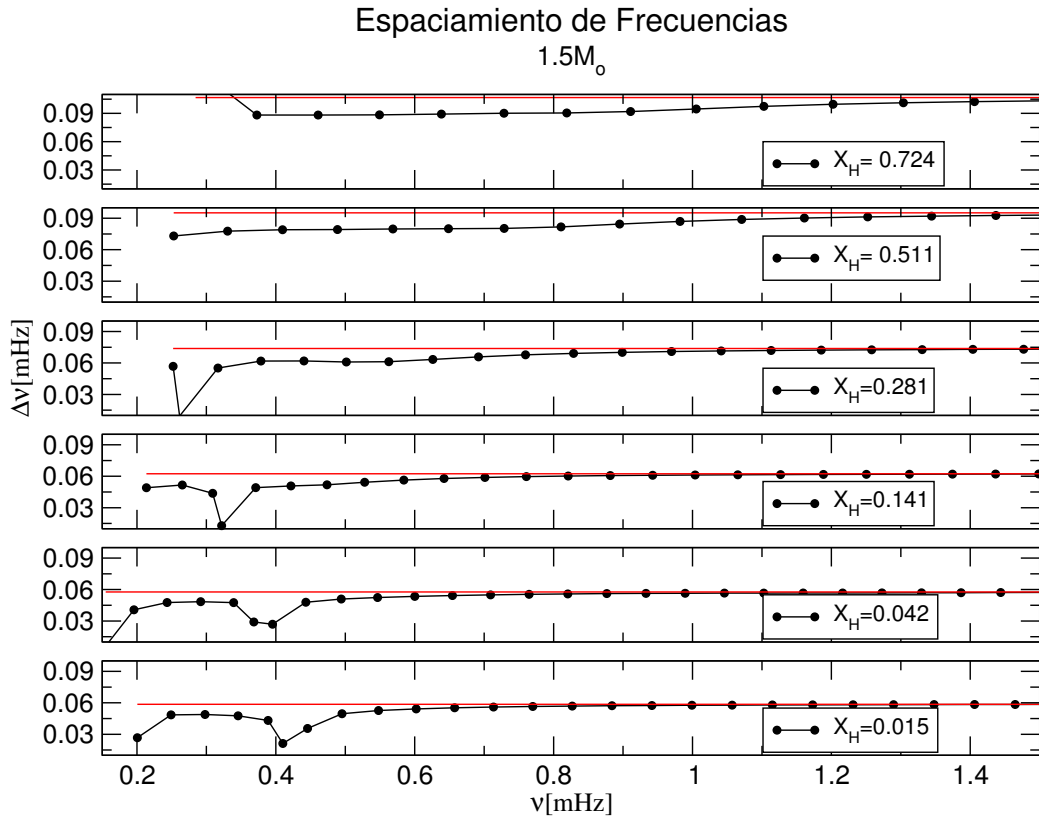
$$\nu_{kl} \approx \left( k + \frac{l}{2} + \frac{n_e}{2} + \frac{1}{4} \right) \left( 2 \int_0^R \frac{dr}{C_S} \right)^{-1} \quad (3.10)$$

donde  $n_e$  es el índice politrópico de las capas superficiales y  $C_S(r)$  la velocidad del sonido local adiabática, dada por  $C_S = \left( \frac{\Gamma_1 P}{\rho} \right)^{1/2}$ . De manera análoga a lo que ocurre para el espaciado de períodos en el límite de alto orden radial, se espera que el espaciado de frecuencias entre los modos  $p$  consecutivos se vuelva constante y la teoría predice que toma el valor:

$$\Delta\nu = \nu_{k+1} - \nu_k = \left( 2 \int_0^R \frac{dr}{C_S} \right)^{-1} \quad (3.11)$$

En las Figuras [3.15](#) y [3.16](#) se muestran las distribuciones del espaciado de frecuencias para los casos de  $l = 1$  y  $l = 2$  respectivamente. Notamos en ambos casos la presencia de un mínimo absoluto a partir del “Modelo 500” y a medida que tomamos modelos más evolucionados, este mínimo se desplaza hacia frecuencias mayores. Para el caso de  $l = 2$  el desplazamiento es mayor. La línea horizontal en cada modelo indica el espaciado asintótico constante predicho por la teoría de [Tassoul \(1980\)](#). Esta teoría predice que para altos valores de  $k$ ,  $\Delta\nu$  es constante y se puede apreciar de los gráficos que el comportamiento global de los modos  $p$  es consistente con este resultado. Además se ve reflejado en los gráficos que el espaciado asintótico de frecuencias es independiente del valor de  $l$  como lo indica la ecuación [3.11](#).

A diferencia de los modos  $g$ , las propiedades de los modos acústicos están íntimamente vinculadas con la frecuencia característica de Lamb. Esta frecuencia depende explícitamente de la velocidad del sonido en el medio  $C_s(r)$  y dado que ésta es función de la densidad, también resulta sensible, aunque en menor medida, a los cambios en la composición química como puede observarse en las Figuras [3.6](#) y [3.7](#). En dichas figuras, la frecuencia de Lamb presenta una región casi horizontal que se corresponde con la zona en donde se extiende el gradiente de composición química en el interior estelar.



**Figura 3.15:** Caso  $l = 1$ . Espaciamento asintótico de frecuencias vs. frecuencia para los 6 modelos seleccionados. La abundancia central de hidrógeno  $X_H$  de cada modelo está indicada en cada panel. Las líneas horizontales indican el espaciamento asintótico constante, predicho por la teoría asintótica

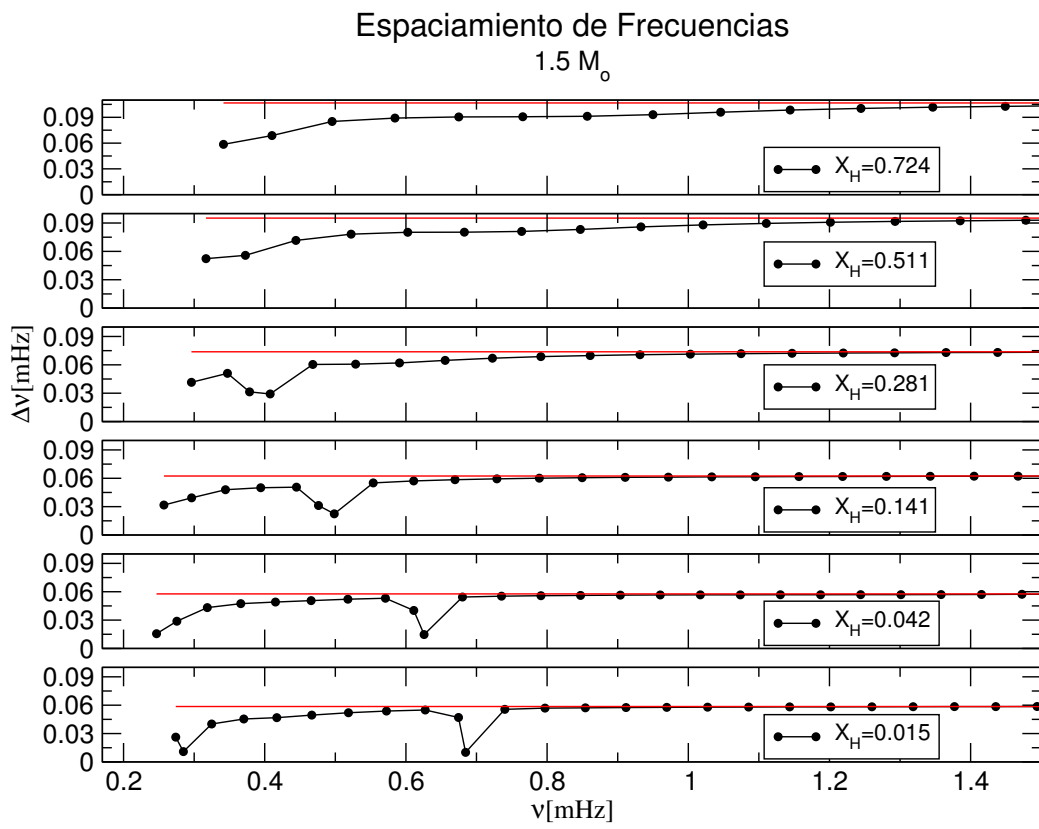
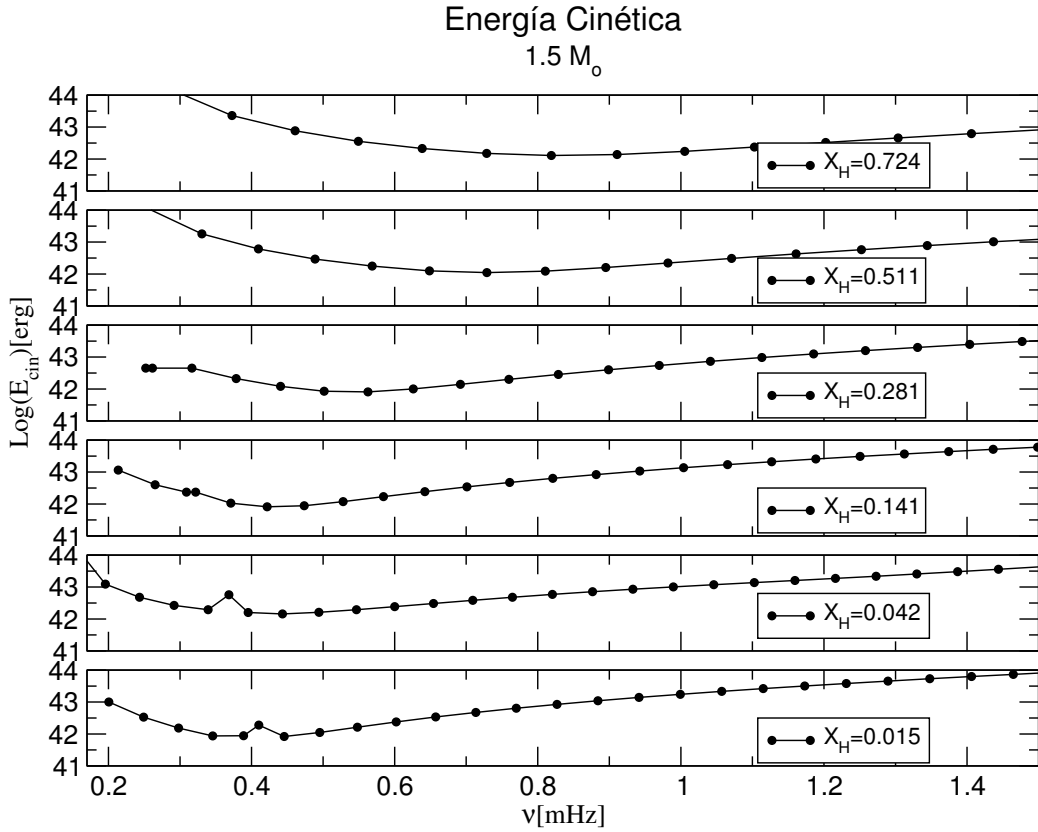


Figura 3.16: Igual que Figura 3.15 pero para el caso  $l = 2$



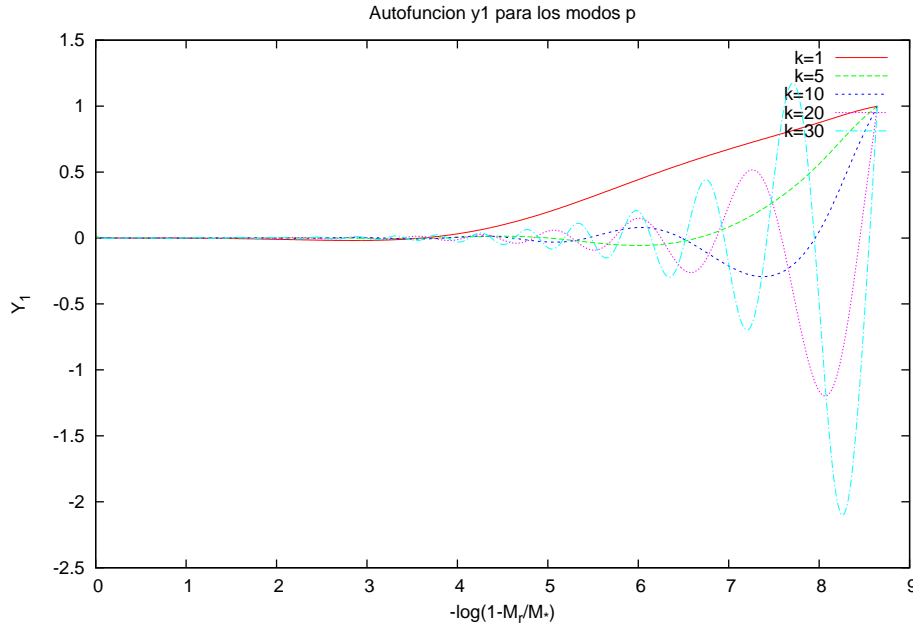
**Figura 3.17:** Caso  $l = 1$ .  $\log(E_{cin})$  vs.  $\nu$ [mHz] para los modelos seleccionados.

### 3.2.1. Energía cinética y autofunciones

En la Figura 3.17 graficamos la energía cinética para los modos de presión correspondientes al caso de  $l = 1$ . La forma general de la curva, a diferencia de lo que ocurre para los modos g, es suave. Presenta un decrecimiento en la región de bajo orden radial, seguido por un amplio mínimo absoluto (que se desplaza hacia mayores frecuencias a medida que se toman modelos más evolucionados) y luego vuelve a crecer para regiones de alto orden radial. En el “Modelo 900” y en el “Modelo 1100” aparece un máximo relativo, a bajas frecuencias. Para explorar el origen de este máximo, examinaremos las autofunciones de un modo con máxima energía cinética y los modos con ordenes radiales adyacentes.

El comportamiento general de la autofunción  $y_1$  para los modos p puede observarse en la Figura 3.18. Se observa una mayor amplitud de oscilación relativa en las capas externas de la estrella, lo que indica que los modos



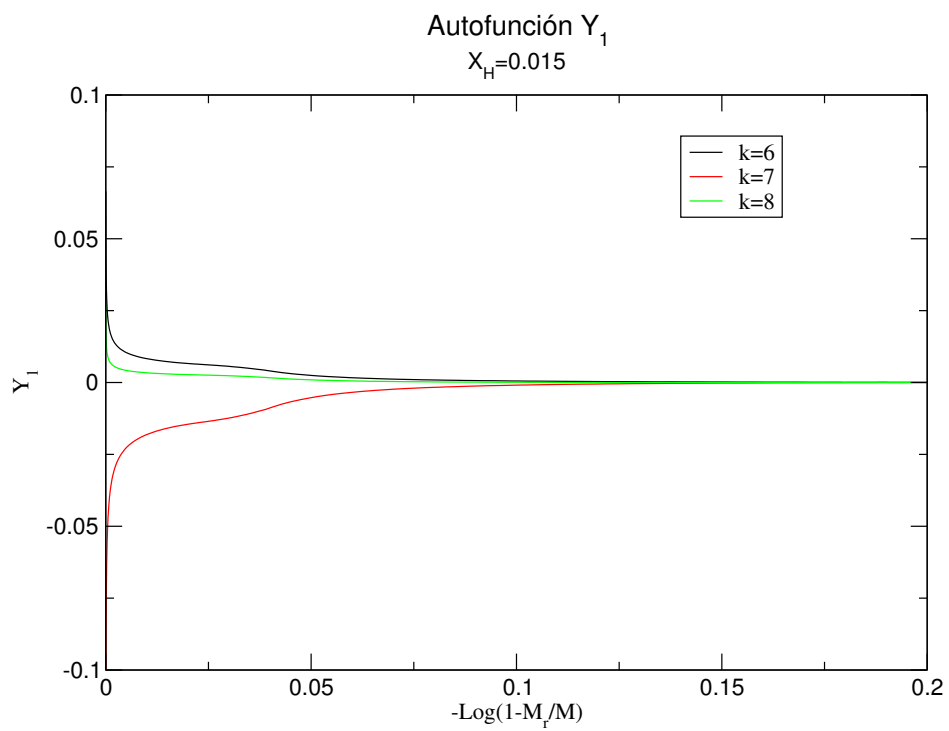


**Figura 3.18:** Autofunción  $y_1$  para los modos  $p$  con valores seleccionados de orden radial correspondientes al "Modelo 1100", para  $l = 1$ .

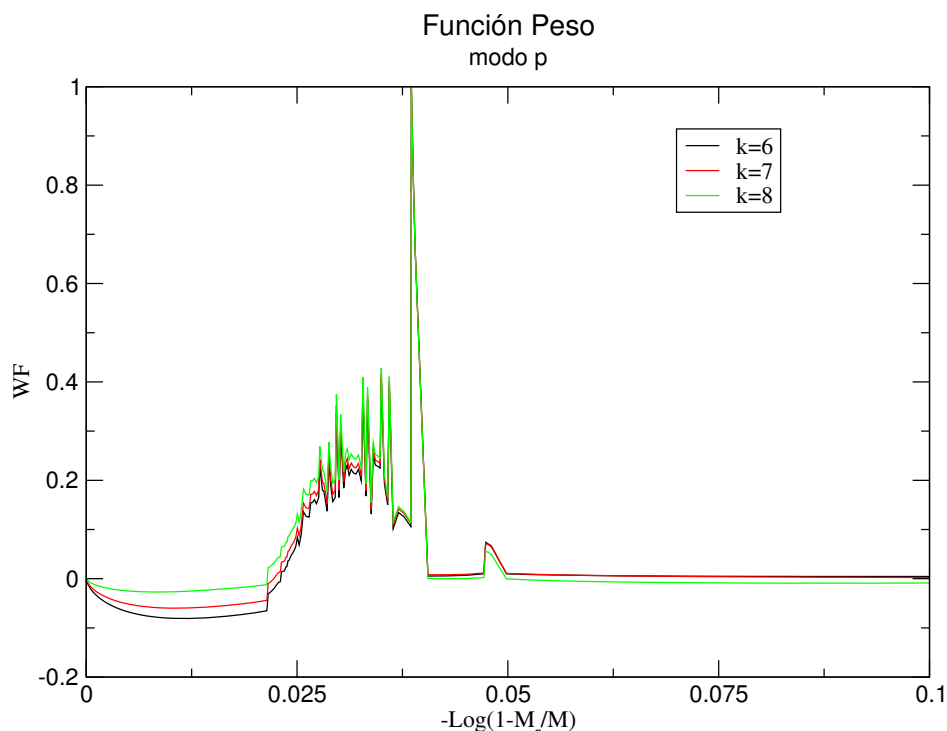
acústicos son propios de la envoltura.

Un estudio detallado del modo que presenta un máximo en la energía cinética para el "Modelo 900" ( $k = 7$ ) evidencia una amplitud sustancialmente mayor en el interior del núcleo convectivo en comparación a los modos "normales" vecinos ( $k = 6$  y  $k = 8$ ) (ver Figura 3.19). Este comportamiento es consistente con el hecho de que una amplitud grande en el núcleo (en módulo), provoca una mayor energía cinética del modo (ver ecuación 3.8).

El crecimiento de la curva de energía cinética luego del mínimo extendido se debe al aumento en las amplitudes de las autofunciones de los modos  $p$  en las regiones externas. El decrecimiento inicial, se debe a que en las regiones de menor densidad se requiere menor cantidad de energía para oscilar, y como los modos  $p$  correspondientes a bajos órdenes radiales son los más profundos (densidades altas), a medida que aumenta el valor de  $k$  (aumenta  $\nu$  y disminuye la densidad) la energía cinética disminuye hasta alcanzar el mínimo.



**Figura 3.19:** Autofunción  $y_1$  correspondiente a un máximo de energía cinética ( $k = 7$ ) y sus modos vecinos ( $k = 6$  y  $k = 8$ ), correspondientes al “Modelo 1100”, para  $l = 1$ .



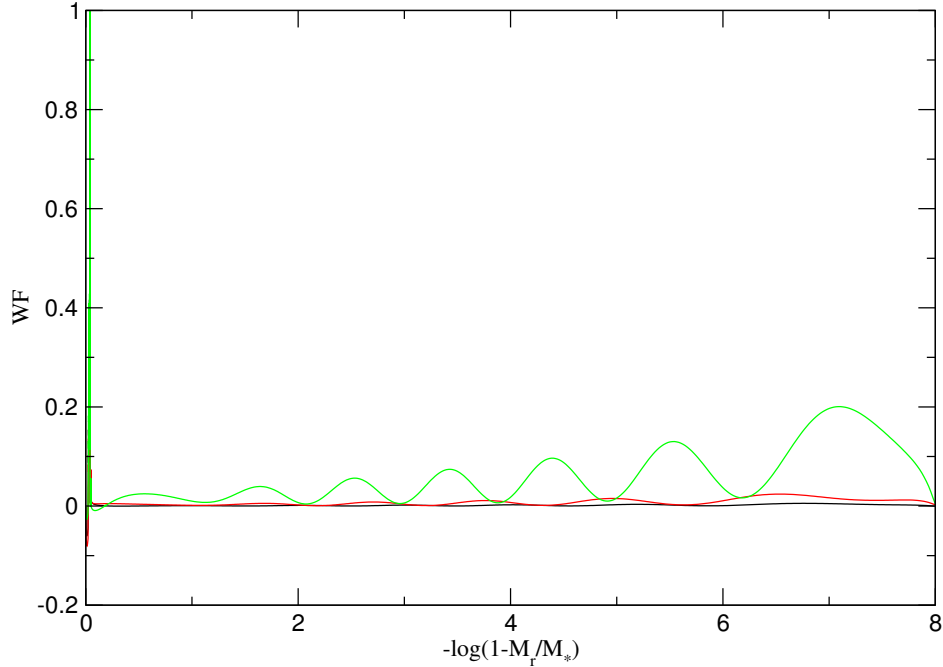
**Figura 3.20:** Función peso correspondiente a un máximo de energía cinética ( $k = 7$ ) y sus modos vecinos ( $k = 6$  y  $k = 8$ ), correspondientes al “Modelo 1100”, para  $l = 1$ .

### 3.2.2. Función peso

Para estudiar las regiones que contribuyen a la formación de frecuencias en los modos p, hicimos un estudio a partir de la función peso, para dichos modos, similar a lo realizado para los modos g. En la Figura 3.20 graficamos la función peso para el modo correspondiente al máximo de energía cinética ( $k = 7$ ) y sus modos vecinos ( $k = 6$  y  $k = 8$ ) para el “Modelo 1100” y el caso  $l = 1$ . Notamos que la función peso para el modo p correspondiente a  $k = 7$  no difiere demasiado de la función peso correspondiente a sus modos normales vecinos y que la región del núcleo convectivo no es significativa para la formación de frecuencias de los modos p, pero la zona en donde se extiende el gradiente químico sí lo es.

La función peso posee un máximo justo al comienzo de lo que pareciera ser, observando el diagrama de abundancias para este modelo (Figura 3.7), una segunda región convectiva. Podemos decir entonces que la región de transición química influye en la formación de frecuencias de modos p.

Sin embargo, el comportamiento global de la función peso para los modos

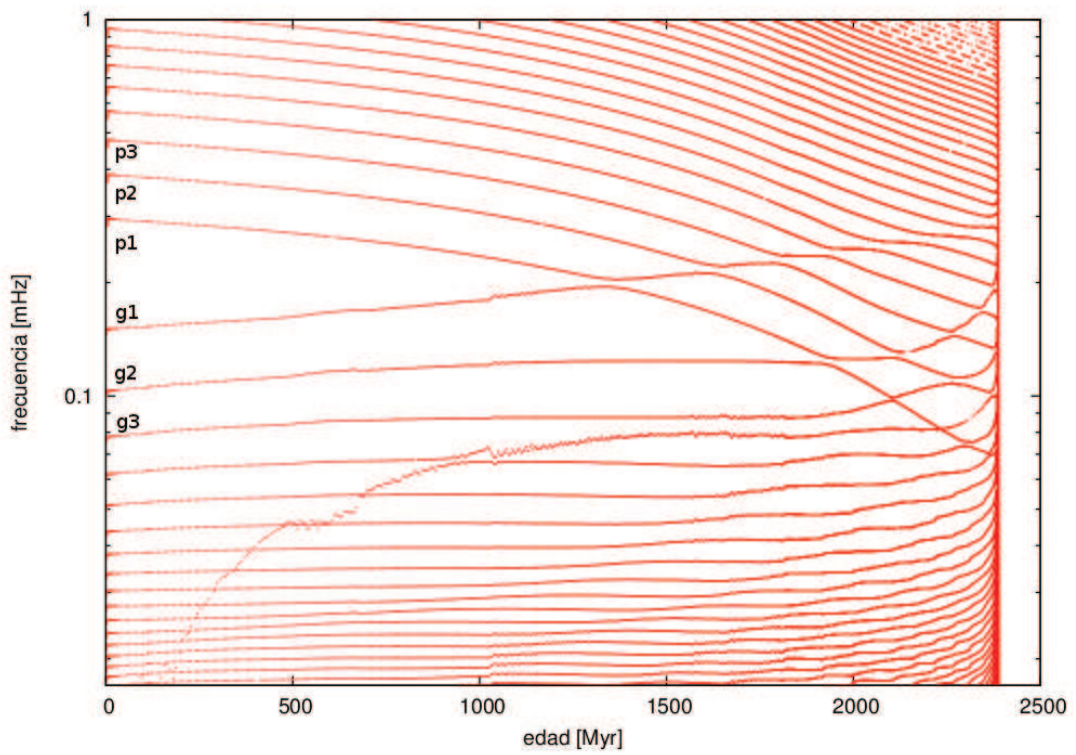


**Figura 3.21:** Función peso para los modos p correspondientes a los órdenes radiales  $k = 6, 7$  y  $8$  para el “Modelo 1100” en el caso  $l = 1$ .

p, presenta mayor amplitud en un amplio espectro de la variable  $-\log(1 - M_r/M_*)$  situado en las capas externas del modelo, como puede apreciarse en la Figura 3.21. Es decir que en general son modos de envoltura.

### 3.2.3. Evolución temporal de los períodos de pulsación

Para completar el estudio de las propiedades de los distintos modos, analizamos el comportamiento de éstos a lo largo de la evolución estelar durante la Secuencia Principal. En la Figura 3.22 graficamos la frecuencia en función de la edad de la estrella. Los modos p, que se corresponden a frecuencias altas, ocupan la región superior del gráfico; mientras que los modos g, la zona inferior. Puede observarse la aparición del fenómeno de “avoided crossing”. Este fenómeno ocurre cuando los períodos de los modos g alcanzan valores suficientemente cercanos a los períodos de los modos p y dan lugar, como resultado a la aparición de modos mixtos. Los modos mixtos poseen alternativamente características de ambos modos. También se observa el fenómeno de “avoided crossing” entre distintos órdenes radiales del mismo modo, en la figura vemos que el modo  $p_1$  sufre un “avoided crossing” con el modo  $p_2$ , el  $p_2$  con el  $p_3$ , etc. El origen del nombre se debe a que en la teoría de pulsaciones



**Figura 3.22:** Evolución temporal de las frecuencias de pulsación correspondientes a los modos de presión y gravedad, en función de la edad para una estrella con  $1,5M_{\odot}$  y  $l = 1$  durante la Secuencia Principal.

| Nombre     | Masa           | $T_{eff}$ (K) | Edad( $10^6$ años) |
|------------|----------------|---------------|--------------------|
| Modelo 1,3 | $1,3M_{\odot}$ | 6910          | 1720,7990          |
| Modelo 1,5 | $1,5M_{\odot}$ | 7491          | 1149,8931          |
| Modelo 1,8 | $1,8M_{\odot}$ | 8434          | 694,17783          |

**Tabla 3.2:** Nombre, masa, temperatura efectiva, y edad de los modelos seleccionados en el diagrama H-R de la Figura 3.23.

estelares no está permitido que dos períodos se crucen (Unno et al., 1989). Los modos que se encuentran en esta situación tienden a repelerse entre sí, intercambiando sus propiedades.

Se observa que los modos g de alto orden radial presentan este fenómeno en etapas tardías de la Secuencia Principal, mientras que para los modos p, ocurre recién a una edad aproximada de 1300 Myr para bajos ordenes radiales. Además, notamos la presencia de un modo “espúreo” a bajas frecuencias; este modo es un artificio de los cálculos, que aparece en general con cero nodos radiales y no representa un modo propio.

### 3.3. Influencia de la masa estelar

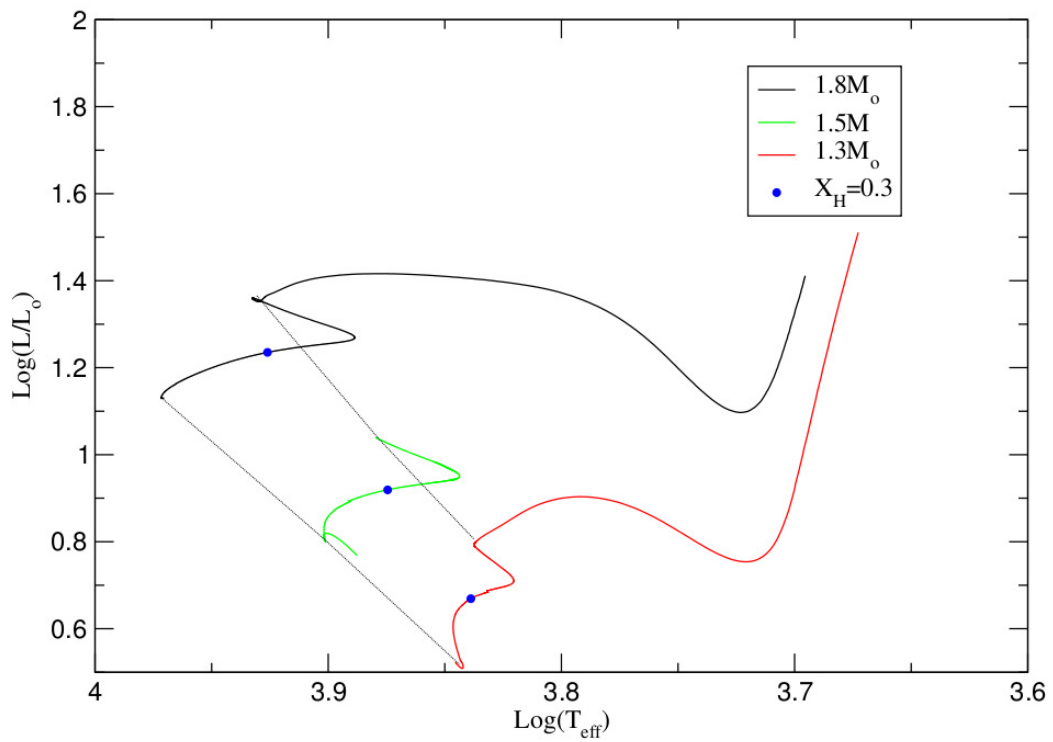
En esta sección estudiaremos cómo se ven afectadas las características pulsacionales de los diferentes modos con la masa estelar. Para ello, consideramos tres modelos estelares con distintas masas:  $1,3M_{\odot}$ ,  $1,5M_{\odot}$  y  $1,8M_{\odot}$  y realizamos las simulaciones correspondientes, limitándolas al caso de  $l = 1$ . Todos estos modelos fueron computados con la misma composición química inicial ( $X_H = 0,725$ ). La Figura 3.23 muestra el diagrama H-R para las estrellas con  $1,3M_{\odot}$ ,  $1,5M_{\odot}$  y  $1,8M_{\odot}$ . Seleccionamos para cada masa un modelo con igual abundancia central de hidrógeno, indicado en la figura con un punto azul. En la Tabla 3.2 se muestran las propiedades de cada modelo.

El perfil de la abundancia de hidrógeno para estos modelos se muestra en el panel superior de la Figura 3.24. Se observa que el tamaño del núcleo convectivo es mayor para masas mayores y que la región del gradiente de composición química se extiende más para los modelos más masivos. Esto se ve reflejado en los picos de la frecuencia de Brunt-Väisälä (panel inferior).

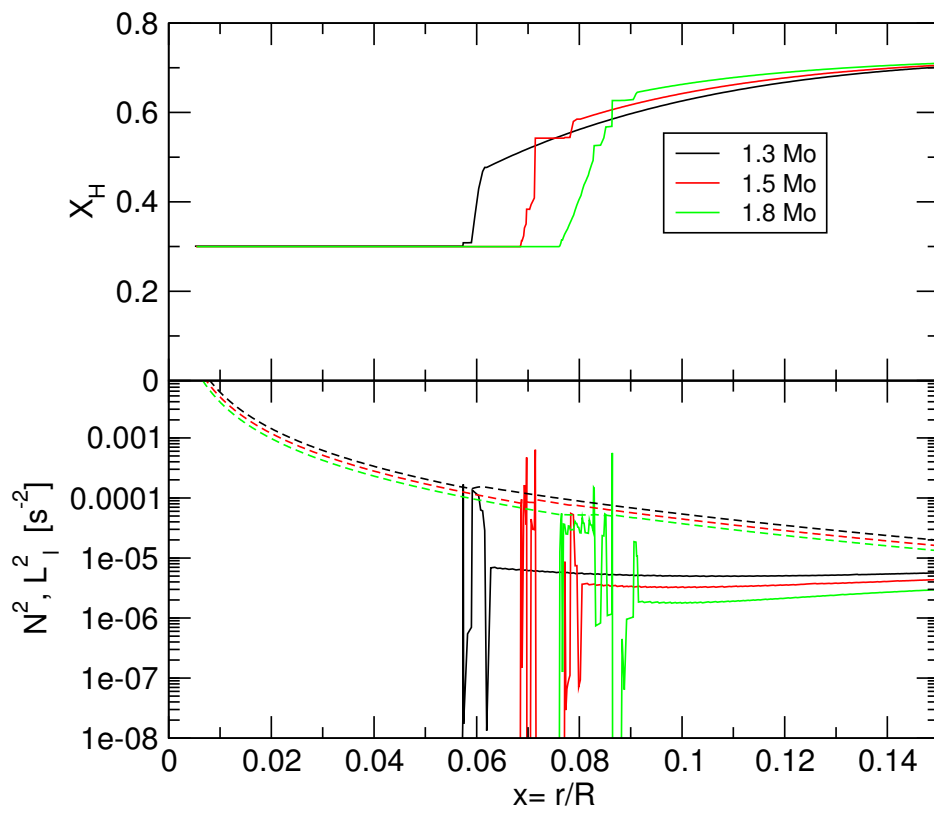
#### 3.3.1. Modos de gravedad

Como mencionamos anteriormente, la marca que deja el comportamiento del núcleo convectivo en el perfil de abundancia química, tiene una fuerte influencia en la frecuencia Brunt-Väisälä. En el panel inferior de la Figura

Diagrama H-R



**Figura 3.23:** Diagrama H-R para las masas indicadas. El punto azul en cada track indica el modelo seleccionado para una misma abundancia central de hidrógeno ( $X_H = 0,3$ ). La línea superior se corresponde al instante en que  $X_H = 0$ . La banda indica la Secuencia Principal.



**Figura 3.24:** Panel Superior: perfil de abundancia de hidrógeno para los modelos seleccionados indicados en la Tabla 3.2. Panel Inferior: frecuencias de Brunt-Väisälä (líneas llenas) y Lamb (líneas de trazos) para los mismos modelos.



3.24 están graficadas las frecuencias de Brunt-Väisälä para los tres modelos con diferentes masas a una composición química fija ( $X_H = 0,3$ ).

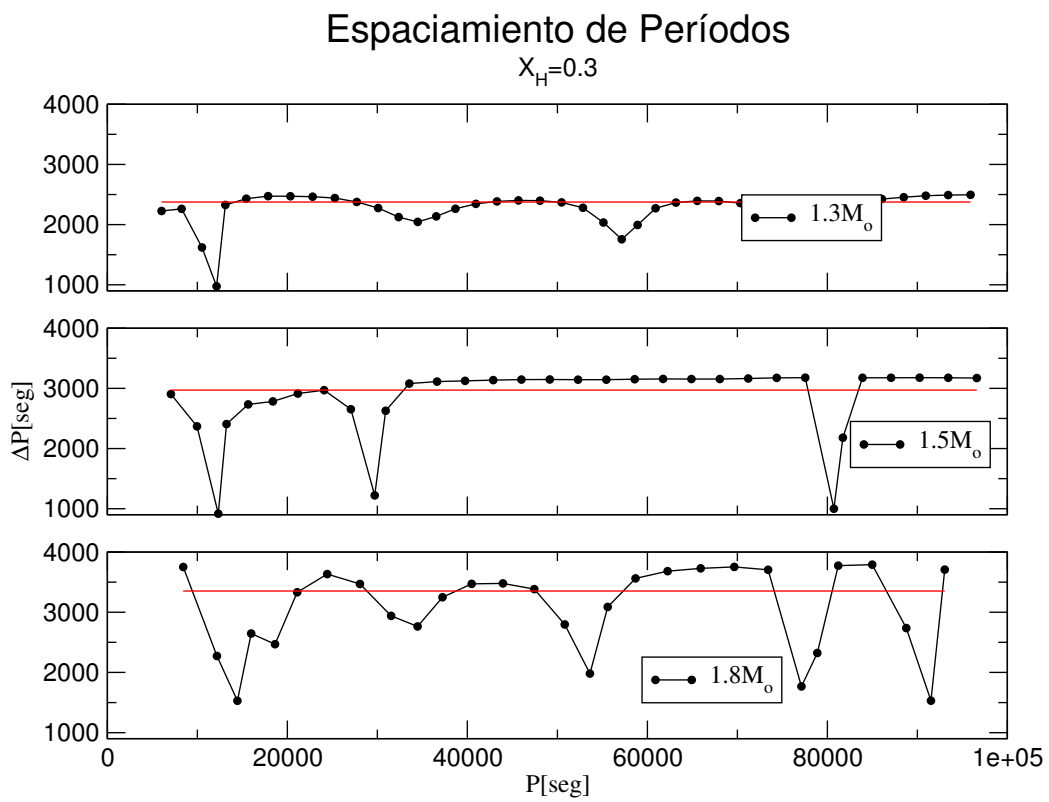
Observamos que el quiebre que se presenta en la frecuencia cuando nos acercamos al interior estelar (panel inferior de la Figura 3.24), se ubica en regiones más externas para los modelos más masivos. Además la región donde se extiende la discontinuidad también aumenta con la masa. Esto trae consecuencias sobre el espaciamiento de períodos.

En la Figura 3.25 se graficaron los espaciamientos de períodos para los tres modelos seleccionados. Se observa que a medida que aumenta la masa del modelo, el espaciamiento de períodos posee más estructura, es decir hay mayor cantidad de mínimos. Notamos también que los mínimos en el caso de  $1,8M_\odot$  no son de igual magnitud. Este comportamiento (aparición de mínimos a medida que aumenta la masa) está en acuerdo con Miglio et al. (2008) y posiblemente se deba a que la característica distintiva (o “feature”) en la frecuencia de Brunt-Väisälä debido al gradiente de composición química, es más ancho en la más masiva ( $1,8M_\odot$ ) que en la de masa intermedia ( $1,5M_\odot$ ) y la más baja ( $1,3M_\odot$ ).

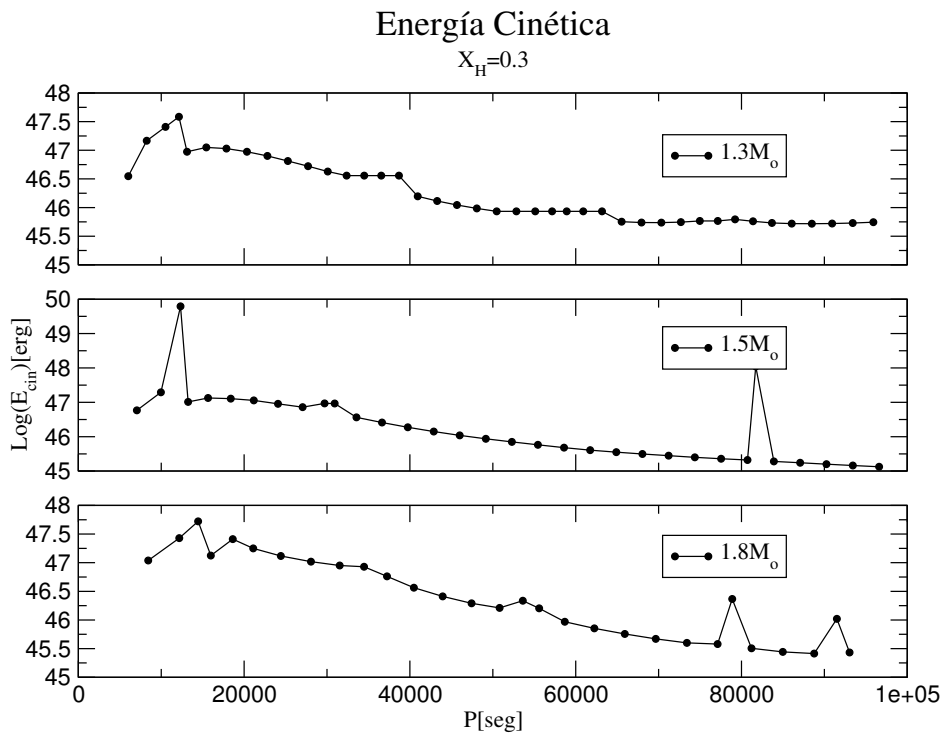
Otra característica que se distingue es que el espaciamiento asintótico aumenta con la masa. Este resultado es consistente con la ecuación 3.6 dado que la integral  $\int_{x_0}^1 \frac{|N|}{x} dx$ , es mayor para la estrella de  $1,3M_\odot$  que para la de  $1,5M_\odot$  y a su vez que la de  $1,8M_\odot$ .

Cuando estudiamos el comportamiento de la frecuencia de Brunt-Väisälä (Figuras 3.3) para distintos modelos del track con  $1,5M_\odot$ , notamos que a medida que se quema el hidrógeno en el núcleo, éste retrocede (es decir disminuye la coordenada radial del borde del núcleo), provocando la aparición de mínimos y un ciclo más corto para los espaciamientos de períodos. Otro efecto que notamos es que el espaciamiento de períodos asintótico disminuye debido a que la integral  $\int_{x_0}^1 \frac{|N|}{x} dx$  aumenta con la evolución. En cambio, en la Figura 3.24 se observa que a medida que aumenta la masa y el tamaño del núcleo convectivo aumenta, los mínimos en el espaciamiento de períodos se hacen más abundantes. Esto no contradice lo visto en la Figura 3.3 ya que en este caso, la región donde se extiende el gradiente de composición química aumenta.

En la Figura 3.26 graficamos el  $\log(E_{cin})$  vs. el período para las tres masas. Si miramos la ecuación 3.8 notamos que la energía cinética depende de la densidad y como ésta disminuye hacia la superficie estelar, la energía debe también disminuir en este sentido. Este hecho puede observarse en la Figura 3.26 en la cual para los tres casos la energía disminuye en la región de períodos grandes (recordemos que períodos grandes se corresponden con modos g de alto orden radial).



**Figura 3.25:** Espaciamiento de períodos vs. períodos para distintas masas con una abundancia central de hidrógeno de  $X_H = 0,3$ .



**Figura 3.26:**  $\log(E_{cin})$  vs. período para las masas  $1,3$ ,  $1,5$  y  $1,8M_{\odot}$  con una abundancia central de hidrógeno de  $X_H = 0,3$ .

### 3.3.2. Modos de presión

Como ya mencionamos el estudio de los modos de presión está ligado al comportamiento de la frecuencia de Lamb. En el panel inferior de la Figura 3.24 están graficadas la frecuencia de Lamb para las tres masas seleccionadas a un valor fijo para la abundancia central de hidrógeno  $X_H = 0,3$ .

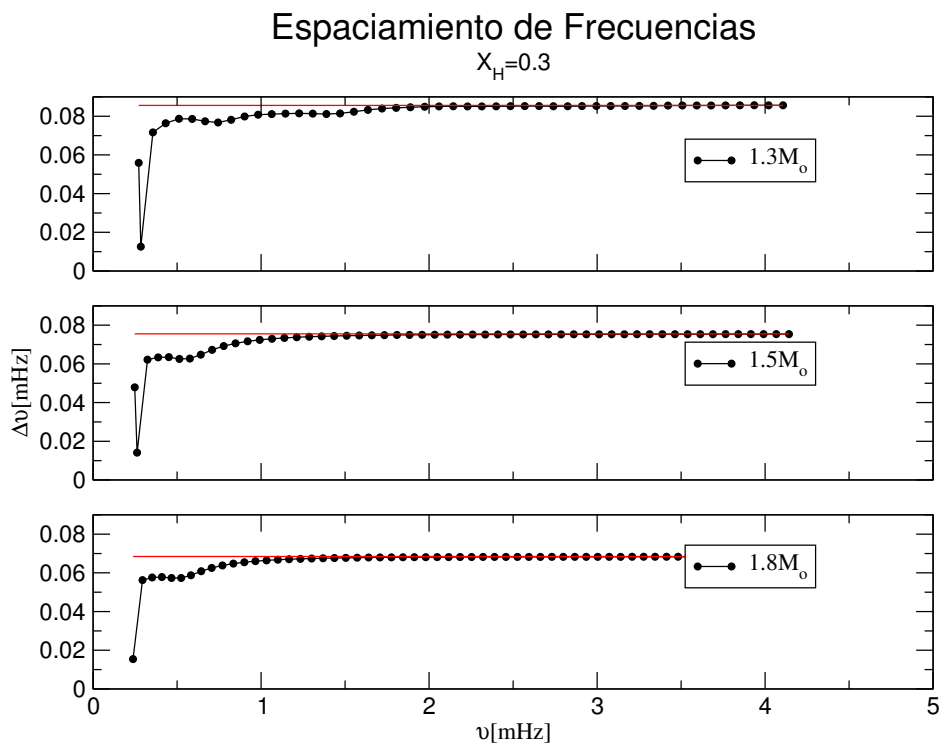
Para modelos con mayor masa la frecuencia de Lamb es menor y la discontinuidad se desplaza levemente hacia capas más externas. Esto se debe a que la región donde se extiende el gradiente de composición química se ubica en zonas más externas para los modelos con mayor masa. Por lo que la frecuencia de Lamb es levemente sensible a la presencia del gradiente de composición química. Este comportamiento, sin embargo no parece alterar significativamente la estructura en el perfil de espaciamentos de frecuencias. En la Figura 3.27 puede observarse que la estructura del espaciamento de frecuencias es similar para los tres modelos, pero el espaciamento de frecuencias asintótico disminuye a medida que la masa aumenta. Este comportamiento está de acuerdo con la ecuación 3.11 dado que la velocidad del sonido disminuye cuando la masa aumenta.

En la Figura 3.28 graficamos la energía cinética vs. frecuencia, para las tres masas consideradas. Notamos que para los tres casos considerados, la energía cinética presenta un mínimo (que es más pronunciado para las masas  $1,5M_\odot$  y  $1,8M_\odot$ ) pero el comportamiento global es similar en los tres casos.

## 3.4. Fenómeno de overshooting

El overshooting es un fenómeno de mezcla que extiende la trayectoria de los elementos de fluido estelar que están en movimiento en el núcleo convectivo hacia una región exterior, por encima del límite convectivo formal fijado por el criterio de Schwarzschild. El resultado de este fenómeno es un aumento de la vida de la estrella en la Secuencia Principal como consecuencia del aumento de combustible disponible para la quema de hidrógeno. Por lo tanto el diagrama H-R se verá afectado por este fenómeno.

En esta sección estudiaremos el efecto de considerar overshooting sobre las propiedades pulsacionales de una estrella de  $1,5M_\odot$ . Para tal fin realizamos cálculos para tres valores distintos del parámetro de overshooting  $\alpha_{ov}$  dejando evolucionar a la estrella de  $1,5M_\odot$  hasta la post-Secuencia Principal y limitamos las simulaciones para el caso  $l = 1$ . En la Figura 3.29 se muestra para este análisis el diagrama H-R para los cuatro casos. Los modelos seleccionados poseen la misma abundancia central de hidrógeno ( $X_H = 0,5$ ). El parámetro de overshooting  $\alpha_{OV}$  utilizado y que modificamos en las simula-



**Figura 3.27:** Espaciamiento de frecuencias vs. frecuencia para los modelos con  $1,3, 1,5$  y  $1,8M_{\odot}$ .

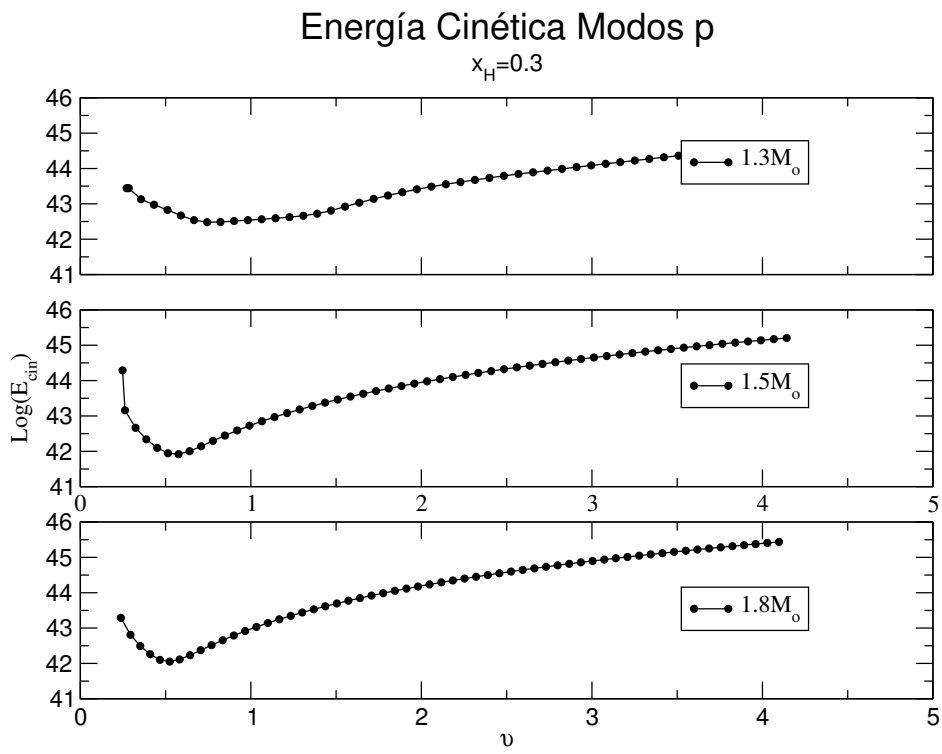


Figura 3.28:  $\log(E_{cin})$  vs. frecuencia para las masas 1,3, 1,5 y 1,8 $M_{\odot}$ .

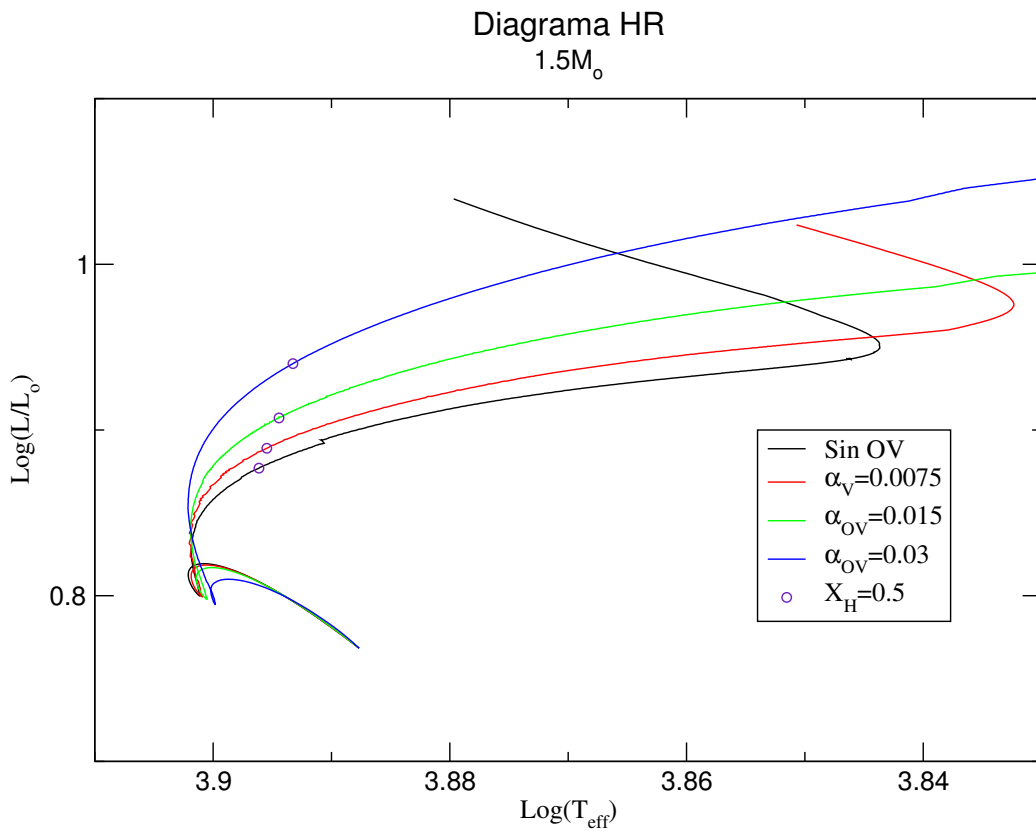
ciones, proporciona una medida de la extensión de la región de overshooting. Puede observarse del diagrama H-R que el fenómeno de overshooting extiende el “tamaño” de la Secuencia Principal. Para un mayor valor del parámetro  $\alpha_{OV}$ , la Secuencia Principal se extiende más en el diagrama.

Otra consecuencia, que ya mencionamos y que puede apreciarse en la Figura 3.30 es la extensión del núcleo convectivo. El gradiente de composición química entonces se ve desplazado hacia capas más externas cuanto mayor es el overshooting. Además el ancho del “pico” en la frecuencia de Brunt-Väisälä aumenta con el valor del parámetro de overshooting. También notamos que la región interior al gradiente de composición química no es convectiva. Por ejemplo, para el caso con  $\alpha_{OV} = 0,03$ , la región comprendida entre los valores  $x = r/R = 0,088$  y  $x = r/R = 0,111$  aproximadamente posee valores de la frecuencia no nulos, con lo cual esta región interior al gradiente químico no es convectiva.

### 3.4.1. Modos de gravedad

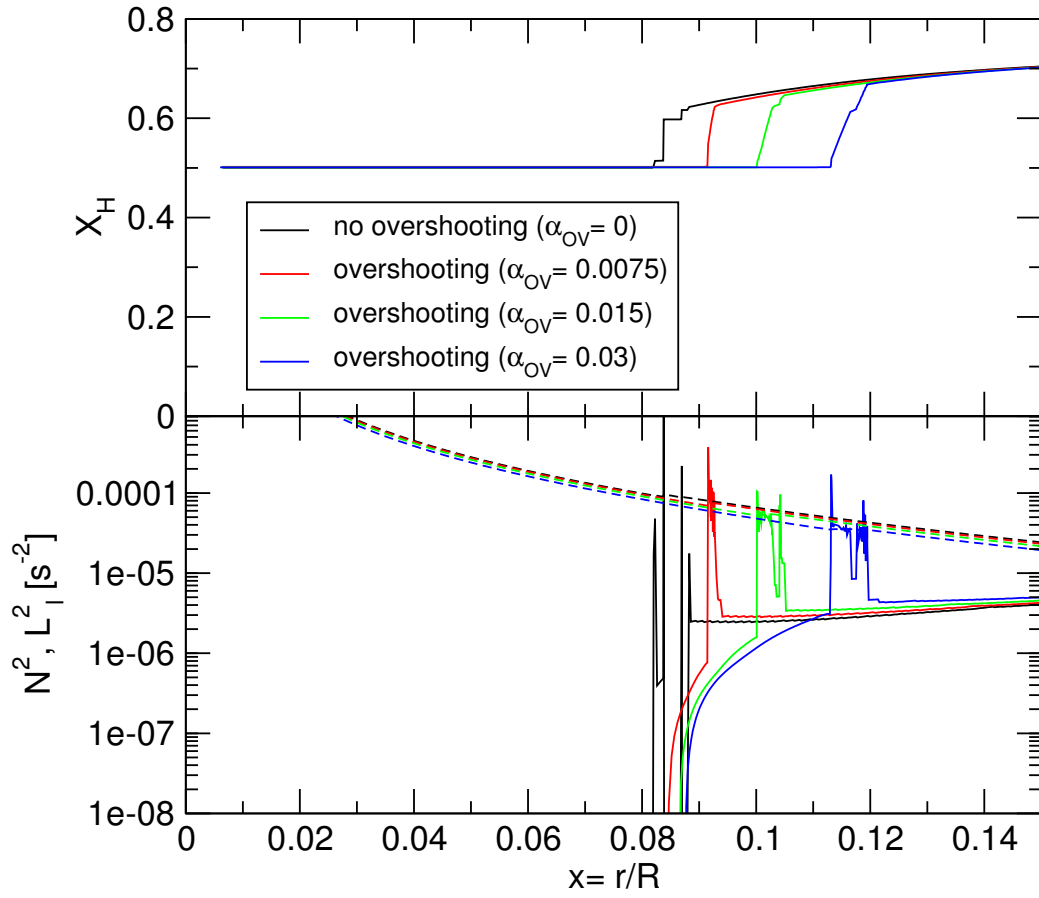
El efecto del desplazamiento del gradiente químico sobre la frecuencia de Brunt-Väisälä, se observa en la Figura 3.30. El salto en la frecuencia de Brunt-Väisälä se desplaza junto con la región del gradiente químico hacia zonas más externas del interior estelar, a causa del fenómeno de overshooting. Este resultado es consistente con el trabajo desarrollado por [Miglio et al. \(2008\)](#). Sin embargo, cabe mencionar, que este comportamiento no se aprecia en modelos más masivos. En el trabajo de [Miglio et al. \(2008\)](#) se muestra que, dada una abundancia central de hidrógeno, la discontinuidad en la frecuencia de Brunt-Väisälä para modelos masivos no se ve afectada si se considera el fenómeno de overshooting, aunque para modelos con menor masa el efecto de considerar este fenómeno extiende dramáticamente la región del núcleo convectivo provocando cambios significativos en la amplitud y la periodicidad del espaciamiento de períodos.

Para nuestro modelo de  $1,5M_{\odot}$ , el efecto sobre el espaciamiento de períodos se muestra en la Figura 3.31. Observamos que a medida que aumenta el parámetro de overshooting y se desplaza el “pico” en la frecuencia de Brunt-Väisälä hacia regiones más externas, aparecen oscilaciones en el espaciamiento de períodos, el mínimo presente en los períodos cortos persiste para los cuatros casos y el espaciamiento asintótico de períodos se mantiene prácticamente constante para los distintos valores del parámetro de overshooting. Este último hecho se debe a que cuando aumenta el valor de  $\alpha_{OV}$ , el pico en la frecuencia sufre un ensanchamiento pero también toma valores no nulos en la región interna al gradiente de composición química, provocando que la integral  $\int_{x_0}^1 \frac{|N|}{x} dx$  se mantenga aproximadamente constante y con esto también

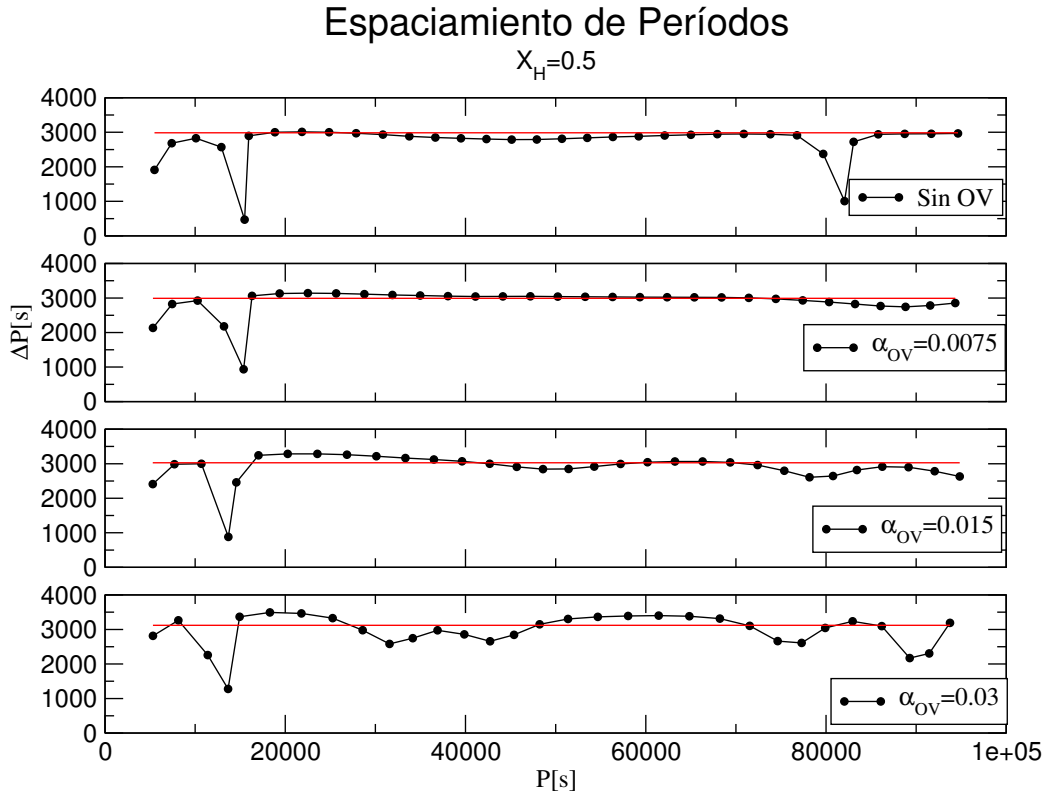


**Figura 3.29:** Diagrama H-R para una estrella de  $1.5M_{\odot}$  sin overshooting y con tres valores distintos del parámetro  $\alpha_{ov}$ : 0,03, 0,015, 0,0075. Los puntos marcados son los modelos seleccionados para cada modelo, con igual abundancia de hidrógeno central ( $X_H = 0,5$ ).





**Figura 3.30:** Panel superior: abundancia de hidrógeno en función de la variable  $x = r/R_*$  para el caso sin overshooting y con overshooting considerando tres valores del parámetro  $\alpha_{OV} = 0,03, 0,015$  y  $0,0075$ . Panel inferior: frecuencia de Brunt-Väisälä (línea llena) y Lamb (línea de trazos) para los mismos casos.

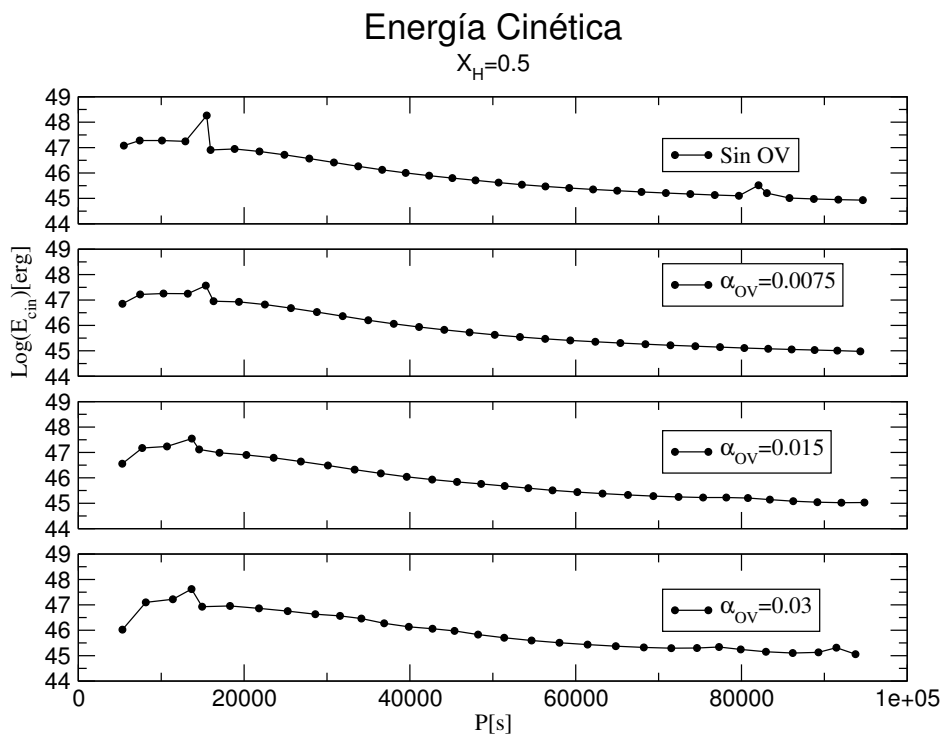


**Figura 3.31:** Espaciamiento de períodos, para los parámetros de overshooting considerados, a una concentración fija de hidrógeno central igual a 0,5. Modelo con  $1,5M_{\odot}$ , caso  $l = 1$ .

el espaciamiento asintótico.

En la Figura 3.32 graficamos el comportamiento de la energía cinética para los modelos seleccionados. Notamos que la energía cinética no se ve significativamente afectada por efectos de overshooting y la forma de las curvas es muy similar en todos los casos. Sin embargo el máximo absoluto se desplaza levemente hacia períodos más cortos. Recordemos que los máximos presentes en la curva de energía cinética y los mínimos en el espaciamiento de períodos, son modos que poseen una mayor amplitud (respecto de los adyacentes) en la zona del gradiente químico.

Un estudio más detallado del comportamiento de la energía cinética, revela la presencia de máximos, correspondientes a los mínimos relativos en el espaciamiento de períodos que no se pueden apreciar en la Figura 3.32 a causa de la escala elegida, sin embargo sí se distinguen en la Figura 3.33.



**Figura 3.32:**  $\log(E_{cin})$  vs.  $P[s]$  para los parámetros de overshooting considerados, a una concentración fija de hidrógeno central igual a 0,5. Modelo con  $1,5M_{\odot}$ , caso  $l = 1$ .

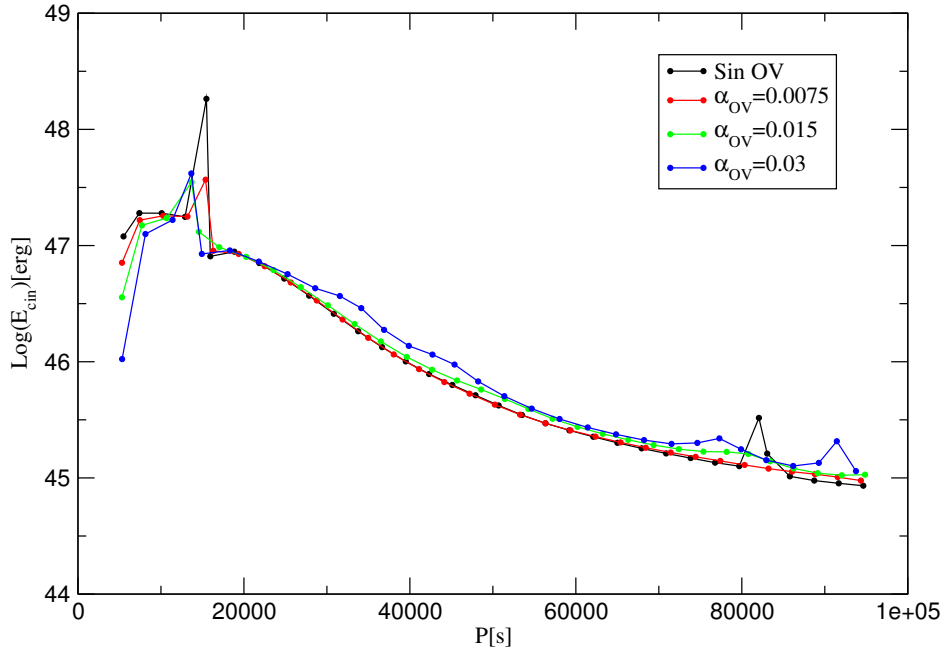
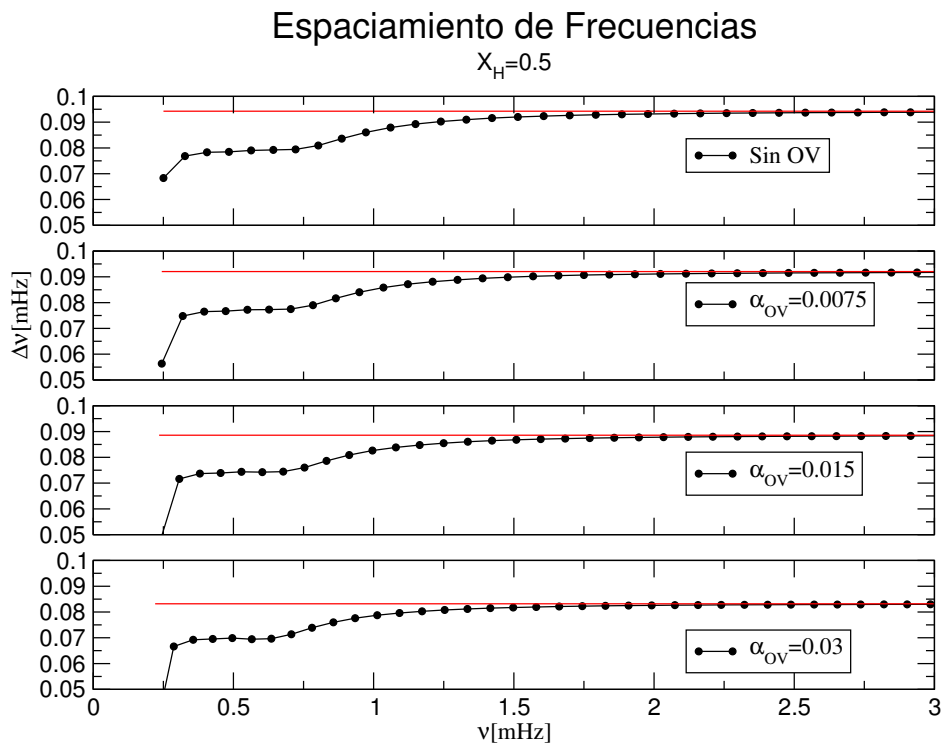


Figura 3.33: Igual que en Figura 3.32.

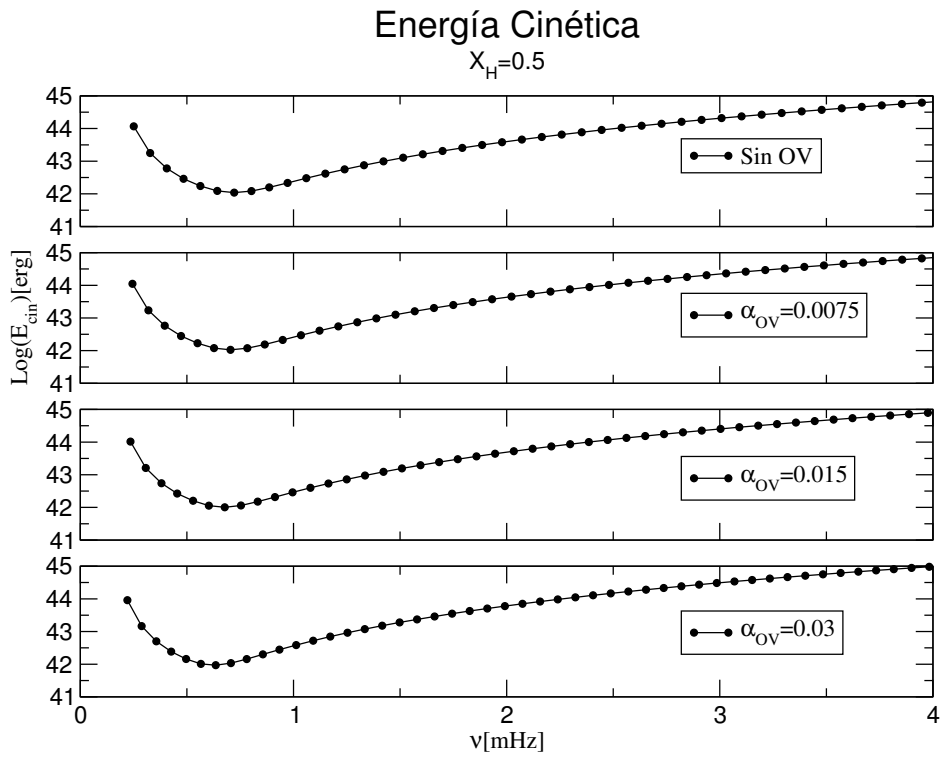
### 3.4.2. Modos de presión

En el panel inferior de la Figura 3.30 se muestra el efecto que tiene el fenómeno de overshooting sobre la frecuencia de Lamb. Puede observarse que la discontinuidad en la frecuencia se desplaza a regiones más externas junto con el borde del núcleo convectivo, por efecto del fenómeno de overshooting y se extiende en la zona del gradiente de composición química. Este comportamiento no afecta significativamente al espaciamiento de frecuencias, cuya gráfica es muy similar en todos los casos considerados. Sin embargo se puede apreciar de la Figura 3.34 que el espaciamiento asintótico de frecuencias indicado con una línea horizontal en cada caso, disminuye levemente a medida que se toman valores del parámetro de overshooting más grandes.

En la Figura 3.35 se observa que el fenómeno de overshooting no afecta significativamente a la distribución de energía cinética para los modos de presión. En resumen, dado que el fenómeno de overshooting afecta al tamaño del núcleo y no tiene influencia en la envoltura de la estrella, los modos g se ven considerablemente más afectados que los modos p que son modos propios de la envoltura.



**Figura 3.34:** Espaciamiento de frecuencia vs. frecuencia para los parámetros de overshooting considerados, a una abundancia central de hidrógeno fija igual a 0,5. Modelo con  $1,5M_{\odot}$ , caso  $l = 1$ .



**Figura 3.35:**  $\log(E_{cin})$  vs.  $\nu$  para los parámetros de overshooting considerados, a una abundancia central fija de hidrógeno igual a 0,5. Modelo con  $1,5M_{\odot}$ , caso  $l = 1$ .

## CAPÍTULO 4

## CONCLUSIONES

En este trabajo abordamos por primera vez en nuestro Observatorio el estudio teórico/numérico de las propiedades pulsacionales de las estrellas variables de baja masa en la Secuencia Principal denominadas  $\delta$  Scuti y  $\gamma$  Doradus. Las estrellas  $\delta$  Scuti pulsán en modos p y g de bajo orden radial, con períodos comprendidos entre 15 minutos y 5 horas, mientras que las  $\gamma$  Doradus pulsán en modos g de alto orden radial con períodos entre 8 horas y 3 días. Específicamente, en esta tesis hemos calculado la evolución y los espectros teóricos de pulsación en modos g y p de secuencias evolutivas con  $1,3M_{\odot} \leq M_* \leq 1,8M_{\odot}$  desde la ZAMS hasta etapas en las cuales el hidrógeno se ha agotado en el núcleo (Terminal Age Main Sequence-TAMS). En particular, hemos explorado la dependencia de las pulsaciones (modos g y p) con:

1. la evolución a lo largo de la MS (variación de  $T_{eff}$ ,  $X_H$ , etc),
2. variación en la masa estelar, y
3. fenómenos de mezcla convectiva extra (overshooting en el núcleo).

Esta exploración tiene como finalidad conocer el potencial astrosismológico de estas estrellas, es decir qué información acerca de la estructura interna y estado evolutivo puede proporcionarnos el estudio de las propiedades que estas estrellas variables exhiben. Nuestra motivación es el espectacular impulso que misiones espaciales tales como C.O.R.O.T y Kepler han brindado a la astrosismología de las estrellas  $\gamma$  Doradus y  $\delta$  Scuti en los últimos años.

A lo largo de este trabajo hemos invocado repetidamente resultados del artículo de [Miglio et al. \(2008\)](#), en particular en relación al espectro de pulsaciones de modos g. Este artículo nos ha servido de guía para comparar y evaluar nuestro trabajo.

Describiremos a continuación en forma resumida nuestros resultados. En relación al impacto de la evolución a lo largo de la Secuencia Principal (punto (1)), hemos encontrado que las propiedades de los modos g son extremadamente sensibles a la estructura química de la región del núcleo convectivo que se desarrolla a expensas de la quema de hidrógeno en el centro. Específicamente, para el caso analizado ( $M_* = 1,5M_\odot$ ) encontramos que se desarrolla un núcleo convectivo que va retrocediendo (en radio) a medida que va decreciendo la abundancia de hidrógeno (Fig. 3.3). El gradiente en composición química que se forma por la transición entre hidrógeno y helio se ve reflejado en la frecuencia de Brunt-Väisälä (y en menor medida en la de Lamb). Específicamente la frecuencia de Brunt-Väisälä posee un “pozo” en el núcleo convectivo rodeado de un “pico” muy pronunciado en la región del gradiente químico. Este “pico” se va corriendo hacia regiones internas (Fig. 3.4).

Las consecuencias sobre los modos g son muy notorias. En particular, el espaciamiento de períodos, que inicialmente es constante y similar al valor asintótico, comienza a tener mínimos muy pronunciados (Fig. 3.8). Estos mínimos están asociados a máximos en la energía cinética (Fig. 3.10). Pudimos comprobar que el valor realzado en energía cinética, en comparación con los modos “normales”, es debido a que estos modos (“atrapados”) poseen amplitudes de sus autofunciones notoriamente más grandes en la región del gradiente químico (Fig. 3.12). De esta manera podemos concluir que los modos g son muy sensibles a la estructura química del núcleo y por lo tanto sismológicamente muy valiosos. También encontramos que el espaciamiento asintótico de períodos disminuye con la evolución en la Secuencia Principal (Fig. 3.8).

La dependencia de los modos p, en cambio, es mucho menos importante. En efecto, las frecuencias de los modos p no se ven afectadas por la evolución del núcleo convectivo, excepto en el caso de modos p de bajo orden (Fig. 3.15). Específicamente, encontramos algunos pocos mínimos en el espaciamiento de frecuencias, asociados a máximos de energía cinética (Fig. 3.17). Al igual que en el caso de los modos g, estos modos p “atrapados” poseen amplitudes grandes de sus autofunciones en la región del gradiente químico (Fig. 3.19). Los modos p de orden intermedio y alto, por otro lado, son casi insensibles a la presencia del núcleo convectivo y el gradiente químico. De esta manera, son menos importantes desde un punto de vista astrosismológico. Sin embargo, notamos una pronunciada disminución en el espaciamiento asintótico de frecuencias, algo que sería posible, en principio, ser explotado



observacionalmente para inferir la etapa evolutiva en la cual una estrella  $\delta$  Scuti se encuentra.

Para estudiar la dependencia de las propiedades pulsacionales con la masa estelar (punto (2)) analizamos las pulsaciones en modos p y g de dos secuencias adicionales con  $M_* = 1,3M_\odot$  y  $M_* = 1,8M_\odot$ . En este caso encontramos que el tamaño del núcleo convectivo aumenta con la masa estelar. Esto se ve reflejado en la frecuencia de Brunt-Väisälä, en la cual el “pico” debido al gradiente químico se ubica hacia regiones más externas y su ancho aumenta en el caso de modelos más masivos (Fig. 3.24). Examinando el espaciamiento de períodos de modos g, encontramos que éste es sensible a la masa estelar, por dos efectos: uno, es la presencia de mínimos de mayor amplitud y abundancia para masas mayores, y otro efecto es el aumento del valor del espaciamiento asintótico de períodos (Fig. 3.25). Así, podemos concluir que los modos g son sensibles a la masa estelar  $M_*$ . No podemos decir lo mismo de los modos p, los cuales son casi insensibles a cambios en la masa estelar (Fig. 3.27), excepto que el espaciamiento de frecuencias disminuye levemente para masas altas.

Finalmente, examinamos la sensibilidad de las pulsaciones con el overshooting (punto (3)). El efecto primario sobre la frecuencia de Brunt-Väisälä es diferente a lo examinado en los puntos (1) y (2). Específicamente, considerando valores crecientes de overshooting, el pico en la frecuencia de Brunt-Väisälä debido al gradiente químico, se desplaza hacia regiones más externas, aumenta su ancho, y existe una región entre el núcleo convectivo y el “pico” en  $N^2$ , en la cual la frecuencia de Brunt-Väisälä no es nula, debido a que en esa zona el transporte es radiativo (Fig. 3.30).

El efecto sobre los modos g es importante. En particular, encontramos un mínimo del espaciamiento de períodos que persiste en todos los casos analizados (Fig. 3.31) y por otra parte existen mínimos no tan pronunciados que van apareciendo en mayor número y con más profundidad a medida que consideramos valores crecientes del parámetro de overshooting. De nuevo, estos modos están asociados con máximos en energía cinética debido a que poseen amplitudes relativamente grandes en la zona del gradiente químico (Fig. 3.33). El espaciamiento asintótico se mantiene constante, sin importar el valor de overshooting. Los modos p, por otro lado, no evidencian cambios apreciables con diferentes valores de overshooting, excepto una leve variación del espaciamiento asintótico de frecuencias (Fig. 3.34). Concluimos que, nuevamente los modos g son potencialmente valiosos para estudiar el fenómeno de overshooting.

Una exploración adicional que hemos realizado, es la evolución de las frecuencias de modos p y g con la edad (Fig. 3.22). Encontramos que se produce el fenómeno de “avoided crossing” debido al aumento del tamaño en

la frecuencia de Brunt-Väisälä a medida que el hidrógeno se va consumiendo.

Finalmente, hemos explorado la diferencia con el grado armónico  $l$ , calculando en el caso de la estrella de  $1,5M_{\odot}$  (sin overshooting) las pulsaciones con  $l = 1$  y  $l = 2$ . Encontramos que las propiedades pulsacionales son exactamente las mismas y que las únicas diferencias se aprecian en el espaciado asintótico de períodos, como es de esperar para los modos g, donde existe una dependencia con el grado armónico (Fig. 3.9).

Para finalizar, queremos enfatizar que muchos de estos resultados (en particular para el caso de los modos de gravedad) han podido compararse con trabajos de otros autores, en particular el de [Miglio et al. \(2008\)](#). Encontramos un acuerdo cualitativamente muy bueno, teniendo en cuenta que usamos códigos evolutivos y pulsacionales diferentes.

## BIBLIOGRAFÍA

- Alexander, D. R. & Ferguson, J. W. 1994, *ApJ*, 437, 879
- Althaus, L. G., Serenelli, A. M., Panei, J. A., et al. 2005, *A&A*, 435, 631
- Angulo, C. 1999, in American Institute of Physics Conference Series, Vol. 495, American Institute of Physics Conference Series, 365–366
- Antoci, V., Handler, G., Campante, T. L., et al. 2011, , 477, 570
- Baglin, A. & COROT Team. 1998, in IAU Symposium, Vol. 185, *New Eyes to See Inside the Sun and Stars*, ed. F.-L. Deubner, J. Christensen-Dalsgaard, & D. Kurtz, 301
- Balona, L. A. 2010, *Challenges In Stellar Pulsation*. (L.A. Balona. eISBN: 978-1-60805-185-4, Bentham Publishers, 2010.)
- Balona, L. A. & Dziembowski, W. A. 2011, *MNRAS*, 417, 591
- Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, *Science*, 327, 977
- Bouabid, M.-P., Montalbán, J., Miglio, A., et al. 2009, in American Institute of Physics Conference Series, Vol. 1170, American Institute of Physics Conference Series, ed. J. A. Guzik & P. A. Bradley, 477–479
- Breger, M. 2000, *Baltic Astronomy*, 9, 149
- Brocato, E., Matteucci, F., Mazzitelli, I., & Tornambe, A. 1990, *ApJ*, 349, 458
- Caughlan, G. R. & Fowler, W. A. 1988, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 40, 283

- Christensen-Dalsgaard, J., Däppen, W., Dziembowski, W. A., & Guzik, J. A. 2000, in NATO ASIC Proc. 544: Variable Stars as Essential Astrophysical Tools, 59
- Clayton, D. D. 1968, Principles of stellar evolution and nucleosynthesis. (New York: McGraw-Hill, 1968)
- Córsico, A. H. 2003, PhD thesis (Universidad Nacional de La Plata)
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Montgomery, M. H., García-Berro, E., & Isern, J. 2005, A&A, 429, 277
- Córsico, A. H. & Benvenuto, O. G. 2002, Ap&SS, 279, 281
- Cox, J. P. 1980, Theory of stellar pulsation. (Research supported by the National Science Foundation Princeton, NJ, Princeton University Press, 1980. 393 p.)
- Degroote. 2010, Asteroseismology of OB stars with the Corot Space mission (PhD Thesis)
- Dorman, B., Rood, R. T., & O'Connell, R. W. 1993, ApJ, 419, 596
- Driebe, T., Schoenberner, D., Bloeker, T., & Herwig, F. 1998, VizieR Online Data Catalog, 333, 90123
- Dupret, M.-A., Grigahcène, A., Garrido, R., et al. 2006, , 77, 366
- Dziembowski, W. A. 1971, , 21, 289
- Grigahcène, A., Antoci, V., Balona, L., et al. 2010, , 713, L192
- Henry, G. W. & Fekel, F. C. 2005, AJ, 129, 2026
- Hofmeister, E., Kippenhahn, R., & Weigert, A. 1964, , 59, 215
- Hubbard, W. B. & Lampe, M. 1969, ApJS, 18, 297
- Iglesias, C. A. & Rogers, F. J. 1996, ApJ, 464, 943
- Itoh, N., Hayashi, H., Nishikawa, A., & Kohyama, Y. 1996, ApJS, 102, 411
- Itoh, N. & Kohyama, Y. 1983, ApJ, 275, 858
- Magni, G. & Mazzitelli, I. 1979, A&A, 72, 134

- Miglio, A., Montalbán, J., Noels, A., & Eggenberger, P. 2008, MNRAS, 386, 1487
- Schaller, G., Schaerer, D., Meynet, G., & Maeder, A. 1992, A&AS, 96, 269
- Tassoul, M. 1980, ApJS, 43, 469
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, Nonradial oscillations of stars. (Nonradial oscillations of stars, Tokyo: University of Tokyo Press, 1989, 2nd ed.)
- Uytterhoeven, K., Moya, A., Grigahcène, A., et al. 2011, A&A, 534, A125
- Uytterhoeven, K., Poretti, E., Rainer, M., et al. 2008, Journal of Physics Conference Series, 118, 012077