

*Propiedades Evolutivas y Pulsacionales de
Estrellas sub-enanas B variables*

Alejandra Daniela Romero

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Marzo 2007

TEMA : Análisis evolutivo-pulsacional aplicado a estrellas sub-enanas B

ALUMNO : LU N° :176/01

LUGAR DE TRABAJO : Instituto de Astrofísica La Plata (IALP)

DIRECTOR DEL TRABAJO : Dr. Alejandro Hugo Córscico

CO-DIRECTOR : Dr. Leandro Gabriel Althaus

FECHA DE INICIACION: Mayo 2006

FECHA DE FINALIZACION: Marzo 2007

FECHA DE EXAMEN:

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesor de la Tesis de Licenciatura

Jurado

Agradecimientos

Para empezar quisiera agradecer a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires y a sus docentes por formarme en este fascinante área de la ciencia que es la física.

También quiero agradecer a la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata por brindarme los recursos computacionales necesarios para realizar los cálculos vinculados a esta Tesis.

Luego quiero agradecer a mi director Alejandro Córscico y a mi co-director Leandro Althaus que a pesar de la distancia siempre me acompañaron. Gracias por el entusiasmo en mi trabajo que sin su guía y dedicación no podría haber completado.

A mis compañeros de la facu: Euge, Lauri, Ceci, Ricardo, Maxi, Hernán, Sabri, Juan, Mariano, Cristian, Pablo, Colo, Ami y muchos más. Gracias por compartir conmigo las incontables horas de estudio, y por las interminables charlas.

A Vane, “mi conciencia”, que desde ese primer día en el CBC siempre estuviste ahí tanto para escuchar mis problemas como para alegrarte por mis logros. Gracias por tu amistad incondicional durante estos años.

A Gaby, mi gran amiga y compañera de viaje, que siempre estuviste para darme ese empujoncito que me faltaba. Gracias por aconsejarme y por aceptar mis consejos. Sobre todas las cosas gracias por tu amistad.

A Dani, por su ayuda tanto en la parte académica como humana de mi carrera. Gracias por ayudarme a perderle el miedo a ser física y demostrarme, a tu manera, que estas orgulloso de mí. Gracias por creer en mí siempre.

Finalmente, quiero dedicarle esta tesis a mi familia, ese increíble grupo de personas que supo entenderme y acompañarme en cada proyecto.

A mis hermanas Adri y Andre, mis primeras amigas, que siempre tuvieron algo que enseñarme sin importar los caminos que tomaron, y a mi cuñado Sergio que se ha convertido en mi amigo.

A mis bebés, mis sobrinos, Ezequiel y Leandro, que siempre supieron la forma de robarme una sonrisa y alegrar mis días.

Y en especial a mis padres, Alicia y Emilio, que con su gran amor me ayudaron a convertirme en la persona que soy hoy. Gracias, los quiero mucho!

Alejandra

Índice general

Resumen	1
Introducción	2
1. Conceptos de Evolución y Pulsaciones Estelares	3
1.1. Evolución Estelar General	3
1.2. Evolución en la Rama Horizontal	6
1.2.1. Formación de las Estrellas de la Rama Horizontal	6
1.2.2. Evolución Durante la Rama Horizontal	8
1.2.3. Evolución Posterior a la Rama Horizontal	9
1.3. Mecanismos de Pérdida de Masa	10
1.4. Pulsaciones Estelares	12
1.4.1. El Fenómeno de las Pulsaciones Estelares	12
1.4.2. Pulsaciones No-Radiales	13
1.4.3. Características Generales de los Modos No-Radiales	14
1.4.4. Frecuencias características de Oscilación	16
1.5. Astrosismología y Clases de Estrellas Pulsantes	18
1.6. Estrellas sub-enanas B	22
1.6.1. Características Generales de las Estrellas sub-enanas B	22
1.6.2. Características Pulsacionales de las Estrellas sub-enanas B	23
2. Códigos Numéricos	27
2.1. Generalidades del Código Evolutivo	27
2.1.1. Tratamiento Numérico de las Ecuaciones de Estructura	27
2.1.2. Física Constitutiva	28
2.2. Código de Pulsaciones	29
3. Modelos Evolutivos de Estrellas sub-enanas B	34
3.1. Secuencias Evolutivas	34
3.2. Composición Química y Frecuencias Características	37
4. Pulsaciones en Estrellas sub-enanas B	43
4.1. Mecanismos de Excitación	43
4.1.1. Generalidades	43
4.1.2. Mecanismo κ	44
4.1.3. Mecanismos de Excitación en Estrellas sub-enanas B	44
4.2. Modelo de Referencia	46
4.3. Energía Cinética de Modos	47
4.4. Modos de Gravedad	47

4.4.1.	Energía Cinética y Espaciamiento de Períodos Consecutivos	47
4.4.2.	Origen del Atrapamiento de Modos g	50
4.4.3.	Autofunciones de Desplazamiento de Modos g	50
4.4.4.	Regiones de Formación de Períodos de Modos g	55
4.5.	Modos de Presión	57
4.5.1.	Energía Cinética y Espaciamiento de Frecuencias Consecutivas	57
4.5.2.	Autofunciones de Desplazamiento de Modos p	60
4.5.3.	Regiones de Formación de Períodos de Modos p	62
5.	Evolución Temporal	65
5.1.	Evolución Temporal en la Secuencia de Referencia	65
5.2.	Evolución Temporal de los Parámetros de Superficie	68
5.3.	Evolución Temporal de los Períodos de Pulsación	72
5.3.1.	Evolución Temporal de los Períodos de Pulsación de Modos p	73
5.3.2.	Evolución Temporal de los Períodos de Pulsación de Modos g	75
5.4.	Fenómenos de <i>Mode bumping</i> y <i>Avoided crossing</i>	77
6.	Estrellas sub-enanas B Pulsantes: Observaciones	80
7.	Conclusiones	85
A.	Ecuaciones de Pulsación	89
B.	Ecuaciones de Evolución y Estructura Estelar	96
	Bibliografía	99

Resumen

En el presente trabajo se realiza un estudio evolutivo-pulsacional aplicado a las estrellas sub-enanas B, utilizando modelos numéricos representativos de las mismas. Se calcularon cuatro secuencias evolutivas detalladas, desde la Secuencia Principal hasta el final de la Rama Horizontal, a partir de las cuales se analizó la estructura química interna de un modelo representativo, mediante un estudio detallado de las magnitudes características. Para el estudio pulsacional de las estrellas sub-enanas B, se calculó el espectro de períodos completo de los modelos y luego se estudiaron las propiedades pulsacionales de los mismos. Primero utilizamos un modelo de referencia, ubicado aproximadamente en el centro de la etapa de Rama Horizontal, para el cual realizamos un estudio detallado de las cantidades físicas principales. Luego se calculó el espectro pulsacional para una serie de modelos, caracterizando la evolución de los períodos en la Rama Horizontal. Por último se analizaron las tendencias generales de los datos observados para las estrellas sub-enanas B variables que se conocen en la actualidad.

Introducción

Las estrellas sub-enanas B son estrellas con masas menores a $0.5M_{\odot}$ que se encuentran en la etapa de combustión de helio en el núcleo. Luego de perder gran parte de la masa de la envoltura por vientos estelares durante su ascenso por la Rama de Gigante Roja, las estrellas progenitoras de sub-enanas B abandonan la etapa de gigante y se asientan en la Rama Horizontal a altas temperaturas efectivas y altas gravedades superficiales, sobre la Rama Horizontal Extrema. Debido a la pérdida de masa, poseen una envoltura muy delgada y no pueden alcanzar la Rama Asintótica de las Gigantes luego del agotamiento del helio en el núcleo, ocupando una fase de AGB-Manquè. Las estrellas sub-enanas B poseen una estructura interna estratificada donde se pueden identificar tres grandes regiones: un núcleo convectivo central, donde se produce la combustión nuclear, una cáscara radiativa rica en helio que lo rodea y una envoltura poco masiva rica en hidrógeno.

Afortunadamente, muchas de estas estrellas muestran variaciones en su brillo, lo que abre las puertas a la aplicación de la astrosismología como herramienta para su estudio. Desde 1996 se han reportado más de 60 estrellas sub-enanas B variables con un amplio espectro de períodos observados. Al mismo tiempo se han realizado estudios astrosismológicos utilizando modelos estáticos que abarcan un amplio rango en los parámetros de superficie.

En este trabajo presentaremos un estudio evolutivo-pulsacional de las estrellas sub-enanas B, utilizando modelos numéricos evolutivos detallados que permiten una representación más realista que en el caso de modelos estáticos, cuando se considera la estructura interna de las estrellas sub-enanas B. Específicamente realizaremos un estudio de las oscilaciones adiabáticas de las estrellas sub-enanas B considerando modos radiales y no-radiales. Con este fin, analizaremos un modelo de referencia que se encuentra en la Rama Horizontal Extrema, al cual se le calculará el espectro completo de períodos para los modos con grado armónico $\ell=0, 1, 2$ y 3 , y luego se realizará un análisis de las propiedades pulsacionales mediante el estudio de cantidades básicas como la energía cinética, las autofunciones de desplazamiento y las funciones de peso asociadas a los modos de pulsación. También se analizará la dependencia temporal de los períodos de pulsación mediante el cálculo del espectro de pulsaciones para una serie de modelos, cubriendo la etapa de Rama Horizontal completa. De esta manera, buscamos relacionar las características de los períodos o frecuencias de los modos de pulsación con la estructura interna de las estrellas sub-enanas B.

Por último realizaremos un estudio de las dependencias generales que se observan en los parámetros de las estrellas sub-enanas B variables reportadas hasta el momento.

Conceptos de Evolución y Pulsaciones Estelares

1.1. Evolución Estelar General

Las estrellas comienzan sus vidas en nubes masivas de gas y polvo, cuando una parte de dicha nube se vuelve inestable frente al colapso gravitacional y comienza a contraerse. La energía potencial liberada por la contracción gravitacional se utiliza en parte para calentar la materia en la estrella y el resto es radiado desde la superficie. Eventualmente, las regiones centrales ya comprimidas se vuelven suficientemente densas y calientes como para que comience la combustión de hidrógeno en helio. Después de la ignición del hidrógeno central, la estrella se establece en la Secuencia Principal (*Main Sequence* (MS)), donde la energía requerida para contrarrestar el colapso gravitacional está generada por la combustión nuclear de hidrógeno en el centro de la estrella. Para una estrella de $1M_{\odot}$ esta fase inicial dura alrededor de 50 millones de años.

Para dar comienzo a las reacciones nucleares la temperatura central debe alcanzar alrededor de los 6 millones de grados Kelvin. En objetos de muy baja masa esto no ocurre nunca; en estos casos la materia se vuelve fuertemente degenerada y la energía térmica, proporcionada por la contracción gravitacional, es absorbida por el gas de electrones degenerado en lugar de provocar un aumento de la temperatura. Estos objetos terminan su vida como enanas marrones. La masa estelar crítica debajo de la cual no se puede alcanzar una combustión nuclear estable es aproximadamente de $0.08 M_{\odot}$.

En la MS estrellas de baja y alta masa tienen estructuras físicas muy diferentes. Esto se debe a que a medida que aumenta la masa se incrementa la temperatura central, mientras que la presión y la densidad centrales decrecen. Para masas mayores que $1.5M_{\odot}$ (MS alta), la estrella posee una temperatura central suficientemente alta como para que la fuente de energía dominante sea el ciclo de carbono-nitrógeno (C-N). La tasa de generación de energía de este mecanismo aumenta tan rápido con el crecimiento de la temperatura que la producción de energía está fuertemente concentrada en el núcleo más interno. El flujo de energía aumenta tan rápido hacia afuera desde el centro de la estrella que no puede ser transportado eficientemente por radiación. En consecuencia, la estrella desarrolla un núcleo convectivo, rodeado por una envoltura radiativa fuera de la región donde se genera energía. El tamaño del núcleo convectivo aumenta con la masa.

Las estrellas con masas menores a $1.5M_{\odot}$ (MS baja) obtienen su energía predominantemente del ciclo protón-protón (p-p). La sensibilidad de este proceso con la temperatura es mucho menor que la del ciclo C-N, y la producción de energía no está entonces tan localizada en el centro de la estrella; por lo tanto el núcleo es radiativo. La temperatura efectiva¹ de estas estrellas es tan

¹Se define la temperatura efectiva (T_{eff}) de una estrella como la temperatura de un cuerpo negro que emite el mismo flujo superficial de energía que la estrella considerada. La temperatura efectiva queda definida a través de la relación: $L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$ donde L_* y R_* son la luminosidad (energía radiada por unidad de tiempo)

baja que el hidrógeno es neutro cerca de la superficie, y, a medida que se ioniza en las capas interiores, produce una zona de convección en la envoltura que rodea al núcleo radiativo.

La masa estelar de transición para la cual los ciclos C-N y p-p contribuyen aproximadamente en igual medida a la producción de energía, se encuentra alrededor de $2M_{\odot}$.

En las etapas finales de la MS, la estrella se contrae en un intento de mantener la producción de energía aumentando la temperatura central. Finalmente, cuando el hidrógeno está totalmente agotado en el centro, la combustión de hidrógeno se desplaza a una cáscara que rodea al núcleo inerte de helio.

Es evidente que la luminosidad de la estrella aumenta con la masa. Esto tiene sus implicaciones en el tiempo que pasa en la MS. Dado que la energía nuclear disponible es, aproximadamente, proporcional a la masa de la estrella, el tiempo de vida nuclear τ_N va como M_*/L_* o, de acuerdo con las estimaciones para L_* , como una potencia de M_* de la forma $\tau_N \propto M_*^{-2}$. De hecho, para estrellas con masa menor a $0.9M_{\odot}$ el tiempo de vida en la MS excede la edad actual del Universo, mientras que estrellas de más de $60M_{\odot}$ terminan su evolución en la MS en menos de 4 millones de años.

La contracción posterior del núcleo conduce a una expansión de la envoltura. Dicha expansión produce un decrecimiento en la temperatura efectiva y la estrella se mueve hacia la Rama de Gigante Roja (*Red Giant Branch* (RGB)) donde aumenta su luminosidad con poca variación en la temperatura efectiva. Esta etapa continúa hasta que el núcleo alcanza la temperatura de fusión del helio.

La evolución siguiente depende de la masa de la estrella en forma muy sensible, por lo tanto, podemos diferenciar tres casos posibles:

Estrellas de masa intermedia ($2-10M_{\odot}$): Cuando comienza la fusión de helio, el núcleo se expande como resultado del suplemento extra de energía. Esta expansión también ayuda a estabilizar la temperatura, tal que la fusión de helio se dá en forma controlada. La expansión del núcleo lleva a una contracción de la envoltura, reflejada en la evolución fuera de la Rama Gigante y luego hacia temperaturas efectivas más altas.

A medida que la combustión de helio continúa, el núcleo comienza a contraerse nuevamente y la envoltura se expande, llevando la evolución hacia temperaturas efectivas menores. Esto sigue hasta que el helio en el núcleo se agota, ahora reemplazado por carbono, oxígeno y elementos más pesados. Así como en el caso del hidrógeno, al agotamiento del helio en el núcleo le sigue el establecimiento de una cáscara de helio en combustión que rodea al núcleo, dando a la estrella una estructura de capas o de *cebolla*.

Posteriormente, la región intermedia se expande llevando a la reducción de la temperatura en la cáscara de hidrógeno la cual, por consiguiente, se vuelve inactiva. En este punto la energía está dada esencialmente solo por la cáscara de helio en combustión. La contracción del núcleo provoca una fuerte expansión de la envoltura y la estrella se mueve hacia la línea de Hayashi² en la llamada Rama Asintótica de las Gigantes (*Asymptotic Giant Branch* (AGB)), a luminosidades muy altas.

Para estrellas con masas entre $\sim 2M_{\odot}$ y $\sim 8M_{\odot}$ el núcleo nunca alcanza la temperatura de fusión de carbono. Hay dos razones para esto. Primero, la densidad del núcleo de carbono-oxígeno en contracción se vuelve tan alta que los electrones se vuelven fuertemente degenerados. Segundo, se produce un enfriamiento del núcleo mediante varios procesos de generación de

y el radio de la estrella, y σ es la constante de radiación. La distribución espectral de las estrellas se aparta de la de un cuerpo negro; sin embargo, la temperatura efectiva es, en general, una buena representación de la temperatura del material en la superficie estelar.

²La línea de Hayashi se define como el lugar en el diagrama H-R donde se encuentran las estrellas completamente convectivas. Para cada conjunto de parámetros: masa estelar y composición química hay una dada línea. Estas líneas están localizadas a la derecha en el diagrama H-R ($T_{\text{eff}} \sim 3000 - 5000$ K). La región a la derecha de esta línea es una región *prohibida*: una estrella en esa región puede ser estable por un intervalo de tiempo muy breve. En otras palabras, una estrella a la derecha de la línea de Hayashi colapsará rápidamente (en una escala de tiempo dinámica) (por detalles, ver Kippenhahn & Weigert 1990).

neutrinos en plasmas muy densos; los neutrinos escapan del núcleo sin interactuar esencialmente con el medio, removiendo la energía térmica.

La envoltura muy extendida se vuelve inestable por la rápida pérdida de masa, la cual en un período de menos de 50 000 años remueve casi toda la envoltura exterior al núcleo de carbono-oxígeno. El núcleo permanece como un objeto compacto muy degenerado con una masa de $0.5\text{-}1M_{\odot}$ y un radio comparable al de la Tierra. Inicialmente es muy caliente, con una temperatura superficial mayor a $100\,000\text{K}$; radiando predominantemente para perder energía térmica, enfriándose en forma gradual. Estos objetos se desarrollan en enanas blancas. La materia eyectada alrededor de la estrella brilla por algunos miles de años como una Nebulosa Planetaria, como resultado de la fluorescencia causada por la radiación UV del objeto central, antes de que la materia sea dispersada en el medio interestelar.

En particular, las estrellas que poseen una masa tal que $8M_{\odot} < M_* < 10M_{\odot}$ serán capaces de llegar a la etapa de combustión de carbono en condiciones semi-degeneradas dando como resultado enanas blancas masivas con núcleos de oxígeno y neón.

Estrellas de baja masa ($M_* < 2M_{\odot}$): Para estrellas con masas menores a $2M_{\odot}$ el comienzo de la combustión de helio es más dramático. En este caso el núcleo de helio está dominado por la presión del gas de electrones degenerado. La combustión de hidrógeno en la cáscara que rodea al núcleo continúa agregando helio a este a medida que asciende por la AGB. Cuando la masa del núcleo alcanza $\sim 0.45\text{-}0.50M_{\odot}$, la temperatura y la densidad se vuelven suficientemente altas para iniciar la segunda etapa de combustión nuclear, mediante el proceso *triple α* , donde tres núcleos de helio se fusionan en un núcleo de carbono. La energía liberada por la re-ignición de las reacciones nucleares produce un aumento no controlado en la temperatura del gas debido a que la presión está dada por un gas de electrones degenerado. Esto lleva al aumento en la tasa de fusión de helio. El resultado es una desestabilización térmica llamada flash de helio que provee un aumento de calor y presión suficiente para remover la degeneración electrónica y regresar al núcleo a su condición *normal*, donde la presión se determina mediante la ecuación de estado del gas ideal. Durante algunas horas la tasa de producción de energía en el núcleo es tan alta que la estrella alcanza una luminosidad del orden de $10^{10}L_{\odot}$, comparable con la luminosidad total de la Galaxia.

La evolución de las partes externas de la estrella durante el flash de helio es incierta. La mayor parte de la energía liberada durante el flash se absorbe en una expansión o eyección parcial de la envoltura ya muy extendida. Cuando la estrella se asienta finalmente en la fusión estable de helio, lo hace en la Rama Horizontal (*Horizontal Branch* (HB)), en una posición que depende principalmente de la extensión de la envoltura de hidrógeno remanente.

Después de completar la fusión central de helio, las estrellas poseen dos cáscaras en combustión: una de helio y otra más externa de hidrógeno. Luego evolucionan recorriendo varios *loops* en el diagrama H-R antes de asentarse en la AGB. Como en el caso previo, la degeneración y el enfriamiento por neutrinos prohíben que el núcleo alcance la temperatura de fusión de carbono, y la estrella termina su vida como una enana blanca de carbono y oxígeno, rodeada brevemente por una Nebulosa Planetaria.

Estrellas de alta masa ($M_* > 10M_{\odot}$): Para masas mayores que $10M_{\odot}$ la temperatura del núcleo luego del final de la combustión de helio continúa creciendo, hasta el punto donde comienza la fusión de carbono y posteriores etapas de combustión nuclear. El resultado final es que la estrella termina su vida con una explosión de supernova. La serie final de reacciones nucleares, comenzando con la combustión de carbono y llegando a elementos del grupo del hierro, toma solamente algunos cientos de años. Con la formación del hierro en el núcleo la estrella ha agotado las posibilidades de continuar generando energía mediante fusión nuclear, dado que la fusión de hierro es endotérmica. Como resultado, el núcleo sólo puede generar energía mediante la contracción gravitacional, lo que causa un aumento en la temperatura tal que los núcleos atómicos de hierro se disocian en protones y neutrones. A medida que aumenta la densidad, la situación se vuelve energéticamente favorable como para que los electrones

se combinen con los protones para formar neutrones, con emisión de neutrinos. El colapso solo se interrumpe cuando el núcleo alcanza densidades del orden de los núcleos atómicos y los neutrones se vuelven degenerados. La onda de choque generada como resultado detiene repentinamente el colapso que, junto con los neutrinos de la captura de electrones, transfiere energía a la envoltura eyectándola en una explosión de supernova. El núcleo de la estrella es ahora un objeto extremadamente compacto. Si la masa está por debajo de $1.5-2M_{\odot}$ se transforma en una estrella de neutrones degenerada. Dichos objetos se observan como pulsares. Si el núcleo es más masivo, la presión dada por el gas de neutrones degenerado no es suficiente para contrarrestar el colapso gravitacional, y el núcleo colapsa para formar un agujero negro.

1.2. Evolución en la Rama Horizontal

1.2.1. Formación de las Estrellas de la Rama Horizontal

La Rama Horizontal representa la fase evolutiva de combustión nuclear de helio para estrellas de baja masa. La HB comienza en la llamada Rama Horizontal de Edad Cero (*Zero Age Horizontal Branch* (ZAHB)). Los objetos que se encuentran en la ZAHB poseen un núcleo homogéneo, no-degenerado de helio con una masa de $M_c \approx 0.45M_{\odot}$, rodeado por una envoltura rica en hidrógeno. La luminosidad total consiste en una contribución de la combustión de helio en el núcleo y otra de la cáscara de hidrógeno en combustión. El límite superior de la HB es la Rama Horizontal de Edad Terminal (*Terminal Age Horizontal Branch* (TAHB)) y marca el momento en el cual la estrella ha completado el 99 % de su tiempo de combustión de helio en el núcleo; luego de este punto la evolución ocurre relativamente rápido, por lo cual se espera observar pocas estrellas (Brown et al. 2001).

La HB ocurre solamente para cúmulos de baja metalicidad. Se observa que cuanto más baja es la metalicidad del cúmulo la HB se extiende más hacia el azul.

La Rama Horizontal Extrema (*Extreme Horizontal Branch* (EHB)) es una extensión de la HB hacia temperaturas más altas³. Estrellas en la EHB son objetos que fallan en alcanzar la etapa de pulsación térmica en la AGB después de evolucionar de la ZAHB. Las estrellas en la EHB han sufrido una pérdida de masa tan extrema durante su primer ascenso a la RGB que solamente sobrevive una envoltura de hidrógeno muy delgada. Durante el flash y la relajación a la combustión de helio en la ZAHB la abundancia de carbono en el núcleo aumenta en alrededor de 3 % pero la masa del núcleo permanece esencialmente inalterada. Estudios de cúmulos globulares y observaciones de las poblaciones de estrellas de campo en la HB muestran que estrellas en la RGB pierden una cantidad sustancial de masa ($\Delta M_{\text{RGB}} \approx 0.3 M_{\odot}$) antes de llegar a la HB.

Como ya mencionamos, las estrellas ubicadas en la EHB se encuentran en cúmulos globulares de baja metalicidad como una extensión de la HB normal. A mayores metalicidades, se encuentran en cúmulos ricos en metales, como NGC6791, y como sub-enanas B. Las estrellas sub-enanas B (*subdwarf B* (sdB)) son estrellas de campo que constituyen el equivalente evolutivo a las estrellas de la EHB en cúmulos globulares. Las estrellas de la EHB se forman a partir del material primario, hidrógeno y helio, en cúmulos globulares, mientras que las estrellas sdB incluyen además materiales pesados previamente procesados por otras estrellas, en particular metales.

Una vez que la estrella abandona la MS comienza a ascender por la RGB sobre la cual aumenta su luminosidad a una temperatura efectiva casi constante. Si una estrella no sufre una pérdida importante de masa durante su paso por la RGB, esta evolucionará a luminosidades

³Se cree que el exceso de radiación ultravioleta que se observa en cúmulos de estrellas y galaxias elípticas, se debe en gran medida al flujo ultravioleta proveniente de las estrellas en la EHB y post-EHB (D’Cruz et al. 1996).

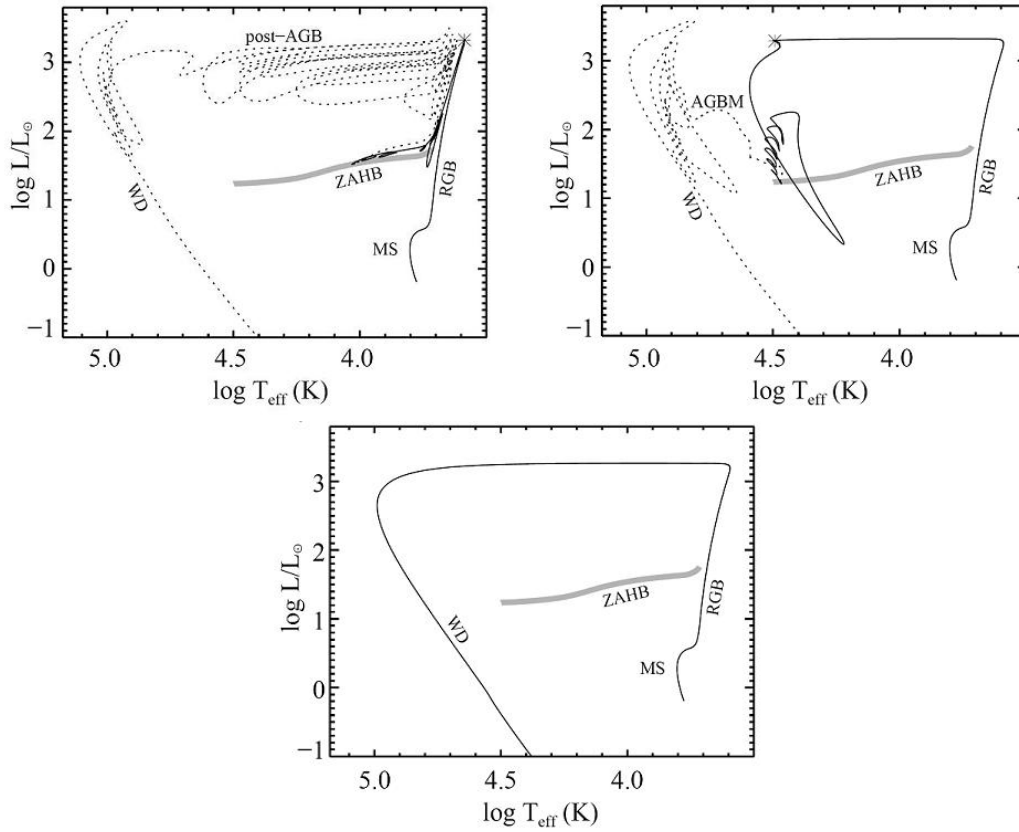


Figura 1.1: Tracks evolutivos representando los tres caminos posibles de la evolución previa a la HB. El panel superior izquierdo corresponde al caso de una estrella tipo *tip flasher*, el panel superior derecho al caso de estrellas *hot He-flashers* y por último, en el panel inferior se muestra el camino correspondiente a las estrellas que no pasan por la fase de HB. La evolución se calcula a través de la MS, RGB, y la etapa de flashes de helio hasta la ZAHB (línea sólida), y luego a través de las etapas de HB y post-HB hasta la curva de enfriamiento de las enanas blancas (línea punteada). Adaptada de Brown et al. 2001.

mayores hasta que, en la punta de la RGB, se produzca la ignición del núcleo de helio. Este suceso, denominado flash de helio, se produce cuando la masa del núcleo alcanza $0.5M_{\odot}$, en el que $Y = 1 - Z$. Las estrellas que siguen este camino evolutivo se denominan *tip flashers* (D’Cruz et al. 1996). Luego del flash de helio las estrellas *tip flashers* evolucionarán hacia luminosidades más bajas formando parte de la Rama Horizontal Roja (*Red Horizontal Branch* (RHB)) o de baja temperatura efectiva. En la figura 1.1 (panel superior izquierdo) se muestra un track evolutivo característico de una estrella tipo *tip flasher*. **Este camino evolutivo es por mucho el más común entre los tres caminos que se explican en esta sección.**

Por otra parte, con tasas de pérdida de masa extremas durante el primer ascenso por la RGB, una estrella puede perder tanta masa que en algún punto de la evolución su masa total se vuelve comparable con la masa del núcleo. Con una envoltura tan pequeña, no puede existir un exterior convectivo. Entonces, en lugar de continuar su recorrido por la Rama Gigante aumentando su luminosidad y convertirse en una *tip flasher*, la estrella abandona prematuramente la etapa de gigante roja y evoluciona hacia temperaturas más altas a una luminosidad casi constante. A estas estrellas las llamamos *RGB peel off*. Una vez que la estrella abandona la RGB hay dos caminos posibles a seguir. El primero se asemeja a la evolución de modelos posteriores a la AGB (post-AGB), pero con estrellas tipo *peel off*, que terminan su vida como enanas blancas de helio. Estas estrellas no pasan por la HB y se unen directamente a la curva de enfriamiento de las enanas blancas luego de abandonar la RGB (ver panel inferior de la figura 1.1). Este camino evolutivo provee de una cota inferior para la masa de la envoltura necesaria para que

ocurra el flash de helio y está dada por la masa de la envoltura al momento de en que la estrella abandona la etapa de gigante. Por lo tanto, fija la temperatura efectiva mínima para una estrella de la HB en el comienzo de la combustión de helio.

Por otra parte, pese al hecho de que algunas estrellas disminuyen su temperatura efectiva en la curva de enfriamiento de las enanas blancas, para algunos intervalos de los parámetros puede ocurrir un flash de helio. Aún cuando la capa de combustión de hidrógeno se extinga, las partes exteriores del núcleo de helio son lo suficientemente compresibles como para que la contracción continúe, llevando a una eventual ignición de helio. Este es el tercer camino evolutivo considerado y llamaremos a estos objetos *hot He-flashers* (ver panel superior derecho de la figura 1.1). Estas estrellas pasan toda la etapa de combustión de helio a temperaturas efectivas altas como estrellas de la EHB. Después de que se detiene la combustión de helio, las estrellas en la EHB evolucionan en estrellas post AGB-tempranas (*Post Early Asymptotic Giant Branch* (P-EAGB)), abandonando la AGB antes del pulso térmico, o en AGB-Manqué, que nunca alcanzan la AGB.

1.2.2. Evolución Durante la Rama Horizontal

Como ya mencionamos, el suceso que marca el final de la etapa de Gigante Roja está dado por el flash de helio en el núcleo. Luego del flash, la estrella ingresa en una etapa de transición que finalizará cuando se asiente en la ZAHB.

Durante el flash principal de helio, la luminosidad dada por el helio en combustión alcanza $10^{10}L_{\odot}$. Durante aproximadamente 800 años, la luminosidad dada por la combustión de helio excede la luminosidad superficial (L_*) que estaba presente durante la evolución previa a través del diagrama Hertzsprung-Russell (H-R) ($\log L/L_{\odot} \sim 3.3$). A diferencia de la mayoría de las fases de la evolución estelar, el flash en si mismo ocurre en cuestión de minutos en lugar de millones de años. Este flash consiste esencialmente en un encendido masivo y sin control de las reacciones nucleares cerca del centro de la estrella que libera una enorme cantidad de energía en una escala temporal corta. Se esperaría que la gran cantidad de energía liberada durante el flash principal ($\sim 1.5 \times 10^{49}$ erg) produzca un repentino aumento en la luminosidad superficial, sin embargo, virtualmente toda esta energía se utiliza para remover la degeneración del núcleo. De hecho, la energía en realidad fluye hacia adentro desde la parte interna de la envoltura hacia el núcleo, justo después del pico principal del flash. Por lo tanto, aún cuando la estrella produce una enorme cantidad de energía en su interior profundo durante el flash principal, muy poca de esta energía en realidad alcanza la superficie.

El flash principal es seguido por una serie de flashes secundarios de menor amplitud a medida que la combustión de helio se mueve hacia el centro. Los flashes secundarios son responsables de los giros en los tracks que preceden inmediatamente a la fase ZAHB (ver figura 1.1).

Eventualmente, la combustión de helio se estabiliza, y la estrella se asienta en la ZAHB. La fase de combustión de helio en la evolución estelar tiene una importancia particular, porque produce dos “faros estandar” de estrellas pulsantes a diferentes rangos de masa: Cefeidas de masas intermedias y estrellas RR Lira de baja masa.

Para composiciones fijas, la HB se entiende como una secuencia de objetos con masas del núcleo fijas (M_c) y masas de envoltura variables (M_{env}). Hay una dispersión intrínseca en las masas de la HB debido a la pérdida de masa en etapas anteriores. Esto indica que la característica definitiva de la HB está determinada en realidad por un proceso “no canónico” que ocurre previamente a la misma.

La masa del núcleo, M_c , está determinada por el comienzo del flash del núcleo de helio. Consideraciones energéticas, limitando la cantidad de energía requerida para remover la degeneración central, permiten solo variaciones débiles entre estrellas a una abundancia fija. Pequeñas diferencias pueden sin embargo surgir entre las estrellas por la variación entre las tasas de rotación (Renzini et al. 1977) o tal vez variaciones de estrella a estrella en la abun-

dancia inicial de CNO (Briley et al. 1994). Además M_c varía poco con la edad, lo cual es una propiedad que en principio hace de las estrella en la HB buenos “faros estandar”.

Dejando de lado las variaciones en la abundancia de helio y la masa del núcleo, los factores importantes que afectan la distribución de masas son las abundancias de carbono, nitrógeno y oxígeno, que permiten la producción de energía nuclear, y la opacidad $\kappa(\rho, T, X_i)$ que la regula.

La HB no es simplemente una secuencia en T_{eff} , sino también una secuencia en la masa de la envoltura (M_{env}). Estrellas con M_{env} alta ocupan la RHB o de baja T_{eff} , mientras que estrellas con M_{env} pequeña ocupan la EHB o de alta temperatura. Los modelos tienen luminosidad de núcleo casi fija, pero con grandes variaciones en la luminosidad de la cáscara de hidrógeno (Iben & Rood 1970; Dorman 1992). La estructura de su envoltura rica en hidrógeno es de “tipo gigante” en el extremo rojo, donde la cáscara de hidrógeno contribuye más a la producción de energía e induce una envoltura convectiva extensa. Para masas de envoltura más pequeñas la potencia de la cáscara de hidrógeno cae hasta que las zonas exteriores sean radiativas. En el límite azul las envolturas son de “tipo enana”, donde la envoltura exterior de hidrógeno permanece inerte hasta la etapa de combustión en la cáscara de helio. La imagen cualitativa básica no varía mucho con la metalicidad, abundancia de helio o cualquier otro parámetro conocido que afecte esta etapa de evolución.

Las estrellas tienen un núcleo convectivo que se vuelve enriquecido en carbono y oxígeno durante la combustión de helio. La opacidad en este rango de temperatura y densidad está dominada por transiciones libre-libre. Sin embargo, la opacidad libre-libre crece cuando aumenta la abundancia de carbono y oxígeno. Como consecuencia se forma una capa semiconvectiva sobre la región convectiva central (Castellani et al. 1971). La masa del núcleo de helio crece debido a la capa de hidrógeno en combustión, mientras que en el núcleo convectivo, el helio se consume y se producen carbono y oxígeno. Después de algún tiempo un núcleo de carbono y oxígeno se formará en la región central del núcleo de helio. La combustión nuclear se localiza en dos cáscaras (de hidrógeno y helio en combustión) y en la fase de evolución subsiguiente, las masas dentro de estas cáscaras aumentará.

Después de que la cáscara de hidrógeno se ha quemado por algún tiempo, la temperatura en la misma disminuye, y la combustión de hidrógeno se extingue. La capa de transición entre la envoltura rica en hidrógeno y la región de helio permanece fija. Pero aún hay una capa de helio en combustión que se aproxima a la base de la envoltura rica en hidrógeno. Dado que la combustión de helio procede a una temperatura de $\sim 10^8\text{K}$, que es alrededor de diez veces la temperatura de ignición de hidrógeno, la combustión de hidrógeno comienza nuevamente, y una vez más hay dos cáscaras-fuente. En esta fase, la combustión de cáscara se vuelve inestable, resultando en un escape de energía térmica. Esto lleva a un fenómeno cíclico (recurrente aquí dentro de algunos 10^5 años) conocido como *pulsos térmicos*. Los pulsos son más o menos un fenómeno de envoltura y no tienen influencia sobre en núcleo. La parte interna del núcleo de carbono-oxígeno se asemeja cada vez más a una enana blanca (Kippenhahn, Weigert & Hofmeister 1967).

1.2.3. Evolución Posterior a la Rama Horizontal

Los rasgos de la evolución post-AGB están determinados por dos factores principales (Dorman et al. 1993). El primero es la delicada interacción entre las tres fuentes de luminosidad: combustión en las capas de hidrógeno y helio junto con la liberación de energía gravitacional que denominaremos L_h , L_{he} , L_g respectivamente. El segundo es la formación de zonas convectivas exteriores. La diversidad de la morfología de los tracks surge porque la evolución de modelos con núcleos similares se ve a través de la envoltura. Los modelos considerados por Dorman et al. (1993) muestran que, para estrellas de baja masa, la formación de una envoltura extendida gigante está directamente relacionada con el crecimiento de L_h . La fuerza de la capa en si misma es regulada por la masa de la envoltura: si L_h es muy pequeña porque M_{env}^0 es pequeña, la

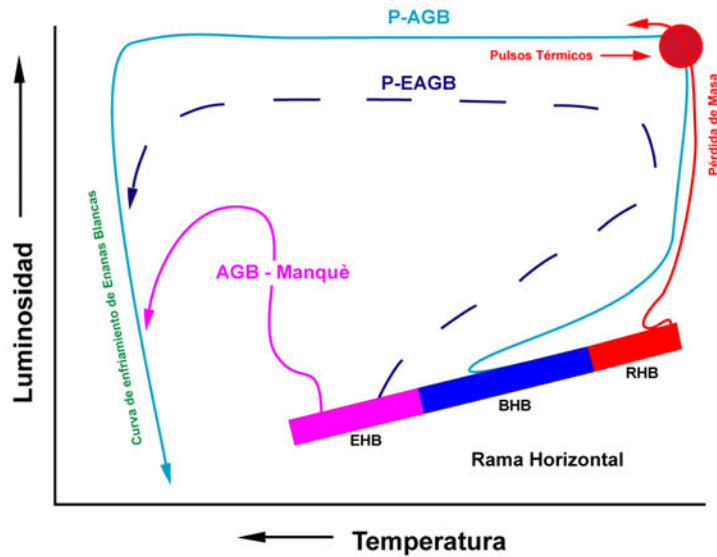


Figura 1.2: Esquema de los varios tipos de canales evolutivos en el plano teórico posteriores a la etapa de HB (ver en el texto). Adaptado de Dorman et al. (1993).

estrella no puede convertirse en una gigante fría.

Después del agotamiento del helio central, la energía del proceso *triple α* se reduce hasta que la región del núcleo se contrae lo suficiente para encender la capa de combustión de helio. En esta etapa L_g , que surge de la contracción central, es del mismo orden de magnitud que L_h , mientras que $L_{he} \approx 0$. Esta fase de calentamiento es bastante rápida. A medida que la evolución prosigue, la capa de helio aumenta su brillo y frena el aumento de la capa de hidrógeno y la luminosidad superficial. Entonces, L_{he} aumenta bastante rápido y eventualmente alcanza el equilibrio nuclear, a partir del cual la evolución ocurre a una escala de tiempo nuclear y tanto L_h como L_* comienzan a crecer otra vez. Una vez que la fase de combustión de la capa de helio se establece, continúa durante alrededor de 20 millones de años. Analizando los extremos en el valor de la M_{env}^0 podemos diferenciar entre tres caminos evolutivos diferentes, que consideraremos a continuación. Para estrellas con envolturas suficientemente masivas, la creciente capa de hidrógeno en combustión expande las capas exteriores a una configuración de gigante durante la etapa posterior al agotamiento central. Esto lleva a una evolución normal en la AGB. Este camino evolutivo está indicado en la figura 1.2 con línea celeste y corresponde a estrellas que se encuentran en la zona más fría de la HB (RHB).

Por último, para un rango intermedio, el aumento en el brillo de la capa de helio empuja al modelo hacia la línea de Hayashi. A medida que la combustión de hidrógeno reduce la masa de la envoltura, el crecimiento de L_h va decayendo, y el modelo deja la AGB baja. Secuencias con este comportamiento son estrellas *post early AGB* (Brocato et al. 1990) y están representadas por la línea azul a trazos en la figura 1.2.

Las últimas dos clases de EHB podrían sufrir un pequeño número de pulsos térmicos mientras se alejan de la Rama Gigante. Los tiempos de vida HB de las EHB son de ≈ 20 -150 millones de años con luminosidades típicas de $10 - 100 L_\odot$. Los tiempos P-EAGB son de algunos cientos de miles de años a luminosidades del orden de $1000 L_\odot$. La fase de AGB-Manqué dura 20-40 millones de años a luminosidades ~ 100 -1000 L_\odot con $T_{eff} \sim 30\,000$ K.

1.3. Mecanismos de Pérdida de Masa

Una variedad de canales de formación para estrellas sdB fueron propuestos en el pasado principalmente para estrellas sdB aisladas, es decir que no forman parte de sistemas binarios

o múltiples, dada la ausencia de estrellas sdB binarias identificadas hasta entonces (Han et al. 2002). Un canal de formación posible es la fusión de dos estrellas aisladas, en el cual dos enanas blancas de helio en una configuración de binarias cercanas se acercan gradualmente por la pérdida de momento angular orbital debido a la ondas de radiación gravitacional. Cuando las enanas blancas se fusionan y el objeto resultante enciende el helio, se produce una estrella sdB (Webbink 1984; Iben & Tutukov 1986; Han 1998). En forma alternativa, la pérdida de masa por vientos estelares cerca del extremo superior de la RGB podría remover la envoltura de gigante y dejar un núcleo de helio casi desnudo. Si se enciende el helio en el núcleo, la estrella aparecerá como una sdB aislada (D’Cruz et al. 1996). Sweigart et al. (1997) han estudiado la evolución de estrellas en cúmulos globulares y han sugerido que la mezcla de helio provocada por la rotación interna aumenta sustancialmente la abundancia de helio en la envoltura; esto debería conducir a un aumento en la pérdida de masa a lo largo del primer ascenso a la RGB y la formación de una estrella sdB.

Por otro lado, Mengel et al. (1976) llevaron a cabo cálculos conservativos de evolución binaria. Ellos mostraron que existe un rango de separaciones iniciales para las cuales una transferencia estable de masa puede producir una estrella sdB de $\sim 0.5M_{\odot}$.

Desde el punto de vista de la evolución binaria, estos canales de formación están incompletos. Cuando una estrella llena sus lóbulos de Roche cerca del extremo superior de la RGB, la transferencia de masa comienza y puede ser dinámicamente inestable. Esto lleva a la formación de una envoltura común (Paczynski 1976), donde la envoltura común rodea el núcleo de helio y a la estrella secundaria. Debido a la fricción entre la envoltura y el sistema binario inmerso en ella, la órbita se contrae, depositando una gran cantidad de la energía orbital en la envoltura. Si esta energía es suficiente para eyectar la envoltura y si posteriormente se enciende el helio en el núcleo, se forma una estrella sdB en un sistema binario de período corto con una masa cercana a $0.5M_{\odot}$. Estos son exactamente los tipos de objetos identificados en gran número por Maxted et al. (2001). Si la transferencia de masa cerca del extremo superior de la RGB es dinámicamente estable, la envoltura de la estrella primaria se pierde como resultado de un flujo de material a través del lóbulo de Roche (RLOF)⁴ estable, y el núcleo remanente estará en un sistema binario con un período orbital largo. Esta se vuelve una estrella sdB cuando el helio en el remanente primario se enciende. Un canal adicional para la formación de las estrellas sdB en binarias abiertas, involucra binarias que experimentan RLOF estable cuando cruzan el gap en el diagrama H-R (Han et al. 2000; Han & Podsiadlowski et al. 2002). Todas las estrellas sdB binarias producidas por canales de RLOF estables son consistentes con las observaciones hechas por Green et al. (2000) quienes mostraron que algunas estrellas sdB parecen ser miembros de sistemas binarios de período largo.

La pérdida de masa durante la etapa de gigante roja se modela, generalmente, con la fórmula de Reimers (1975) dada por:

$$\dot{M} = -4 \times 10^{-13} \eta_R \frac{L_*}{gR_*} M_{\odot} \text{años}^{-1}$$

donde η_R es el parámetro de eficiencia de la pérdida de masa, L_* es la luminosidad, g es la gravedad superficial, y R_* es el radio, con L_* , g y R_* normalizados a valores solares. Para producir una HB *normal* en un cúmulo globular se necesita $\eta_R \sim 0.25-0.5$ (Renzini 1981). Si la tasa de pérdida de masa es suficientemente grande, la estrella abandona la RGB antes de alcanzar el límite superior de la misma. Luego la estrella evoluciona hacia temperaturas más altas a una luminosidad constante después de abandonar prematuramente la etapa de gigante. Esto lleva a un decrecimiento en el radio y un aumento en la gravedad superficial, el cual debería disminuir la tasa de pérdida de masa. Usando la fórmula de Reimers o cualquier otra que dependa sólo de los parámetros de superficie, la pérdida de masa continúa hasta que la

⁴Roche Lobe Overflow

estrella abandona en forma prematura la etapa de Gigante Roja. Estas estrellas experimentan el flash del núcleo de helio si abandonan la RGB suficientemente cerca de su extremo superior (~ 0.4 mag), ya sea durante la RGB misma o a temperaturas más altas cuando ya abandonaron la RGB (D'Cruz et al. 1996).

1.4. Pulsaciones Estelares

1.4.1. El Fenómeno de las Pulsaciones Estelares

En términos simples, una estrella puede considerarse como una enorme esfera gaseosa que se mantiene ligada gracias a su propia gravedad, y que radía grandes cantidades de energía hacia el espacio a lo largo de enormes períodos de tiempo. Durante la mayor parte de su vida, una estrella es extremadamente estable, dado que la pérdida de energía radiada desde su superficie se compensa por la energía nuclear que se genera en su interior (*equilibrio térmico*), y sus características físicas básicas pueden no cambiar notablemente durante millones de años. También, una estrella normalmente se encuentra en un estado de equilibrio mecánico, es decir, en cada punto de la estrella la presión del gas balancea exactamente el peso de la capa que está por encima de él (*equilibrio hidrostático*). Si bajo ciertas condiciones la presión excede su valor de equilibrio, la estrella deberá expandirse; si la gravedad se torna levemente excesiva, la estrella deberá contraerse. Así, si se aplica una perturbación sobre la estrella, esta comenzará a oscilar.

Bajo ciertas circunstancias, una pequeña perturbación sobre una estrella puede crecer con el tiempo y tornarse suficientemente grande como para ser observada. Este fenómeno se denomina *oscilación* o *pulsación* estelar, indistintamente. Las pulsaciones estelares se manifiestan principalmente a través de variaciones en la luminosidad de una estrella a lo largo del tiempo⁵. Dichas variaciones pueden tener su origen en cambios en el radio estelar, en la temperatura superficial, en el área y orientación de la superficie estelar, o una combinación de todos estos efectos.

Ondas y oscilaciones son un fenómeno común en la Tierra, como es el caso de las ondas en la superficie de los océanos producidas por la gravedad y las ondas de sonido producidas por gradientes de presión. Las oscilaciones estelares, causadas por estos dos tipos de fuerzas, son de la misma naturaleza que las oscilaciones en la Tierra. En otras palabras, los principios físicos que determinan las características de las oscilaciones son los mismos en ambos casos: la conservación de la masa, momento y energía. Existen, sin embargo, algunas diferencias entre la descripción de las oscilaciones estelares y las ondas en la Tierra. La más importante es la presencia de la radiación, la cual interviene en el movimiento principalmente debido a que el gas estelar absorbe o emite radiación durante las pulsaciones.

Las oscilaciones estelares pueden ser forzadas o auto-excitadas (espontáneas). Las oscilaciones forzadas son causadas por alguna fuerza externa. Por ejemplo, en sistemas binarios cerrados cada componente está sujeta a la fuerza de marea producida por la otra componente. Si la frecuencia de una oscilación de una componentes es idéntica o muy próxima a la frecuencia de la fuerza de marea (frecuencia orbital), puede ocurrir una resonancia a partir de la cual parte de la energía gravitacional orbital es transformada en energía de oscilación de las componentes.

En las oscilaciones estelares auto-excitadas, en cambio, existen procesos físicos en los cuales la energía de radiación se convierte en energía cinética de oscilación. Este proceso se denomina usualmente *mecanismo de excitación*, y actúa en zonas específicas de la estrella. Las oscilaciones estelares auto-excitadas pueden aumentar su amplitud naturalmente a partir de pequeñas perturbaciones que crecen gradualmente y finalmente pueden observarse como un fenómeno de movimiento macroscópico.

⁵También se ponen de manifiesto a través de variaciones en las líneas espectrales.

1.4.2. Pulsaciones No-Radiales

En la teoría de oscilaciones estelares se pueden definir dos tipos de pulsaciones: radiales y no-radiales. Las más sencillas son las pulsaciones radiales, en las cuales la estrella se contrae y se expande modificando su volumen periódicamente conservando la forma esférica en el proceso. Las oscilaciones radiales son ondas estacionarias, con un nodo en el centro y un antinodo en la superficie de la estrella y se comportan como ondas acústicas, para las cuales la fuerza restauradora es la presión. Sin embargo, el tipo de oscilaciones más general que sufre una estrella son las pulsaciones no-radiales. En este caso la estrella se aparta periódicamente de su forma de equilibrio sin conservar la simetría esférica; por lo tanto, los desplazamientos del material estelar puede ser tanto en la dirección radial como en la dirección horizontal. La complejidad de las pulsaciones no-radiales se debe a esta libertad adicional de oscilar en la dirección horizontal. Físicamente, esto se debe a que, en el caso de oscilaciones no-radiales, tanto la gravedad como la presión pueden actuar como la fuerza restauradora. Dado que la variación de la fuerza gravitatoria es hacia adentro en la fase de compresión y hacia fuera en la fase de expansión, la gravedad no puede actuar como fuerza de restauración en las oscilaciones radiales. Por otro lado, la gravedad actúa como fuerza restauradora a través de la flotación (o *buoyancy*) para las oscilaciones no-radiales. Entonces, mientras las pulsaciones radiales tienen un espectro de modos acústicos o de presión (modos p), las pulsaciones no-radiales muestran además un espectro de modos de gravedad (modos g). Como veremos más adelante, las oscilaciones radiales se pueden ver como un caso particular de las no-radiales.

Las ecuaciones diferenciales que modelan el problema de pulsaciones lineales no-radiales en la aproximación adiabática están dadas en el apéndice A, en el cual se sigue el tratamiento de Unno et al. (1989). Para más detalles sobre la teoría de pulsaciones no-radiales en estrellas se recomienda consultar los trabajos de Cox (1980) y Unno et al. (1989).

Consideremos una estrella esféricamente simétrica como un sistema en equilibrio sobre el que se realizan pequeñas perturbaciones. En este tratamiento no tomaremos en cuenta los efectos de rotación o de campos magnéticos. Si suponemos que las perturbaciones de las distintas variables físicas del problema, como la presión, la densidad, etc, son pequeñas respecto de sus valores en el equilibrio, entonces es lícito aplicar un tratamiento lineal. En esta aproximación despreciamos todos los términos de orden dos o mayor en la perturbaciones en las ecuaciones diferenciales (Apéndice A).

Existen dos tipos de variaciones o perturbaciones: las variaciones Eulerianas (f') y las variaciones Lagrangianas (δf) definidas en la ecuación (A.16). La perturbación Euleriana se define como la variación de una cantidad física f medida por un observador en un punto fijo del espacio, mientras que la variación Lagrangiana es la variación de f medida por un observador que se mueve solidario a un dado elemento de fluido. Por consiguiente, una variable física se puede expresar como:

$$f'(r, \theta, \phi, t) = f_0(r) + f'(r, \theta, \phi, t) \quad (1.1)$$

$$\delta f(r, \theta, \phi, t) = f_0(r) + \delta f(r, \theta, \phi, t) \quad (1.2)$$

bajo la condición $f', \delta f \ll f$.

Dado que consideramos el estado de equilibrio como un sistema con simetría esférica, $f_0(\vec{r})$ solo depende de la coordenada radial, mientras que la perturbación lineal, ya sea Euleriana o Lagrangiana, depende de todas las coordenadas espaciales expresadas convenientemente como coordenadas esféricas.

La dependencia de las ecuaciones diferenciales con las coordenadas, después de linealizar, permiten expresar las perturbaciones como un producto de tres funciones que dependen del tiempo, las coordenadas angulares y la coordenada radial respectivamente. La dependencia

temporal está dada por una función sinusoidal (ec. (A.45)) de la forma $e^{i\sigma t}$, donde σ es la frecuencia de oscilación.

La dependencia angular se puede considerar proporcional a los armónicos esféricos, siendo ℓ un número entero positivo⁶ y $m = 0, 1, 2, \dots, \ell$ (ec.(A.36)).

Por último, la dependencia con la coordenada radial está dada por funciones que proporcionan la amplitud relativa de las pulsaciones dentro de la estrella. Dichas funciones son las autofunciones del problema y se obtienen como solución de las ecuaciones de pulsación junto con los autovalores (σ^2) correspondientes (ver Apéndice A).

Los modos de oscilación, o modos normales, en los que puede oscilar una dada estrella están caracterizados por tres números: un grado armónico ℓ , un orden azimutal m y un orden radial k . El grado armónico ℓ corresponde al número de líneas de movimiento nulo en la superficie de la estrella, llamadas líneas nodales; de las cuales $|m|$ son perpendiculares al Ecuador y $\ell - |m|$ son paralelas a él. Para los modos de pulsación con $\ell = |m|$ todas las líneas nodales son meridianos, estos modos se denominan modos sectoriales. En cambio, aquellos modos con $m = 0$, llamados modos zonales, poseen solo líneas nodales de longitud, es decir, paralelos. Por último si $0 \neq |m| \neq \ell$ tenemos modos tesorales, para los cuales tenemos líneas nodales tanto de longitud como de latitud. La superficie de la estrella queda dividida por estas líneas nodales en zonas con fase opuesta en brillo (temperatura) y velocidad del material estelar. Estos modos no-radiales se denominan modos esferoidales⁷.

En la figura 1.3 se muestran los patrones modales de oscilaciones no-radiales para ciertos valores de ℓ y m . Como se ve en la figura, cuanto mayor es ℓ , mayor es la cantidad de divisiones sobre la superficie estelar y las regiones oscilantes con distintas fases son más pequeñas. En consecuencia, las contribuciones de las regiones se cancelan entre sí, de modo tal que la amplitud de variabilidad de la estrella es muy pequeña para ser detectada. Debido a esto, los modos de bajo grado armónico se observan con mayor facilidad, mientras que los modos con $\ell \gtrsim 3 - 4$ se vuelven inobservables.

Para modelos estelares sencillos el orden radial k es igual al número de nodos radiales. Esto nodos radiales se definen como superficies esféricas de radio r_i sobre las cuales el movimiento del fluido es nulo, es decir, $\xi_r(r_i) = 0$ para $0 \leq i \leq k$. Es importante notar que las ecuaciones de pulsación (Apéndice A) no dependen explícitamente del orden azimutal m . Por lo tanto tampoco lo harán los autovalores (σ^2). Esto implica que cada frecuencia de oscilación no-radial tendrá una degeneración de orden $2\ell + 1$ con respecto a m . Es decir, que los $2\ell + 1$ modos normales caracterizados por los mismos ℓ y k oscilarán con la misma frecuencia σ .

1.4.3. Características Generales de los Modos No-Radiales

En el contexto de las oscilaciones estelares no-radiales podemos encontrar dos tipos de modos, dependiendo de qué fuerza restauradora esté actuando en mayor o menor medida. Estos modos se conocen como modos p y modos g .

Los modos p , o modos de presión, se caracterizan por variaciones Eulerianas de la presión relativamente grandes y desplazamientos principalmente en la dirección radial, en particular cerca de la superficie de la estrella. La principal fuerza de restitución proviene de los gradientes de presión, en forma similar a lo que ocurre con las ondas de sonido. De esta manera, se pueden considerar como el análogo no-radial de los modos radiales de oscilación. El espectro de modos p ocupa el dominio de las altas frecuencias y se propagan generalmente en las zonas de la envoltura, donde la amplitud de oscilación es más grande. Las frecuencias (períodos) de los modos p se incrementan (decrecen) a medida que k y ℓ aumentan.

⁶Que se corresponde con el número de raíces de $\cos(m\varphi)=0$ en el intervalo $0 \leq \varphi \leq \pi$.

⁷En presencia de rotación aparece otro tipo de modos, denominados modos Rossby o modos- r . Dichos modos forman parte de la familia de los modos toroidales. En ausencia de rotación los modos Rossby consisten en una traslación horizontal con frecuencia nula.

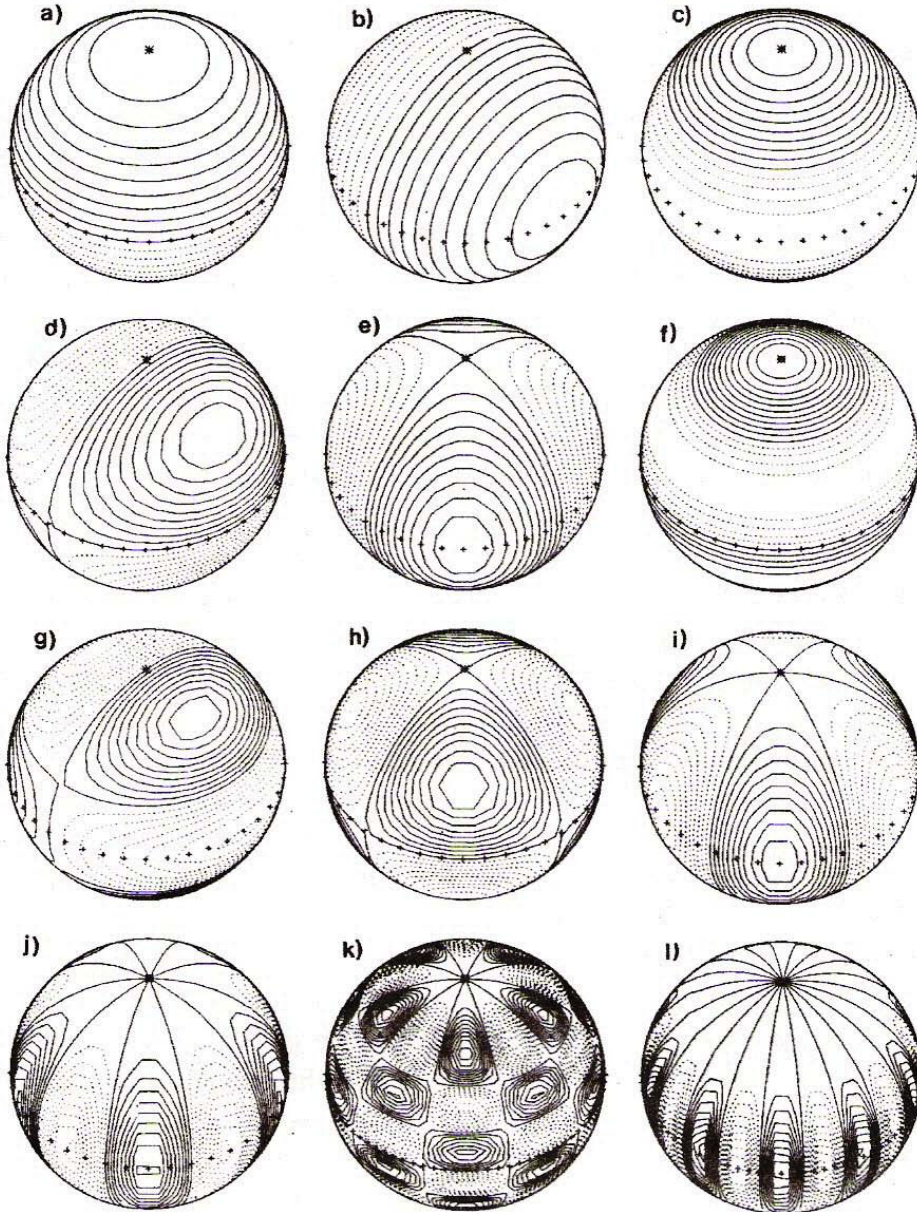


Figura 1.3: Esquema de contornos de la parte real de los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ sobre la superficie de una estrella que pulsa en modos no-radiales. Los contornos positivos se indican con líneas continuas y los negativos con líneas punteadas. El eje $\theta = 0$ ha sido inclinado en un ángulo de 45 grados hacia el observador; el Ecuador se indica con símbolos '+'. Los casos ilustrados son: a) $\ell = 1, m = 0$; b) $\ell = 1, m = 1$; c) $\ell = 2, m = 0$; d) $\ell = 2, m = 1$; e) $\ell = 2, m = 2$; f) $\ell = 3, m = 0$; g) $\ell = 3, m = 1$; h) $\ell = 3, m = 2$; i) $\ell = 3, m = 3$; j) $\ell = 5, m = 5$; k) $\ell = 10, m = 5$; l) $\ell = 10, m = 10$ (Adaptado de Christensen-Dalsgaard 1998b).

Los modos g , o modos de gravedad, se distinguen por pequeñas variaciones Eulerianas de la presión y desplazamientos primariamente en la dirección tangencial. En este caso, la fuerza de restitución está dada principalmente por la flotación (o *bouyancy*). Los modos g corresponden al dominio de bajas frecuencias y se propagan generalmente en zonas internas de la estrella, cercanas al núcleo⁸. Los períodos (frecuencias) de los modos g aumentan (decrecen) a medida que k y ℓ se incrementan. Tanto los modos p como los modos g existen para cualquier valor de ℓ .

Existe una tercer clase de modos, llamados modos f o modos de Kelvin. El modo f es único dado un valor de $\ell > 1$. Para modelos estelares sencillos, este modo no posee nodos en la dirección radial y posee características tanto de modos p como de modos g . En particular su autofrecuencia, que aumenta lentamente con ℓ creciente, tiene un valor intermedio entre las frecuencias de los modos p y g de menor orden radial ($k = 1$).

La clasificación de modos no es tan simple cuando se trata de un modelo estelar más realista. Si existe una zona convectiva dentro de la estrella aparecerá un espectro adicional de modos inestables. Estos modos se denominan modos g^- para distinguirlos de los modos g , a veces designados modos g^+ . Los modos g^- poseen una variación exponencial con el tiempo y un carácter espacial oscilatorio sólo en regiones convectivas de la estrella. Por el contrario, los modos g^+ son oscilatorios sólo en zonas radiativas y se vuelven evanescentes en zonas convectivas.

1.4.4. Frecuencias características de Oscilación

Una forma de comprender las propiedades cualitativas de las oscilaciones no-radiales es mediante un tratamiento local. Consideremos primero la aproximación de Cowling (Cowling 1941) que consiste en desprestigiar la variación Euleriana del potencial gravitatorio ($\Phi' = 0$) en las ecuaciones (A.48) y (A.49) del apéndice A. Estas ecuaciones pueden desacoplarse mediante el siguiente cambio de variables (Unno et al. 1989):

$$\vec{\xi} = r^2 \xi_r \exp\left(-\int_0^r \frac{g}{c_s^2} dr\right) \quad (1.3)$$

$$\vec{\eta} = -\frac{p'}{p} \exp\left(-\int_0^r \frac{N_2}{g} dr\right) = \sigma^2 r \xi_r \exp\left(-\int_0^r \frac{N_2}{g} dr\right) \quad (1.4)$$

Si consideramos que los coeficientes del sistema desacoplado varían lentamente podemos proponer soluciones de la forma $\exp(ik_r r)$, siendo k_r el número de onda en la dirección radial ($k_r \gg 1$). Reemplazando en las ecuaciones se obtiene la siguiente relación de dispersión:

$$k_r^2 = \frac{1}{\sigma^2 c_s^2} (\sigma^2 - L_\ell^2) (\sigma^2 - N^2)$$

donde N y L_ℓ son las frecuencias de Brunt-Väisälä y Lamb, respectivamente (ver ecuaciones (A.44) y (A.45) del Apéndice A). La frecuencia de Brunt-Väisälä es la frecuencia con la que una burbuja de gas oscila verticalmente alrededor de su posición de equilibrio bajo los efectos de la gravedad. Esta frecuencia caracteriza las propiedades de los modos g . La frecuencia de Lamb, en cambio, caracteriza los modos p . De hecho, el tiempo que tarda una onda acústica en recorrer una longitud de onda ($\lambda_l = 2\pi r/\ell$) horizontalmente es igual a la inversa de la frecuencia de Lamb multiplicada por 2π .

En la relación de dispersión se puede ver la importancia de las frecuencias críticas de Lamb y Brunt-Väisälä. Si $\sigma^2 > L_\ell^2, N^2$ ó $\sigma^2 < L_\ell^2, N^2, k_r^2 > 0$ y el número de onda radial k_r es real. Esto

⁸Para el caso de las estrellas enanas blancas las zonas de propagación de los modos p y g están intercambiadas, es decir, los modos p son modos del interior mientras que los modos g son modos de envoltura. Esto se debe a que la frecuencia de Brunt-Väisälä adquiere valores extremadamente bajos en el núcleo de estas estrellas, obligando a los modos g a propagarse en la envoltura.

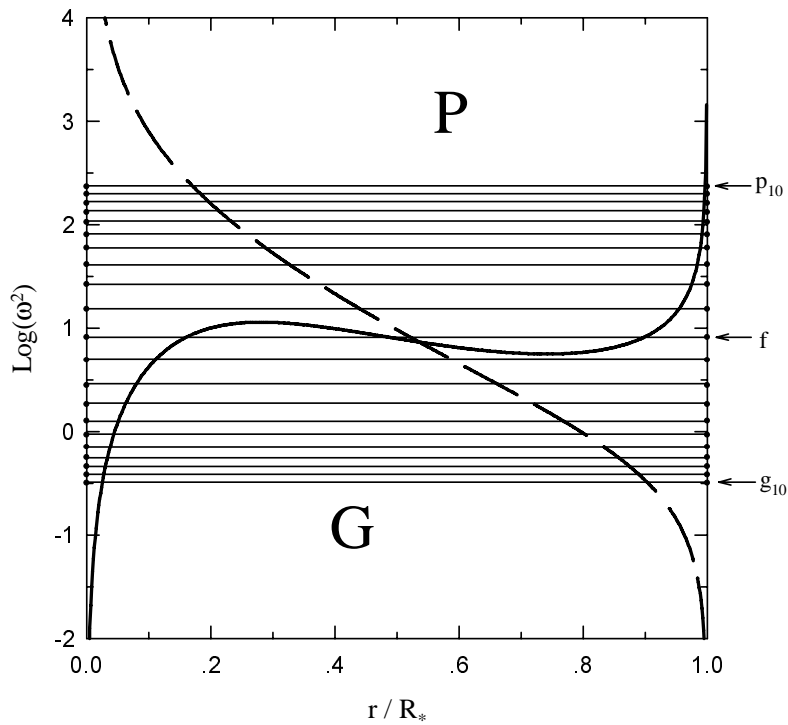


Figura 1.4: El cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä (con línea llena) y la frecuencia de Lamb (con línea de trazos) normalizadas por el factor GM_*/R_*^3 , para una polítropa de índice $n=3$ y un valor $\ell=2$. En el diagrama también hemos incluido los valores de las autofrecuencias adimensionales $\omega^2 = \sigma^2/(GM_*/R_*^3)$ para los primeros 10 modos p y g y el modo f . El subíndice indica el valor de k .

implica que las ondas pueden propagarse en la dirección radial. En cambio, si $N^2 < \sigma^2 < L_\ell^2$ ó $L_\ell^2 < \sigma^2 < N^2$, $k_r^2 < 0$ y el número de onda radial es puramente imaginario. Por lo tanto, las ondas decaen exponencialmente con r , es decir, son ondas evanescentes. Como resultado, el interior de la estrella queda dividido en zonas de propagación y zonas evanescentes determinadas por el valor de la frecuencia de oscilación σ respecto del valor de las frecuencias de Lamb y Brunt-Väisälä.

Una forma útil de visualizar el comportamiento local de los modos es mediante un diagrama de propagación (ver Cox 1980; Unno et al. 1989). Este diagrama consiste en un gráfico de L_ℓ^2 y N^2 en función de la coordenada radial.

En la figura 1.4 se muestra un diagrama de propagación para una polítropa con $n=3$ para $\ell=2$. En ella se grafican las frecuencias de Lamb y Brunt-Väisälä adimensionales: \hat{L}_ℓ^2 y \hat{N}^2 respectivamente, junto con las autofrecuencias adimensionales ω^2 . Aquí G es la constante de gravitación universal y M_* y R_*^3 son la masa y el radio total del modelo politrópico. De la figura 1.4 se puede inferir la existencia de dos zonas de propagación que forman cavidades resonantes donde los modos oscilan. Como ya mencionamos, los modos p se propagan principalmente en zonas externas de la estrella, denotada con P en la figura 1.4, donde $\omega^2 > \hat{L}_\ell^2, \hat{N}^2$. Los modos g , por el contrario, se propagan principalmente en la región central, denotada con G en la figura 1.4, donde se cumple que $\omega^2 < \hat{L}_\ell^2, \hat{N}^2$. Los modos que se propagan dentro de estas cavidades

resonantes se vuelven ondas estacionarias si su autofrecuencia es tal que las ondas reflejadas en los bordes de la cavidad retornan en fase con si mismas. De esta manera, los modos quedan “atrapados” dentro de la cavidad, es decir, que la densidad de energía de oscilación es máxima en estas regiones de la estrella. Estos modos corresponden a los modos propios del modelo estelar. Por último, el modo f , en general, posee una autofrecuencia cercana al mínimo local de N , separando las zonas de propagación de los modos de presión y los modos de gravedad.

Cabe aclarar que la clasificación de modos, se vuelve menos clara para modos de bajo orden radial en modelos estelares con alta densidad central. En este caso los modos en cuestión adquieren un caracter mixto y muestran propiedades tanto de modos p como de modos g . También muestran una relación compleja entre el orden radial k y el número de nodos de la autofunción radial, perdiendo así la relación uno a uno que se encuentra en modelos más simples.

1.5. Astrosismología y Clases de Estrellas Pulsantes

La Astrosismología es un novedoso campo de la Astrofísica que consiste en estudiar la estructura interna de las estrellas a partir del espectro de frecuencias que estas exhiben. Esta disciplina consiste en la comparación entre las frecuencias, o períodos, correspondientes a los modos de pulsación observados y las frecuencias que se obtienen a partir de modelos teóricos representativos de la estrella en cuestión.

Cada modo de oscilación individual se propaga en una región específica de la estrella. En consecuencia, cada frecuencia proporciona información de una región particular del interior estelar, la zona donde el modo asociado oscila con mayor amplitud. Por lo tanto, cuanto mayor sea el número de frecuencias observadas, más completa y precisa será la información que se extraiga de las técnicas astrosismológicas. Información directa acerca de la estructura interna de las estrellas no se puede obtener mediante otras técnicas⁹, las cuales solo proporcionan información sobre la superficie estelar (Espectroscopía, Fotometría).

La Astrosismología aplicada al Sol se denomina Heliosismología. El Sol es un pulsador no-radial que oscila en $\sim 10^7$ modos p simultáneamente. Debido a su cercanía a la Tierra, las frecuencias de oscilación del Sol se pueden medir con mucha precisión. Para el caso de otras estrellas, como ya vimos, los efectos de cancelación geométrica solamente permiten la detección de algunas decenas de modos restringidos a $0 \leq \ell \lesssim 4$.

Las pulsaciones pueden encontrarse en muchas etapas de la evolución estelar. Con un amplio rango de masas, las estrellas pulsantes ocupan muchas regiones en el diagrama de H-R, como se muestra en la Figura 1.5. Debido a la creciente sensibilidad y refinamiento de las técnicas observacionales, en los últimos 20 años se han descubierto un gran número de estrellas variables e incluso se identificaron nuevas clases. Estos avances sugieren que posiblemente la mayoría de las estrellas pulsen, y que las que aparecen como no variables poseen amplitudes de oscilación por debajo del límite de detectabilidad de las técnicas actuales.

En la Tabla 1.5 se muestra una lista de las estrellas variables conocidas junto con su temperatura efectiva, masa, rango de períodos y tipo de modo en el que pulsan.

A continuación se comentarán algunas características de los tipos de estrellas variables. Las primeras estrellas pulsantes descubiertas fueron las Cefeidas. Estas estrellas pulsan típicamente en el modo radial fundamental o en algunos casos también en el primer armónico ($k = 1$). Junto con las estrellas RR Lira, las Cefeidas forman la “banda de inestabilidad clásica” que se ubica entre las dos líneas diagonales en el diagrama H-R de la Figura 1.5. Muchas de ellas son objetos en la fase de combustión nuclear de helio, sin embargo, algunas pueden tener una cáscara de

⁹Excepto a través de los neutrinos los cuales son producidos en los núcleos estelares y viajan hacia el exterior de la estrella casi sin interactuar con la materia.

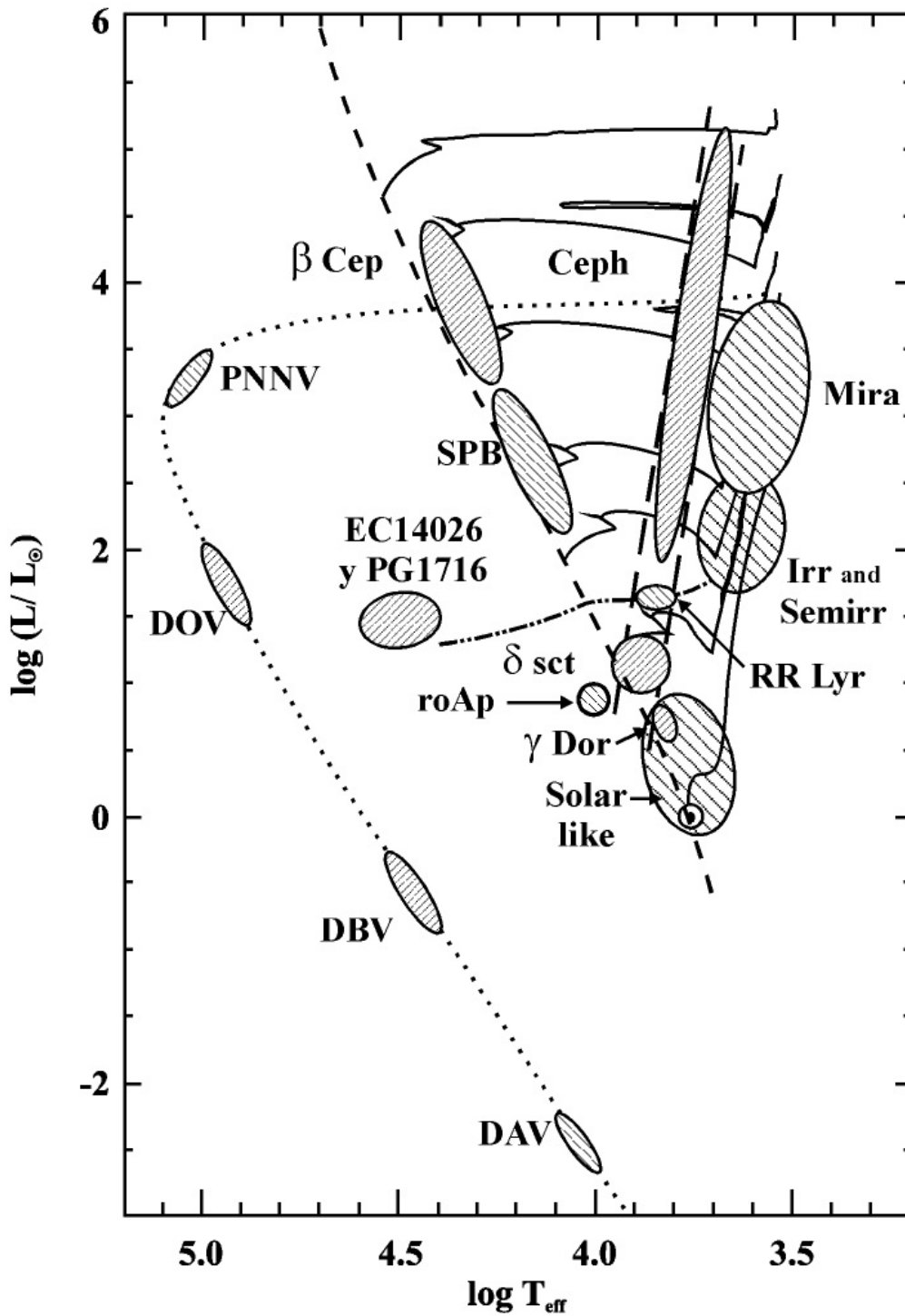


Figura 1.5: Diagrama H-R esquemático ilustrando la distribución de varias clases de estrellas pulsantes (ver tabla 1.5). La línea de trazos muestra la MS, las curvas continuas representan algunos tracks evolutivos para masas de 1, 2, 3, 4, 7, 12 y $20M_{\odot}$, la línea de puntos y trazos es la HB y la curva punteada es la curva de enfriamiento de las enanas blancas (Adaptado de Christensen-Dalsgaard 1998b).

Tabla 1.1: Parámetros y nomenclatura de las clases de estrellas pulsantes conocidas.

Tipo	Acrónimo	T_{eff} (10^3K)	M_*/M_{\odot}	L_*/L_{\odot}	Período	Modos*
Cefeidas	δ Cep	5.5–6.5	5 – 20	$10^3 - 10^5$	2 – 100 d	R
Mira	M ó Mira	2.5–4.0	$\sim 1 - 2$	$10^2 - 10^4$	25 – 400 d	R
RGR ó RAG	SRa, Srb Lb, Lc	2.5–4.0	$\sim 1 - 8$	$10^2 - 10^4$	25 – 400 d	R
RR Lira	RR Lyr	6.0–7.0	0.5–0.8	40 – 50	0.2–1.2 d	R
δ Scuti	δ Sct	7.5–8.7	1.6–2.6	10 – 100	0.5–6 h	R,NR(p)
El Sol	Sol	6.0	1.0	1.0	5 – 10 m	NR(p)
Ap rápidamente oscilantes	roAp	7.0–8.5	1.6–2.6	10 – 50	4 – 15 m	NR(p)
γ Doradus	γ Dor	6.5–7.3	1.4–1.7	5 – 20	0.5–3 d	NR(g)
β Cephei	β Cep	22 – 30	8 – 15	4000 – 20000	3.5–6 h	NR(p)
Slowly pulsating B	SPB	13 – 17	3 – 8	2.5–6	0.6–3 d	NR(g)
Line profile Variables	LPVs	15 – 40	$10^3 - 10^5$	5 – 50	3 – 30 h	NR(p)
GW Virginis	DOV	~ 100	~ 0.6	$\sim 10^2$	300 – 3500 s	NR(g)
DB enanas blancas Variables	DBV	~ 23	~ 0.6	~ 0.03	400 – 1200 s	NR(g)
DA enanas blancas Variables	DAV	~ 12	~ 0.6	$\sim 10^{-3}$	100 – 1200 s	NR(g)
Luminous blue Variables	LBV	~ 20	30 – 100	$10^5 - 10^6$	$\sim 30 - 50$ d	NR ?
R Corona Borealis	RCBr	5.0–7.0	~ 1	$\sim 10^4$	~ 40 d	R ?
sdB	EC 14026	29 – 35	~ 0.5	20 – 40	100 – 400 s	R,NR(p)
sdB	PG 1716	23 – 30	~ 0.5	20 – 40	2000 – 8000 s	NR(g)

* R significa modos radiales; NR(p) significa modos p no-radiales; NR(g) significa modos g no-radiales.

hidrógeno en combustión alrededor del núcleo de helio mientras evolucionan para convertirse en gigantes rojas por primera vez.

Los análogos de baja masa de las variables Cefeidas son las estrellas W Virginis. Estas estrellas están evolucionando hacia la AGB o ya alcanzaron la etapa de pulsos térmicos a medida que abandonan la AGB. También se denominan “Cefeidas de población II” en contraste con las Cefeidas clásicas que son estrellas masivas de Población I¹⁰.

Las estrellas RR Lira son también objetos de Población II y se encuentran en la etapa de combustión de helio en carbono y oxígeno. Así como las Cefeidas, las RR Lira también pulsan en modos radiales y se utilizan como indicadores de distancia, dado que poseen una magnitud absoluta relativamente bien definida. La mayor parte de las estrellas RR Lira conocidas se encuentran en cúmulos globulares de nuestra Galaxia, ocupando el extremo frío de la HB en el diagrama H-R.

En la región más fría del diagrama H-R se encuentran las variables Mira con amplitudes de oscilación mayores a 2.5 mag. Los períodos son usualmente algo irregulares, aunque un período medio se puede derivar para la mayor parte de estas estrellas. También podemos encontrar otras clases de estrellas variables en esta zona como las variables semirregulares (SRa y SRb) y las irregulares (Lb y Lc).

En la MS, las estrellas variables más numerosas y mejor conocidas son la δ Scuti. Las pulsaciones en este caso son una combinación entre modos radiales y no-radiales; la mayoría de los modos no-radiales son modos p de bajo orden radial. Dado que las estrellas δ Scuti muestran una rotación rígida, se deben considerar los efectos de *splitting* rotacional en los cálculos de pulsaciones.

Cerca de las δ Scuti podemos encontrar las estrellas Ap rápidamente oscilantes (roAp). Estas estrellas pulsan en armónicos altos de modos p con amplitudes de 1-10 mmag. Poseen fuertes campos magnéticos y períodos de rotación de 2-12 días. También podemos ver a la derecha de las estrellas δ Scuti a las estrellas γ Doradus que se encuentran en la MS o cerca de ella. Las γ Doradus son pulsadores no-radiales en modos g de alto orden radial.

A mayores luminosidades encontramos las estrellas SPB o “*slowly pulsating B stars*” (tipo B). Estas estrellas de la MS muestran variaciones en su brillo menores a 0.1 mmag.

Las estrellas β Cephei pulsan en modos radiales y en modos p no-radiales. La mayoría se ubican en cúmulos galácticos abiertos jóvenes. Las observaciones muestran que se encuentran en la etapa de combustión de hidrógeno, en su mayor parte, en la etapa de contracción del núcleo o quemando hidrógeno en una cáscara que rodea al núcleo.

En la EHB (caliente) se encuentran las estrellas EC 14026 que pulsan en modos p y las PG 1716 que pulsan en modos g . Estas estrellas son subclases de las estrellas sub-enanas B variables. Las pulsaciones en estrellas sdB constituyen el tema central de esta Tesis por lo que dedicamos la Sección 1.6 para describir sus características.

Finalmente, las enanas blancas son las estrellas pulsantes no-radiales mejor establecidas. Existen tres clases de enanas blancas pulsantes, todas multiperiodicas en modos g . Las más frías son las enanas blancas con hidrógeno en superficie (DAV), también conocidas como variables ZZ Ceti. A temperaturas intermedias en la curva de enfriamiento ($\approx 25000\text{K}$) se encuentran las enanas blancas con helio en la superficie conocidas como DBV. La última clase es la más azul y está constituida por enanas blancas (DOV) y por estrellas centrales de nebulosas planetarias (PPNV). Las estrellas DOV se conocen como PG 1159, a partir del prototipo PG 1159-035 descubierta por McGraw et al. (1979), o como GW Virginis.

¹⁰Las estrellas de Población I son estrellas jóvenes de cúmulos abiertos, que se forman a partir del material procesado por generaciones anteriores. Estrellas de Población II son estrellas viejas de cúmulos globulares, formadas en los primeros tiempos del Universo a partir de material primordial que consiste principalmente de H y He.

1.6. Estrellas sub-enanas B

1.6.1. Características Generales de las Estrellas sub-enanas B

Las estrellas sdB son objetos del campo Galáctico de baja masa ($M \lesssim 0.5M_{\odot}$) evolucionados y compactos que son el equivalente evolutivo de las estrellas de cúmulos globulares que se encuentran en la EHB¹¹ (Fontaine et al. 1998). Estas estrellas son bastante abundantes en relevamientos tales como los de Palomar-Green, Montréal-Cambridge-Tololo y Edinburg-Cape (Morales-Rueda et al. 2005). Por ejemplo, las estrellas sdB dominan la población de objetos azules para $V \lesssim 16m$. Alrededor de 300 estrellas sdB son más brillantes que $V \lesssim 14.3m$ en el relevamiento completo de Palomar-Green.

Estudios cualitativos del espectro de este tipo de estrellas (Saffer et al. 1994) han revelado que sus parámetros atmosféricos se encuentran en los rangos $40\,000K \gtrsim T_{\text{eff}} \gtrsim 24\,000K$ y $6.2 \gtrsim \log g \gtrsim 5.1$. El promedio de estos valores en la muestra de Saffer et al. (1994) de 213 estrellas son $\langle T_{\text{eff}} \rangle \approx 30\,740K$ y $\langle \log g \rangle \approx 5.68$. Las estrellas sdB poseen un núcleo de helio en combustión y una atmósfera dominada por hidrógeno, con helio sub-abundante típicamente por más de un orden de magnitud. Elementos más pesados, en particular carbono, nitrógeno y silicio, muestran abundancias anómalas que pueden ser bastante grandes (Heber 1991). Se cree que los procesos de difusión (principalmente *settling* gravitacional y levitación radiativa) están actuando en estas estrellas, posiblemente en competencia con vientos estelares débiles (Michaud et al. 1995). El contenido de hidrógeno de las estrellas sdB puede llegar a ser tan pequeño que la estrella no puede alcanzar la AGB luego del agotamiento del helio en el núcleo. Además, durante la fase evolutiva de combustión de helio no pueden sostener una capa significativa de hidrógeno en combustión. Una escala temporal de evolución típica para una estrella en la fase de sdB es del orden de $\approx 10^8$ años.

Muchos detalles acerca del origen de las estrellas sdB son desconocidos. En la actualidad existen muchas teorías competitivas de su origen que involucran diversos canales evolutivos posibles. Estos incluyen la evolución de una estrella con una pérdida de masa extrema en la RGB (D’Cruz et al. 1996), diferentes interacciones binarias: evolución binaria con envoltura común (Menguel et al. 1976), RLOF (Han et al. 2002, Han et al. 2003), o fusión de dos enanas blancas de helio (Iben 1990).

Durante la fase posterior a la EHB, los modelos se contraen y la cáscara de hidrógeno finalmente se enciende. Dado que la energía debida a la combustión de hidrógeno es insuficiente para forzar una envoltura de gigante roja, la estrella vive en una fase de AGB-Manquè (Greggio & Renzini 1990) como vimos en la sección 1.2.3. Estos objetos post-EHB, con una cáscara de helio en combustión, están asociados con las sub-enanas O de campo (*subdwarf O* (sdO)) (Dorman et al. 1993). La mayoría de las estrellas sdO se acumulan alrededor de $T_{\text{eff}} \sim 80\,000K$ y $\log g \sim 5.5$ (Driezler 1993). Por último se unen a la curva de enfriamiento de las enanas blancas para convertirse en enanas blancas de baja masa.

La pieza faltante para entender la evolución de las estrellas sdB es la naturaleza y la física actuando detrás de la pérdida de masa (Fussi-Pecchi & Renzinni 1976). Para caer en la EHB estas estrellas deben perder prácticamente todo su hidrógeno en casi el mismo momento en que el núcleo de helio ha alcanzado la masa mínima requerida para que ocurra el flash de helio. La pérdida de masa ocurre durante la RGB y, más probablemente, durante el flash de helio.

Afortunadamente, algunas de estas estrellas pulsan, permitiéndonos utilizar las herramientas de la astrosismología para probar su interior (ver sección 1.6.2).

Las estrellas sdB poseen una estructura interna de naturaleza estratificada (Charpinet et al. 2000). En el interior estelar se forman dos zonas de transición química. La primera marca la división entre la envoltura de hidrógeno y helio y el núcleo rico en helio (interface H/He). La segunda es una zona de transición química interna que se construye lentamente durante la

¹¹En esta Tesis trataremos a las estrellas sdB y las estrellas que se encuentran en la EHB indistintamente.

evolución en la EHB. En el borde del núcleo convectivo de helio en combustión se construye una zona de transición de carbono/oxígeno a helio (interface C/O/He), a medida que la estrella convierte helio en carbono y oxígeno en forma estable mediante el proceso *triple α* . Este tipo de regiones de transición química afecta, a través de los fenómenos de atrapamiento y confinamiento (ver sección 1.6.2), las propiedades de los modos de oscilación de las sdB de manera similar a otras estrellas estratificadas como las enanas blancas (Brassard et al. 1992a, Brassard et al. 1992b).

Otra peculiaridad estructural de todos los modelos evolutivos de la EHB es la presencia de un núcleo convectivo de helio bastante masivo y extendido. Debido a la extrema sensibilidad de las reacciones triple α con la temperatura, se genera un área confinada particular donde la energía nuclear se libera. Este hecho crea las condiciones para que se desarrolle un núcleo convectivo, ya que la radiación por sí sola no es capaz de transportar todo el flujo de energía fuera de dicha región. También podemos encontrar una delgada capa convectiva cerca de la superficie estelar que está asociada con la zona de ionización parcial de HeII/HeIII.

1.6.2. Características Pulsacionales de las Estrellas sub-enanas B

En la última década se han descubierto dos tipos diferentes de pulsadores multimodales entre las estrellas sub-enanas B: variables de períodos cortos que exhiben principalmente modos de presión (modos p), y variables de largo período cuyas pulsaciones se deben a modos de gravedad (modos g). Estos descubrimientos abren la posibilidad de usar la astrosismología para investigar la estructura de las estrellas sdB; y, por extensión, de los núcleos de helio de la mayoría de las gigantes rojas (For et al. 2006). En este trabajo nos concentramos en el estudio de las primeras.

Las primeras estrellas sdB pulsantes de corto período fueron descubiertas por astrónomos del Observatorio Astronómico de Sudáfrica (Kilkenny et al. 1997; Koen et al. 1997; Stobie et al. 1997; O'Donoghue et al. 1997), y se denominan estrellas EC 14026¹² por el prototipo EC 14026-2647. Independientemente, y casi simultáneamente, Charpinet et al. (1996) y Charpinet et al. (1997) predijeron la existencia de inestabilidades de los modos de presión de estas estrellas causadas por el clásico mecanismo κ asociado con el pico de hierro de la opacidad en las envolturas de las sdB. La superabundancia local de hierro se produce por la competencia entre los procesos de *settling* gravitacional y levitación radiativa. Las estrellas EC 14026 típicas muestran períodos de pulsación de 100-200 segundos con amplitudes de algunas centésimas de magnitud o menos. El rango de períodos total va desde los 80 a los 600 segundos. Las estrellas EC 14026 se encuentran principalmente entre las estrellas sdB más calientes, centrándose alrededor de $T_{\text{eff}} \sim 33\,500\text{K}$ y $\log g \sim 5.8$, aunque existen algunos ejemplos más fríos y de menor gravedad con períodos más largos de hasta 10 minutos. Actualmente se ha reportado la existencia de 34 estrellas EC 14026 (Kilkenny 2002; Silvotti et al. 2002; Dreizler et al. 2002; Buonanno et al. 2003; Oreiro et al. 2004; Baran et al. 2005), aunque más de la mitad son relativamente débiles ($V < 14\text{m}$).

La segunda clase de estrellas sdB pulsantes fue descubierta por Green et al. (2003). Estas estrellas se denominan PG 1716 a partir del prototipo PG 1716+426, también se conocen como sdB variables de largo período. Son pulsadores multiperiodicos con períodos típicos entre 0.8 y 1.6 horas y amplitudes fotométricas extremadamente pequeñas, del orden de los milimag (Randall et al. 2005b, 2005c). En contraste con las estrellas EC 14026, las estrellas PG 1716 se encuentran entre las sdB más frías, con valores de T_{eff} y $\log g$ centrados alrededor de $\sim 27\,000\text{K}$ y ~ 5.4 respectivamente. Otra diferencia es que los pulsadores más lentos son mucho más comunes. Treinta de estas variables se reportaron desde el año 2001, aproximadamente el 80 % con temperaturas entre 24 000 y 29 500K, pero todas más brillantes que $V=14$. Fontaine et al. (2003) mostró que las pulsaciones en las estrellas PG 1716 pueden ser excitadas por el

¹²Actualmente se denominan formalmente estrellas V361 Hya

mismo mecanismo propuesto por Charpinet et al. (1996), si sus modos g son modos de alto orden radial y alto grado armónico ($\ell \gtrsim 3$).

En una serie de tres papers, Charpinet et al. (2000, 2002a, 2002b) realizaron una exploración detallada de las propiedades pulsacionales adiabáticas de estrellas sdB cubriendo un amplio espacio de parámetros. Para ello utilizaron modelos evolutivos “parciales”, es decir modelos evolutivos partiendo desde la ZAHB, y modelos estáticos de envoltura que no provienen de una secuencia evolutiva detallada. Sin embargo, los períodos de oscilación predichos se encuentran en buen acuerdo con los períodos observados en estrellas reales. Por este motivo sus resultados han sido adoptados como una referencia en el estudio de las estrellas sdB. A continuación resumiremos los resultados obtenidos por Charpinet et al. (2000, 2002a, 2002b) para su modelo de $M_c=0.4758M_\odot$, $M_{\text{env}}=0.0002M_\odot$, $\log g \simeq 5.75$ y $T_{\text{eff}} \simeq 31\,310\text{K}$ de modo tal de disponer de un modelo evolutivo/pulsacional adecuado para llevar a cabo una comparación lo más directa posible con nuestros resultados.

Los modos de presión se consideran modos de envoltura, dado que sus períodos se forman principalmente en las regiones más exteriores de la estrella, especialmente en la envoltura rica en hidrógeno. Por otro lado, existen contribuciones significativas provenientes de la región localizada debajo de la transición química He/H, principalmente la región radiativa rica en helio. Así mientras los modos p deben considerarse como modos de envoltura con mayores amplitudes de oscilación relativas en las regiones superficiales de la estrella, las capas más profundas pueden tener un efecto significativo en su comportamiento. Sin embargo, el núcleo central convectivo en si mismo no contribuye realmente a la formación de los períodos de los modos p .

En contraste con los modos de presión, los modos de gravedad son globalmente modos del interior profundo. Sus períodos se forman principalmente debajo de la envoltura de hidrógeno y helio, haciéndolos insensibles a la estructura de las regiones superficiales. También están fuertemente influenciados por la región de transición química C/O/He entre la región convectiva y el radiativa de helio, aunque los períodos de los modos g no son sensibles al detalle de la estructura de la región convectiva central, dado que no se propagan allí.

A partir de un análisis de la energía cinética en función del período y de las autofunciones se pudo ver que los modos g experimentan un fenómeno de resonancia causado por la estructura interna de estratificación en las estrellas sdB. Basados en la teoría asintótica de pulsaciones estelares se encuentra que la transición química He/H es responsable del efecto de atrapamiento y confinamiento de modos g , en forma análoga a lo que sucede con los modos de gravedad en estrellas enanas blancas. Los modos confinados poseen períodos que corresponden a máximos locales de la energía cinética, mientras que los períodos correspondientes a los modos atrapados son mínimos locales. Los modos g atrapados poseen características diferentes de los modos g “normales”. En lo que se refiere a las propiedades globales; los períodos de los modos g atrapados se forman principalmente alrededor de la zona de transición química de He/H, mientras que los modos g “normales” se forman en zonas mucho más profundas. Por lo tanto, los modos g atrapados son más superficiales comparados con los otros modos g , pero aún más profundos que los modos p .

El fenómeno de atrapamiento deja una huella más débil en el espectro de períodos de los modos p . En la zona de transición química H/He se produce una perturbación pequeña pero significativa en el espectro de frecuencias acústicas, denominado micro-atrapamiento.

A partir de modelos estáticos de envoltura Charpinet et al. (2002a) estudiaron los cambios de los períodos, o frecuencias, de los modos p y g frente a variaciones de los parámetros característicos de los modelos. Este tipo de tratamiento hace más flexible el estudio de las regiones relevantes del espacio de parámetros, dado que todos los parámetros están desacoplados unos de otros, aunque esto no ocurra para modelos evolutivos.

Un resultado importante es la aparición de los fenómenos de *mode bumping* y *avoided crossing* entre modos en algunas regiones del plano $\log T_{\text{eff}} - \log g$. Esos fenómenos ocurren cuando los períodos de los modos g alcanzan valores suficientemente cercanos a los períodos de

los modos p . Dado que en la teoría de pulsaciones estelares no está permitido que dos períodos adyacentes se crucen (Unno et al. 1989), los modos que se encuentran ante una inminente colisión (*mode bumping*) tienden a repelerse entre sí intercambiando sus propiedades intrínsecas, como por ejemplo las dependencias de los períodos con los parámetros estelares (*avoided crossing*), dando lugar a modos mixtos. La aparición de modos mixtos se observa en modelos estelares con altas concentraciones centrales de masa, como es el caso de las estrellas sdB. Estos fenómenos están presentes en muchos de los resultados obtenidos por Charpinet et al. 2002a y 2002b).

Los períodos de los modos de presión son muy sensibles a la variación de la gravedad superficial, estos se acortan rápidamente a medida que $\log g$ aumenta. Por otro lado, permanecen casi inalterados ante el cambio de la temperatura efectiva. Estas variaciones de T_{eff} y $\log g$ no afectan significativamente la estructura de micro-atrapamiento encontrada en el espectro de modos acústicos. Para gravedades superficiales menores y temperaturas efectivas mayores se crean condiciones favorables para los fenómenos de *mode bumping* y *avoided crossing* entre los modos p y g de bajo orden radial, los cuales se vuelven modos mixtos. Esto lleva a comportamientos más complicados de los períodos en esta región particular del plano $\log g - \log T_{\text{eff}}$, ya que los modos mixtos adoptan alternativamente características de modos g o p , dependiendo del valor de los parámetros. Las variaciones en la masa de la envoltura no tienen un impacto global en los períodos de los modos p , ya que no se observan variaciones sistemáticas considerables sobre ellos. Por otro lado, la distribución relativa de los períodos dentro del espectro se ve afectada en gran medida por el fenómeno de micro-atrapamiento. Este fenómeno de micro-atrapamiento que afecta a los modos p está cercanamente relacionado con la región de transición química He/H y, por lo tanto, es similar en naturaleza al atrapamiento de modos g . Los modelos con envolturas más masivas tienden a favorecer la aparición de fenómenos de *mode bumping* y *avoided crossing* dentro del espectro de pulsación. La masa total de la estrella tiene solo un pequeño impacto en los períodos de los modos acústicos, dentro de un rango de masa muy delgado que es relevante para las estrellas sdB ($\sim 0.5-0.46M_{\odot}$). Sin embargo, el efecto es sistemático. En el caso de objetos menos masivos se favorecen las colisiones entre modos.

Los períodos de los modos de gravedad resultan ser muy sensibles a los cambios en la gravedad superficial y la temperatura efectiva de la estrella. Estos decrecen fuertemente cuando T_{eff} aumenta, dependiendo del valor de $\log g$. En contraste con los modos p , el comportamiento de los períodos de los modos g no es uniforme. Para altas T_{eff} ($T_{\text{eff}} \gtrsim 25\,000\text{K}$) los modos g alcanzan sus períodos más largos a un valor intermedio de $\log g$ ($\log g \sim 5.7$), mientras que para T_{eff} más bajas ($T_{\text{eff}} \lesssim 25\,000\text{K}$), siguen un acortamiento monótono que aumenta con $\log g$. Estos comportamientos en los períodos llevan a una colisión con los modos acústicos (*avoided crossing*) que ocurre principalmente a altas T_{eff} y bajas g . Los cambios en la masa de la envoltura de hidrógeno y helio (M_{env}), induce variaciones significativas en los períodos de los modos de gravedad. Estos decrecen cuando M_{env} aumenta, lo que también favorece el efecto de *mode bumping* para modelos con envoltura delgada. Este parámetro juega un rol importante en gobernar la estructura del atrapamiento/confinamiento de modos y en una forma muy similar el fenómeno de atrapamiento de modos en la enanas blancas pulsantes. Finalmente, los períodos de los modos g son más sensibles a las variaciones de la masa total de la estrella que los modos p , ya que estos decrecen aproximadamente un 15% cuando la masa total decrece desde $0.5M_{\odot}$ a $0.46M_{\odot}$.

Por último, consideraremos las variaciones en los períodos de oscilación relacionadas con la evolución de las estrellas sdB. Como veremos a continuación, los períodos, así como las tasa de cambio de los mismos, muestran en general un comportamiento más bien complejo como funciones de la edad.

Los modos acústicos reaccionan en la forma más simple a los cambios en la estructura interna de los modelos inducida por el proceso evolutivo. Su comportamiento, esencialmente dictado por la evolución secular de la gravedad superficial, puede ser descrita en términos de dos fases distintas y bien definidas. La primera fase, empezando en la ZAHB y durando

aproximadamente 90 millones de años, está caracterizada por un crecimiento sistemático de los períodos de pulsación ($\dot{P} > 0$) para todos los modos p , excepto para algunos modos de bajo orden que a veces están sujetos a colisiones con los modos g . La segunda fase, desde los 90 millones de años de edad hasta el comienzo de la evolución post-EHB (aproximadamente 110 millones de años después de la ZAHB), corresponde a un rápido y acelerado decrecimiento en los períodos de pulsación ($\dot{P} < 0$) para todos los modos acústicos sin excepción. Físicamente, estas dos fases se identifican con la fase lenta de expansión en los modelos inmediatamente fuera de la ZAHB y la fase de contracción más corta que sigue cuando el combustible termonuclear comienza a desaparecer de las regiones centrales. Durante la primera fase de la evolución de los períodos, existe una leve pero sistemática tendencia a mostrar valores mayores de la tasa media de cambio en los períodos. Charpinet et al (2002b) sugieren que este efecto es producto de la cáscara residual de hidrógeno en combustión ubicada en la base de la envoltura rica en hidrógeno.

Los modos de gravedad muestran un comportamiento temporal más complicado que los modos acústicos. Durante la evolución se pueden identificar tres factores principales que regulan la evolución de los períodos de los modos g :

- cambios en la gravedad superficial;
- variaciones en la temperatura efectiva;
- el comienzo y el crecimiento de la discontinuidad química entre en núcleo enriquecido en carbono y oxígeno y la envoltura rica en He (C/O/He).

En líneas generales, se puede ver que las dos fases principales que definen la evolución de los períodos de los modos p también están presentes en la evolución de los períodos de los modos g ; más una tercera fase distinta a las dos anteriores. Efectivamente, desde la ZAHB hasta una edad de ~ 60 millones de años, las tasas de cambio de los períodos de los modos g son, en promedio, positivas. Aunque en muchos modos individuales, en particular en los modos confinados, muestran valores negativos de \dot{P} en esta fase. Desde los 60 millones de años hasta ~ 90 millones de años, los períodos de los modos g disminuyen principalmente como resultado de la inversión de la evolución de la T_{eff} en los modelos. Esta fase no se observa en la evolución de los períodos de los modos p ya que son insensibles a los cambios en la temperatura efectiva. Finalmente, después de los 90 millones de años de evolución hasta la ignición del helio en la cáscara, el decrecimiento en los períodos de los modos g se vuelve aún mayor en respuesta a la contracción acelerada de la estrella durante la cual $\log g$ y T_{eff} crecen rápidamente.

Códigos Numéricos

En este capítulo describiremos brevemente los códigos numéricos empleados en esta tesis para el cálculo de las secuencias evolutivas y las pulsaciones aplicados a estrellas sub-enanas B. Comenzaremos mencionando algunas generalidades del código de evolución y estructura estelar para el caso de una estrella con simetría esférica. Luego haremos una descripción del código de pulsaciones para el caso adiabático. Por último, describiremos el procedimiento utilizado para el cálculo evolutivo-pulsacional.

2.1. Generalidades del Código Evolutivo

2.1.1. Tratamiento Numérico de las Ecuaciones de Estructura

Los cálculos evolutivos presentados en esta tesis fueron realizados con el código evolutivo LPCODE. El código LPCODE fue desarrollado en su totalidad en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de La Plata. Originalmente desarrollado por el Dr. Omar Benvenuto, fue posteriormente adaptado para el estudio de las estrellas enanas blancas por el Dr. Leandro Althaus. Este código ha sido empleado para calcular modelos detallados de enanas blancas, utilizados posteriormente en el estudio astrosismológico de estas estrellas (Althaus et al. 2003).

El método utilizado para resolver las ecuaciones de estructura (B.8)-(B.11) está basado en un esquema tipo Henyey. Este tipo de esquema es el más difundido entre los códigos de evolución estelar. Para mayores detalles se recomienda consultar a Kippenhahn, Weigert & Hofmeister (1976). La implementación en el código de evolución utilizado se realiza a través de una linealización implícita del sistema de ecuaciones. El sistema algebraico resultante de dicha linealización se resuelve iterativamente utilizando el método de Newton-Raphson. Este esquema se puede considerar estándar entre los códigos de evolución estelar. Mencionaremos entonces algunas características particulares del tratamiento de las ecuaciones de estructura en el código.

Las ecuaciones de estructura en su forma (B.8)-(B.11) corresponden a la elección de una variable Lagrangiana como variable independiente. Dentro del código se elige como variable independiente a la masa fraccionaria $M_r = m/M_*$, donde m es la masa interna y M_* es la masa total de la estrella. Por consiguiente, resolviendo las ecuaciones de estructura estelar se obtienen $T = T(M_r)$, $P = P(M_r)$, $r = r(M_r)$ y $l = l(M_r)$ a un tiempo dado, donde T es la temperatura, P la presión, r la coordenada radial y l la luminosidad. Por último, dada la composición química, las ecuaciones de estructura forman un sistema de ecuaciones bien determinado.

La estabilidad de los cálculos numéricos se mejora notablemente realizando cambios de variables apropiados. En el código LPCODE se utiliza el siguiente cambio de variables:

$$\xi = \ln(1 - M_r/M_*) \quad (2.1)$$

$$\theta = \ln T/T_0 \quad (T_0 \equiv 10^6 \text{K}) \quad (2.2)$$

$$p = \ln P/P_0 \quad (P_0 \equiv 10^5 \text{din cm}^{-2}) \quad (2.3)$$

$$x = \ln r/r_0 \quad (r_0 \equiv 10^{10} \text{cm}) \quad (2.4)$$

$$\lambda = 1/\Lambda L_0 \quad (L_0 \equiv 10^{33} \text{erg s}^{-1}) \quad (2.5)$$

Así, ξ es la variable independiente utilizada por el LPCODE y θ , p , x y λ son las variables dependientes. Las constantes T_0 , P_0 , r_0 y L_0 son factores de escala. El factor Λ es también un factor de escala que se reajusta automáticamente durante el cálculo de modo tal de mantener el valor absoluto de λ por debajo de 10. Es importante notar que el cambio de variables adoptado para la luminosidad debe permitir que esta cantidad tome valores negativos. Este hecho es físicamente posible. Por ejemplo en los casos en que la estrella se enfría por emisión de neutrinos (ver ecuación (B.10)), o en regiones por debajo de una cáscara donde la combustión nuclear ocurre en forma violenta, dando lugar a un gradiente de temperatura negativo. En este último caso la temperatura no necesariamente aumenta hacia el centro de la estrella, haciendo posible la existencia de un flujo de energía hacia el interior de la misma.

En los códigos de evolución estelar la composición química de un modelo, dado el conjunto de ecuaciones (B.15), no se trata de manera autoconsistente con los cambios de estructura estelar. Una vez obtenidas las variables T , P , r y l a un tiempo t_{n+1} se calcula la composición química utilizando el conjunto de ecuaciones (B.15) a un tiempo t_{n+2} . Luego se calculan las variables de estructura al tiempo t_{n+2} suponiendo conocida la composición química, y así sucesivamente. La resolución simultánea de las ecuaciones de estructura y composición química implica un costo computacional muy alto. La resolución simultánea no parece necesaria si el paso temporal se mantiene lo suficientemente pequeño para que las variables no cambien considerablemente. Además, un paso temporal pequeño en los cálculos evolutivos es necesario para que la linealización de las ecuaciones sea una buena aproximación.

El tratamiento numérico de las ecuaciones (B.15) no es el mismo para las diferentes etapas evolutivas. En cada etapa distintos procesos físicos se vuelven más importantes a la hora de determinar la composición química.

2.1.2. Física Constitutiva

Para de resolver las ecuaciones de estructura (B.8)-(B.11) y de composición química (B.15) se deben conocer:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(T, P, X_i) & \nabla_{\text{ad}} &= \nabla_{\text{ad}}(T, P, X_i) \\ \delta &= \delta(T, P, X_i) & c_P &= c_P(T, P, X_i) \\ \epsilon_{\text{nuc}} &= \epsilon_{\text{nuc}}(T, P, X_i) & \epsilon_\nu &= \epsilon_\nu(T, P, X_i) \\ \kappa &= \kappa(T, P, X_i) & \langle \sigma v \rangle_{ij} &= \langle \sigma v \rangle_{ij}(T, \rho) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Las cantidades ρ , ∇_{ad} , δ y c_P (ver apéndice B) se deben calcular a través de una ecuación de estado para el material estelar. Para la materia no degenerada y cuando las correcciones Coulombianas son despreciables para determinar el estado de ionización parcial de la materia, se utiliza la ecuación de estado de un gas ideal. Para este caso el grado de ionización parcial de la materia se obtiene resolviendo la ecuación de Saha para un gas compuesto de hidrógeno y helio. En este caso las correcciones por la presencia de metales son despreciables ya que cuando se produce ionización parcial en situaciones reales, los elementos más pesados son minoritarios y su influencia en la ecuación de estado es despreciable. La ecuación de estado para materia

degenerada incluye casos de degeneración débil con $|\alpha| \ll 1$ y de degeneración fuerte, con $|\alpha| \gg 1$, donde $-\alpha$ es el potencial químico de los electrones en unidades de $k_B T$. La ecuación de estado para la materia degenerada se plantea en términos de integrales conocidas como las integrales de Fermi. Estas integrales no tienen solución analítica y el código utiliza desarrollos en serie apropiados para cada régimen de degeneración (Clayton 1968). Esta ecuación también incorpora contribuciones iónicas e interacciones Coulombianas. En todos los casos se incluyen en las cantidades termodinámicas los efectos debidos a la radiación. En el caso en que la ionización parcial aparece bajo condiciones en que las interacciones Coulombianas son relevantes, se utiliza la versión actualizada de la ecuación de estado de Magni y Mazzitelli (1979). La tasa de emisión de neutrinos incluye los procesos de pares de neutrinos, foto-neutrinos, plasma y Bremsstrahlung siguiendo los lineamientos de Itoh et al. (1996).

Las opacidades radiativas se obtienen de OPAL (Iglesias y Rogers, 1996) e incluyen tablas correspondientes a diferentes metalicidades. En el caso de bajas temperaturas las opacidades radiativas están complementadas con las opacidades moleculares de Alexander y Ferguson (1994). Las opacidades conductivas en los regímenes de baja y alta densidad se obtienen de Hubbard y Lampe (1969) e Itoh et al. (1983), respectivamente.

Las especies nucleares consideradas son H, D, ^3He , ^4He , ^7Li , ^7Be , ^{12}C , ^{13}C , ^{14}N , ^{15}N , ^{16}O , ^{17}O , ^{18}O , ^{19}F y ^{20}Ne , a menos que se indique lo contrario. La red de reacciones nucleares es la apropiada para seguir la evolución estelar durante las fases de combustión de hidrógeno y helio e incluye 30 reacciones nucleares. Para el primer caso se incluyen las reacciones nucleares de las tres cadenas del proceso protón-protón y el ciclo CNO. En el caso de la combustión de helio, se incluyen las reacciones fundamentales que determinan la tasa de liberación de energía durante estas etapas. Las tasas de reacciones nucleares fueron tomadas en su mayoría de la compilación de Caughlan y Fower (1988), excepto en el caso en que determinaciones más recientes difieran de manera apreciable. En particular es importante mencionar la reacción $^{12}\text{C}(\text{He}, \gamma)^{16}\text{O}$, tomada de Angulo et al. (1999).

2.2. Código de Pulsaciones

Con el fin de estudiar las propiedades pulsacionales en estrellas variables, se desarrolló en forma independiente un código de pulsaciones utilizado para calcular modos no-radiales en estrellas esféricamente simétricas. Algunos de los resultados publicados se encuentran en los artículos Córscico & Benvenuto (2002) y Córscico et al. (2001). Como primer paso, el código fue diseñado con la capacidad de resolver las ecuaciones que modelan las oscilaciones adiabáticas, dado que el problema adiabático es obviamente más sencillo que el caso general no-adiabático. Los cálculos adiabáticos proporcionan suficiente información acerca de la estructura mecánica de la estrella en cuestión, por lo que son empleados usualmente para la realización de estudios astrosismológicos. En todos los cálculos realizados en esta tesis se utiliza la aproximación de pulsaciones adiabáticas. Recientemente se ha incorporado un código de pulsaciones no-adiabáticas diseñado para estudiar la estabilidad vibracional de las estrellas variables.

Cabe también aclarar que para el desarrollo de esta Tesis se elaboró una versión del código para resolver las ecuaciones de pulsaciones adiabáticas radiales ($\ell=0$). Sin embargo, a continuación nos concentraremos en la descripción del código no-radial.

El código está basado en una modificación de la técnica de Newton-Raphson generalizada presentada en Kippenhahn, Weigert & Hofmeister (1967) para resolver un conjunto de ecuaciones en diferencias que representan las ecuaciones diferenciales de oscilaciones no-radiales, lineales y adiabáticas para estrellas esféricamente simétricas. Este sistema de ecuaciones está dado por las ecuaciones (A.53)-(A.56) del Apéndice A. Junto con las condiciones de contorno adecuadas en el centro y en la superficie de la estrella, el sistema de ecuaciones (A.53)-(A.56) constituye un problema lineal de autovalores de cuarto orden, el cual en general se debe resolver

numéricamente. Con el fin de escribir las ecuaciones de pulsación en forma adecuada para el cálculo numérico, se divide el modelo de equilibrio en un número finito de capas concéntricas de forma esférica. Este tratamiento es equivalente a discretizar el dominio de la variable independiente x en N puntos, es decir en $N-1$ capas x_j , no necesariamente equi-espaciadas, con $j = 1, \dots, N$. En este contexto se define $x_1=1$ como la superficie de la estrella y $x_N=0$ como el punto central del modelo. El siguiente paso es reemplazar el conjunto de ecuaciones (A.53)-(A.56) por ecuaciones en diferencias finitas. El sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, y_2, y_3, y_4, \lambda), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (2.7)$$

donde $\lambda = \omega^2$. En diferencias finitas, las ecuaciones (2.7) se pueden escribir como

$$\frac{[y_i]_{j+1} - [y_i]_j}{x_{j+1} - x_j} = f_i([y_1, y_2, y_3, y_4]_{j+\frac{1}{2}}; \lambda) \quad (2.8)$$

con $i = 1, 2, 3, 4$, y $j = 1, \dots, N - 1$; y se define, para una dada cantidad ψ

$$[\psi]_{j+\frac{1}{2}} = \frac{[\psi]_j + [\psi]_{j+1}}{2},$$

siendo $[\psi]_j$ el valor de la cantidad ψ en el punto j . Las condiciones de contorno externas están dadas por¹

$$\begin{aligned} [y_1]_1 - [y_2]_1 + [y_3]_1 &= 0, \\ (\ell + 1) [y_3]_1 + [y_4]_1 &= 0, \\ [y_1]_1 &= 1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Las condiciones de contorno centrales están dadas por (Unno et al. 1989):

$$\begin{aligned} [y_1]_N [C_1]_N \frac{\lambda}{\ell} - [y_2]_N &= 0, \\ \ell [y_3]_N - [y_4]_N &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones se utiliza el método de Kippenhahn, Weigert & Hofmeister (1967) para el caso de evolución estelar. Supondremos que se tiene una solución aproximada para el sistema y se desea mejorar dicha solución en forma iterativa. Si la solución inicial no difiere demasiado de la solución exacta, se puede realizar un desarrollo a primer orden en las correcciones de las autofunciones para cada punto de la grilla y también para el autovalor ω^2 . De esta manera se obtiene un sistema lineal de ecuaciones donde las incógnitas son las correcciones a primer orden.

El sistema algebraico de ecuaciones para las correcciones a primer orden se puede expresar como:

$$\frac{\partial B_k}{\partial [y_1]_1} \delta [y_1]_1 + \dots + \frac{\partial B_k}{\partial [y_4]_1} \delta [y_4]_1 + \frac{\partial B_k}{\partial \lambda} \delta \lambda = -B_k; \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_j} \delta [y_1]_j + \dots + \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_4]_j} \delta [y_4]_j + \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_{j+1}} \delta [y_1]_{j+1} + \dots + \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_4]_{j+1}} \delta [y_4]_{j+1} + \\ \frac{\partial G_i^j}{\partial \lambda} \delta \lambda = -G_i^j; \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

¹Las primeras dos ecuaciones se conocen como “condiciones de borde cero”, las cuales se emplearán en el tratamiento de pulsaciones en politropas. En el caso de modelos estelares realistas se reemplaza la primera ecuación por la siguiente expresión (Unno et al. 1989)

$$y_1 \left[1 + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - 4 - \omega^2 \right) \frac{1}{V} \right] - y_2 + y_3 \left[1 + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - \ell - 1 \right) \frac{1}{V} \right] = 0.$$

evaluada en $j = 1$.

$$\frac{\partial C_m}{\partial [y_1]_N} \delta [y_1]_N + \dots + \frac{\partial C_m}{\partial [y_4]_N} \delta [y_4]_N + \frac{\partial C_m}{\partial \lambda} \delta \lambda = -C_m; \quad m = 1, 2, \quad (2.13)$$

donde $\delta [y_i]_j$ son las correcciones a las autofunciones y_i en el punto j de la grilla, y $\delta \lambda$ es la corrección al autovalor λ . Las cantidades B_k , G_i^j , y C_m son los valores de las ecuaciones en diferencias evaluadas en la solución que se quiere mejorar en forma iterativa. Obviamente, todas ellas deben anularse cuando se evalúan en la solución exacta.

Luego se tiene que invertir una matriz que posee elementos no nulos sólo en los bloques localizados sobre la diagonal y en la última columna (correspondiente a las derivadas con respecto al autovalor). Por lo tanto se necesita un algoritmo específico para invertir la matriz y obtener las correcciones buscadas.

Evaluando las ecuaciones (2.11) para $k = 1, 2, 3$ y (2.12) para $i = 1, 2, 3, 4$ y $j = 1$, se puede escribir el primer bloque de la matriz de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial [y_1]_1} & \dots & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_2}{\partial [y_1]_1} & \dots & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_3}{\partial [y_1]_1} & \dots & \dots & \frac{\partial B_3}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_1]_1} & \dots & \dots & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_4]_1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_1]_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_2]_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_3]_2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_1]_1} & \dots & \dots & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_4]_1} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_1]_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_2]_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_3]_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_1]_1 \\ \delta [y_2]_1 \\ \delta [y_3]_1 \\ \delta [y_4]_1 \\ \delta [y_1]_2 \\ \delta [y_2]_2 \\ \delta [y_3]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial B_1}{\partial \lambda} & -B_1 \\ 0 & -\frac{\partial B_2}{\partial \lambda} & -B_2 \\ 0 & -\frac{\partial B_3}{\partial \lambda} & -B_3 \\ -\frac{\partial G_1^1}{\partial [y_4]_2} & -\frac{\partial G_1^1}{\partial \lambda} & -G_1^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4^1}{\partial [y_4]_2} & -\frac{\partial G_4^1}{\partial \lambda} & -G_4^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_4]_2 \\ \delta \lambda \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Se definen los vectores U_s, V_s, W_s , ($s = 1, \dots, 4N - 5$) de forma tal que satisfagan la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \delta [y_1]_1 \\ \delta [y_2]_1 \\ \delta [y_3]_1 \\ \delta [y_4]_1 \\ \delta [y_1]_2 \\ \delta [y_2]_2 \\ \delta [y_3]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_7 & V_7 & W_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_4]_2 \\ \delta \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

para este bloque. Los coeficientes de estos vectores se pueden calcular facilmente resolviendo el sistema dado a continuación:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial [y_1]_1} & \dots & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_2}{\partial [y_1]_1} & \dots & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_3}{\partial [y_1]_1} & \dots & \dots & \frac{\partial B_3}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_1]_1} & \dots & \dots & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_4]_1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_1]_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_2]_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_3]_2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_1]_1} & \dots & \dots & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_4]_1} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_1]_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_2]_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_3]_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_7 & V_7 & W_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial B_1}{\partial \lambda} & -B_1 \\ 0 & -\frac{\partial B_2}{\partial \lambda} & -B_2 \\ 0 & -\frac{\partial B_3}{\partial \lambda} & -B_3 \\ -\frac{\partial G_1^1}{\partial [y_4]_2} & -\frac{\partial G_1^1}{\partial \lambda} & -G_1^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4^1}{\partial [y_4]_2} & -\frac{\partial G_4^1}{\partial \lambda} & -G_4^1 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

A partir de la Ecuación (2.12), seguida de una breve manipulación algebraica, se puede escribir un bloque arbitrario de la matriz (excepto el central) en la forma:

$$\begin{bmatrix} \delta[y_4]_j \\ \delta[y_1]_{j+1} \\ \delta[y_2]_{j+1} \\ \delta[y_3]_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{4j} & V_{4j} & W_{4j} \\ U_{4j+1} & V_{4j+1} & W_{4j+1} \\ U_{4j+2} & V_{4j+2} & W_{4j+2} \\ U_{4j+3} & V_{4j+3} & W_{4j+3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta[y_4]_{j+1} \\ \delta\lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

donde $j = 2, \dots, N - 2$. Por consiguiente, los coeficientes de los vectores U_s, V_s, W_s pueden ser evaluados resolviendo el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^j & \frac{\partial G_1^j}{\partial[y_1]_{j+1}} & \frac{\partial G_1^j}{\partial[y_2]_{j+1}} & \frac{\partial G_1^j}{\partial[y_3]_{j+1}} \\ \alpha_2^j & \frac{\partial G_2^j}{\partial[y_1]_{j+1}} & \frac{\partial G_2^j}{\partial[y_2]_{j+1}} & \frac{\partial G_2^j}{\partial[y_3]_{j+1}} \\ \alpha_3^j & \frac{\partial G_3^j}{\partial[y_1]_{j+1}} & \frac{\partial G_3^j}{\partial[y_2]_{j+1}} & \frac{\partial G_3^j}{\partial[y_3]_{j+1}} \\ \alpha_4^j & \frac{\partial G_4^j}{\partial[y_1]_{j+1}} & \frac{\partial G_4^j}{\partial[y_2]_{j+1}} & \frac{\partial G_4^j}{\partial[y_3]_{j+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{4j} & V_{4j} & W_{4j} \\ U_{4j+1} & V_{4j+1} & W_{4j+1} \\ U_{4j+2} & V_{4j+2} & W_{4j+2} \\ U_{4j+3} & V_{4j+3} & W_{4j+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial G_1^j}{\partial[y_4]_{j+1}} & -\beta_1^j & -\gamma_1^j \\ -\frac{\partial G_2^j}{\partial[y_4]_{j+1}} & -\beta_2^j & -\gamma_2^j \\ -\frac{\partial G_3^j}{\partial[y_4]_{j+1}} & -\beta_3^j & -\gamma_3^j \\ -\frac{\partial G_4^j}{\partial[y_4]_{j+1}} & -\beta_4^j & -\gamma_4^j \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

donde las cantidades $\alpha_i^j, \beta_i^j, \gamma_i^j$ están definidas como

$$\begin{aligned} \alpha_i^j &= \frac{\partial G_i^j}{\partial[y_4]_j} + U_{4j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial[y_1]_j} + U_{4j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial[y_2]_j} + U_{4j-1} \frac{\partial G_i^j}{\partial[y_3]_j}, \\ \beta_i^j &= \frac{\partial G_i^j}{\partial\lambda} + V_{4j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial[y_1]_j} + V_{4j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial[y_2]_j} + V_{4j-1} \frac{\partial G_i^j}{\partial[y_3]_j}, \\ \gamma_i^j &= G_i^j + W_{4j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial[y_1]_j} + W_{4j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial[y_2]_j} + W_{4j-1} \frac{\partial G_i^j}{\partial[y_3]_j}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

con $i = 1, 2, 3, 4$.

Por último, en el punto central del modelo, se tiene $j = N - 1$ en la ecuación (2.12) y $m = 1, 2$ en (2.13). Es fácil mostrar que el último bloque de la matriz se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^{N-1} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial[y_1]_N} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial[y_2]_N} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial[y_3]_N} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial[y_4]_N} & \beta_1^{N-1} \\ \alpha_2^{N-1} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial[y_1]_N} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial[y_2]_N} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial[y_3]_N} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial[y_4]_N} & \beta_2^{N-1} \\ \alpha_3^{N-1} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial[y_1]_N} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial[y_2]_N} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial[y_3]_N} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial[y_4]_N} & \beta_3^{N-1} \\ \alpha_4^{N-1} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial[y_1]_N} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial[y_2]_N} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial[y_3]_N} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial[y_4]_N} & \beta_4^{N-1} \\ 0 & \frac{\partial C_1}{\partial[y_1]_N} & \frac{\partial C_1}{\partial[y_2]_N} & \frac{\partial C_1}{\partial[y_3]_N} & \frac{\partial C_1}{\partial[y_4]_N} & \frac{\partial C_1}{\partial\lambda} \\ 0 & \frac{\partial C_2}{\partial[y_1]_N} & \frac{\partial C_2}{\partial[y_2]_N} & \frac{\partial C_2}{\partial[y_3]_N} & \frac{\partial C_2}{\partial[y_4]_N} & \frac{\partial C_2}{\partial\lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta[y_4]_{N-1} \\ \delta[y_1]_N \\ \delta[y_2]_N \\ \delta[y_3]_N \\ \delta[y_4]_N \\ \delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1^{N-1} \\ -\gamma_2^{N-1} \\ -\gamma_3^{N-1} \\ -\gamma_4^{N-1} \\ -C_1 \\ -C_2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

En este caso las cantidades $\alpha_i^{N-1}, \beta_i^{N-1}, \gamma_i^{N-1}$ se evalúan a partir de las ecuaciones (2.19) en $j = N - 1$.

Notar que la ecuación (2.20) se puede resolver para obtener las correcciones del autovalor λ y de las autofunciones y_1, y_2, y_3 y y_4 en el punto central de la grilla. También se obtiene la corrección en la autofunción y_4 correspondiente al punto inmediatamente externo de la malla. Esta corrección, $\delta[y_4]_{N-1}$, sirve como “acoplamiento” entre los puntos N y $N - 1$. De hecho, se puede usar la ecuación (2.17) con $j = N - 2$ para obtener el resto de las correcciones a las autofunciones en el punto $N - 1$ de la grilla. A continuación, la aplicación de este procedimiento para sucesivos valores decrecientes de j (en la ecuación 2.17) usando $\delta[y_4]_{j+1}$ como acoplamiento entre las cantidades correspondientes a puntos consecutivos, así como también la ecuación (2.15), conduce a encontrar las correcciones para el autovalor y las autofunciones para el modelo completo. Estas correcciones son aplicadas a la solución inicial y el algoritmo

se emplea iterativamente hasta el estado en el cual todas las correcciones en valor absoluto son menores que algún valor previamente fijado.

Para encontrar una primera aproximación de las autofunciones y del autovalor de un modo dado, se aplica el método del discriminante presentado en Unno et al. (1989).

Para aplicar esta técnica se necesita definir una grilla con una distribución apropiada de puntos, con este fin, se empleó un procedimiento simple. Como una primera aproximación a la solución de las ecuaciones de pulsación, se calcularon las autofunciones y el autovalor, tomando la grilla de puntos que define al modelo en equilibrio. Luego de la convergencia, se redistribuyen los puntos de la grilla utilizando un criterio que consiste en pedir que la variación relativa de cada autofunción dentro de una dada región, sea menor que un límite de tolerancia previamente establecido. De ser necesario, el programa agrega o elimina puntos en la grilla, usando interpolación spline sobre las cantidades del modelo en equilibrio, e interpolación lineal en las autofunciones, ya que estas son posteriormente mejoradas en la etapa iterativa.

Los esquemas descriptos en esta sección han sido programados en lenguaje FORTRAN 77

Para cada modo, el código de pulsaciones calcula la frecuencia adimensional ω_k , donde k es el orden radial del modo correspondiente, y las autofunciones y_1 , y_2 , y_3 e y_4 , que son las autofunciones adimensionales de Dziembowski (1971) que se indican en el apéndice A. A partir de estas cantidades básicas, el código de pulsación calcula los períodos de pulsación ($P_{i,k}$), la energía cinética de oscilación (E_{cin}), los coeficientes de *splitting* rotacional (C_k) y las funciones de peso, entre otras cosas.

El cálculo de los períodos correspondientes a los modos p y g se realizó por separado. En el caso de los modos presión fue necesario utilizar un paso ($\Delta\omega$) pequeño para poder resolver dos frecuencias consecutivas y no saltar ningún modo. En cambio en el caso de los modos gravedad utilizamos un paso dos órdenes de magnitud mayor que en el caso de modos p , sin perder definición en el cálculo de las frecuencias de los modos excitados. De esta manera se redujo considerablemente el tiempo de cómputo.

Modelos Evolutivos de Estrellas sub-enanas B

3.1. Secuencias Evolutivas

Utilizando el código evolutivo LPCODE, se calculó una secuencia evolutiva desde la Secuencia Principal de Edad Cero (*Zero Age Main Sequence*) para una estrella de $1M_{\odot}$ con metalicidad solar ($Z = 0.02$), pasando por la RGB hasta que comienza a apartarse de la misma, aproximadamente a 1.34×10^{10} años. Las edades se miden desde el comienzo de la MS. A partir de este punto común se generaron cuatro secuencias evolutivas modificando la tasa de pérdida de masa. De esta manera se forzó la producción del flash de helio para que ocurra en distintos lugares de la AGB generando así distintos tracks evolutivos. La pérdida de masa se aplicó luego del final de la combustión de hidrógeno, cuando la estrella asciende por la RGB. Las secuencias calculadas poseen masas de $0.48151 M_{\odot}$, $0.47359 M_{\odot}$, $0.47329 M_{\odot}$ y $0.47300 M_{\odot}$ en la HB. En la figura 3.1 se muestran los diagramas de Hertzsprung-Russell de las cuatro secuencias evolutivas completas. Para cada secuencia se indica con un asterisco sobre el track el momento en que ocurre el flash del núcleo de helio y la edad a la cual ocurre el mismo.

Para complementar la figura anterior, en la figura 3.2 se muestran las cuatro secuencias evolutivas calculadas en el plano $\log g - T_{\text{eff}}/1000$ K desde los flashes de helio secundarios hasta que ascienden por la AGB. Con línea de trazos se indica la evolución previa a la Rama Horizontal Extrema de Edad Zero (*Zero Age Extreme Horizontal Branch (ZAEHB)*), es decir, la etapa de flashes secundarios que le siguen el flash de helio principal. Con línea llena se indica la evolución durante la EHB y la etapa posterior. En estas figuras también se indican el principio y el final de la Rama Horizontal Extrema, la ZAEHB y la Rama Horizontal Extrema de Edad Terminal (*Terminal Age Extreme Horizontal Branch (TAEHB)*) respectivamente. A modo comparativo, se incluyen algunas estrellas sdB pulsantes que se han reportado hasta el momento. Entre ellas se encuentran las estrellas tipo EC 14026, que pulsan en modos p y las estrellas PG 1716, que pulsan en modos g , que fueron descritas en la sección 1.6.2. Las estrellas híbridas muestran períodos de pulsación correspondientes tanto a modos p como a modos g . Y, por último, las estrellas He-rich sdBV son estrellas sdB variables que poseen un enriquecimiento de la abundancia de helio en la envoltura.

A partir de la figura 3.2, podemos observar que las secuencias más masivas son también las más frías, dado que se asientan en la ZAEHB a temperaturas más bajas luego de la etapa de flashes. Esto está relacionado con el momento en que ocurre el flash de helio. De la figura 3.1 podemos ver que estrellas que pasan más tiempo en la AGB antes de sufrir el flash de helio son también las de mayor masa, y se asientan en la ZAEHB a temperaturas mayores. Recordemos que la evolución en la MS y en la RGB es común a todas las secuencias y por lo tanto también lo es la metalicidad inicial. Entonces, el único parámetro de control está dado por el momento en que ocurre el flash de helio, lo cual está directamente relacionado con la pérdida de masa aplicada a cada secuencia.

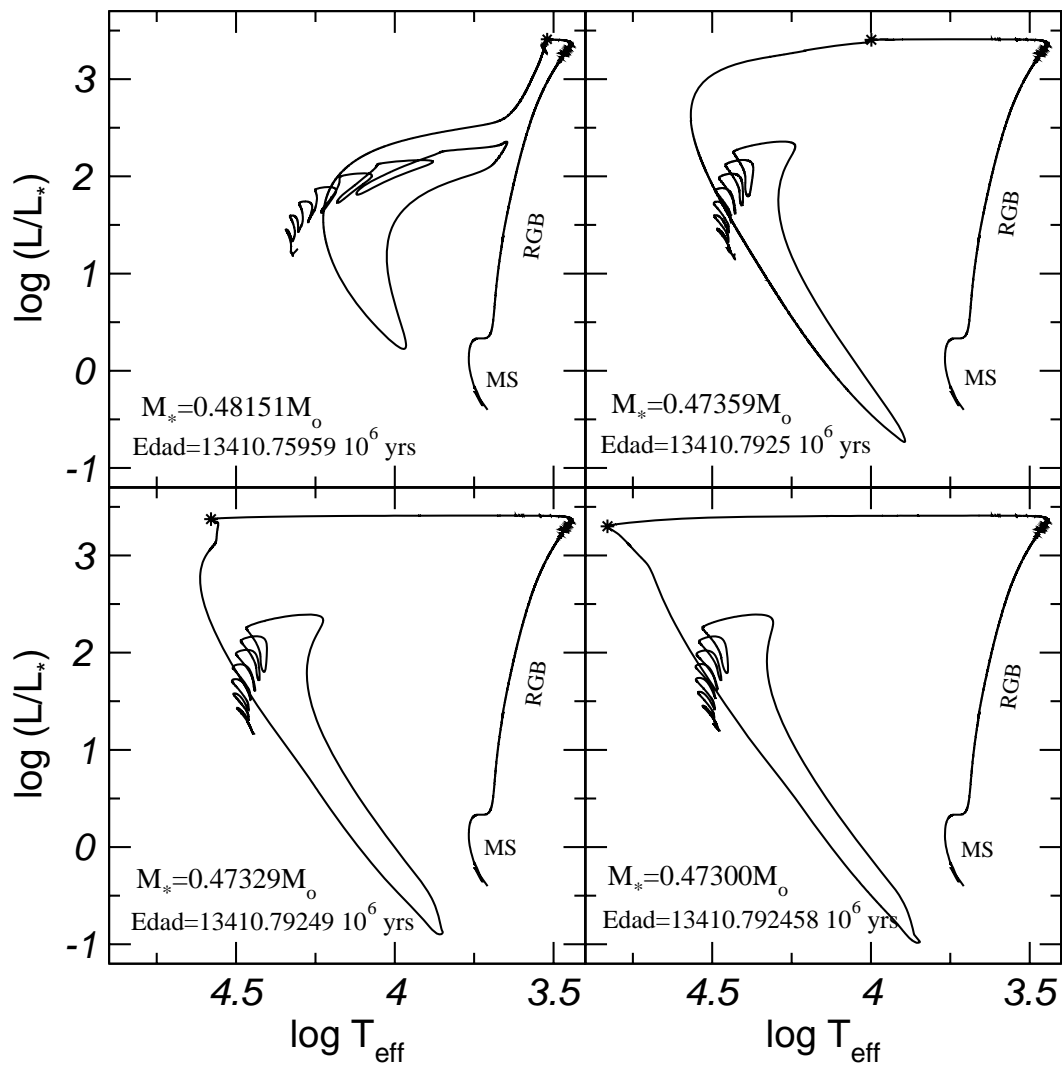


Figura 3.1: Diagrama H-R para las cuatro secuencias calculadas. Los tracks cubren las etapas evolutivas desde la MS de edad cero hasta la etapa de combustión estable de helio sobre la HB. Para cada secuencia se indica con un asterisco la posición del flash de helio. También se indica la edad a la que ocurre el flash junto con la masa de la estrella en la HB.

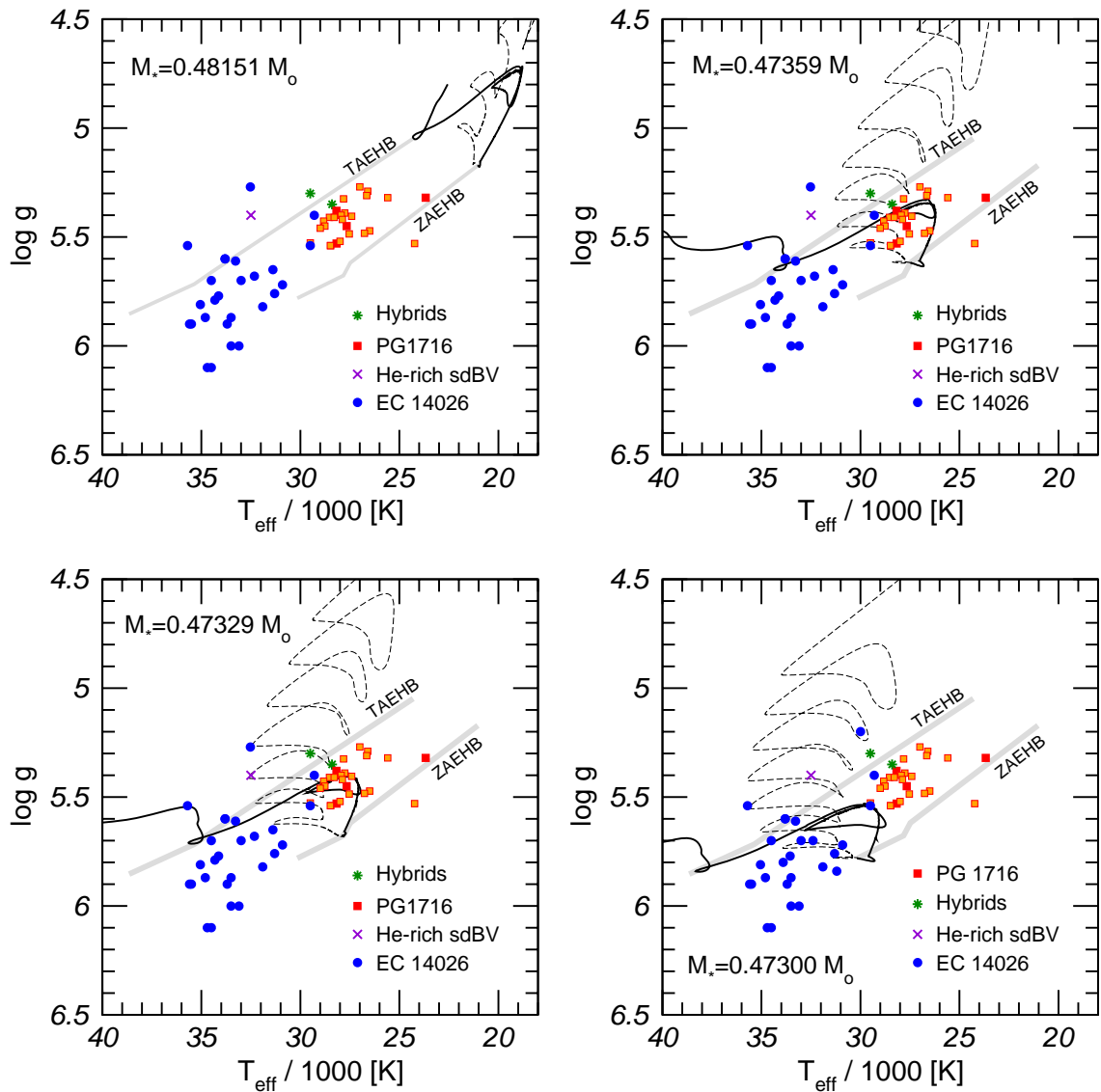


Figura 3.2: Diagramas de las cuatro secuencias evolutivas en el plano $\log g - T_{\text{eff}}/1000 \text{ K}$. En esta figura se indica la evolución previa a la HB (línea de trazos) y la evolución en la HB y posterior (línea llena). También se muestran el comienzo (ZAEHB) y el final (TAEHB) de la EHB. A modo de comparación se incluyen estrellas sdB pulsantes de distintos tipos que han sido reportadas hasta el momento (ver Tablas 6.1 a 6.4 del Capítulo 6).

De la figura 3.2 también podemos observar que todas las secuencias, exceptuando la secuencia con masa $0.48151 M_{\odot}$, cruzan la región donde se localizan las estrellas PG 1716 observadas. Sin embargo, se puede ver que los tracks no cruzan la región donde se concentra la población de las estrellas EC 14026 durante la evolución en la EHB en ninguna de las cuatro secuencias.

Debemos aclarar que, hasta el momento, no se han realizado cálculos evolutivos completos (partiendo de la ZAMS y llegando a la EHB) que produzcan tracks evolutivos cubriendo el dominio de las estrellas EC 14026 en el plano $\log g - \log T_{\text{eff}}$. De hecho, los cálculos realizados por Charpinet et al. (2002a) y (2002b), y Jeffery & Saio (2006) están basados en modelos estelares estáticos que no forman parte de secuencias evolutivas, o bien en estructuras provenientes de cálculos evolutivos que comienzan en la ZAEHB (Dorman et al. 1993), sin tener en cuenta la evolución anterior. Así, uno de los problemas fundamentales actualmente, que tampoco hemos sido capaces de resolver en esta Tesis, es producir tracks evolutivos **completos** de estrellas sdB, con composiciones químicas adecuadas, cubriendo el dominio observado de las estrellas variables EC 14026.

Una manera de “correr” los tracks evolutivos hacia el azul es considerar cálculos tales como los realizados por Cassisi et al. (2007), en los cuales el flash de helio se produce cuando la estrella ya está sobre la curva de enfriamiento de las enanas blancas. Los autores encuentran que, en esta situación, el flash de helio produce una envoltura con helio y carbono del interior, quemando el hidrógeno por completo. El objeto resultante se localiza en la ZAEHB con $T_{\text{eff}} \sim 33\,600\text{K}$, una temperatura típica de las estrellas EC 14026. Sin embargo, la composición química superficial de dicho modelo es fuertemente deficiente en hidrógeno y enriquecida en helio y carbono, hecho que está en desacuerdo con la composición química característica observada en estrellas EC 14026. Finalmente, hemos realizado algunos cálculos evolutivos preliminares que indican que, una disminución de la metalicidad desde $Z = 0.02$ a $Z = 0.01$ en los modelos, es capaz de desplazar los tracks en $\Delta T_{\text{eff}} \simeq 1000\text{K}$ hacia el azul. Este corrimiento, aunque notable, no es suficiente para poder cubrir el dominio de las estrellas EC 14026.

Notemos que el track evolutivo correspondiente a la secuencia con masa $0.47300 M_{\odot}$ atraviesa la región donde se encuentran las estrellas EC 14026 observadas en una etapa anterior a la EHB (línea de trazos). Esto también ocurre con los track correspondientes a las secuencias con masas $0.47359 M_{\odot}$ y $0.47329 M_{\odot}$, que atraviesan la región donde se encuentran las estrellas PG 1716 observadas. Debido a que la etapa anterior a la EHB, es decir la etapa de sub-flashes, tiene una escala temporal muy corta comparada con la HB, resulta muy poco probable encontrar estrellas sdB variables en esta etapa de la evolución estelar. Por este motivo, se identifican a las estrellas sdB como estrellas que se encuentran en la HB y no en una fase evolutiva anterior.

3.2. Composición Química y Frecuencias Características

La estructura interna de las estrellas sdB es, a grandes rasgos, una estructura estratificada similar a la de las estrellas enanas blancas (Brassard et al 1992a y 1992b), como mencionamos en la sección 1.6.1. El impacto de esta estructura sobre sus propiedades pulsacionales puede estudiarse a través de los perfiles de las frecuencias características: la frecuencia de Brunt-Väisälä y la frecuencia de Lamb (ver ecuaciones A.44 y A.45). En particular la frecuencia de Brunt-Väisälä es muy sensible a la composición química interna de la estrella. Por conveniencia, escribimos la frecuencia de Brunt-Väisälä como:

$$N^2 = \frac{g^2 \rho \chi_T}{P \chi_\rho} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla - B) \quad (3.1)$$

donde ∇ es el gradiente de temperatura, ∇_{ad} es el gradiente adiabático y g , ρ y P tienen su significado usual.

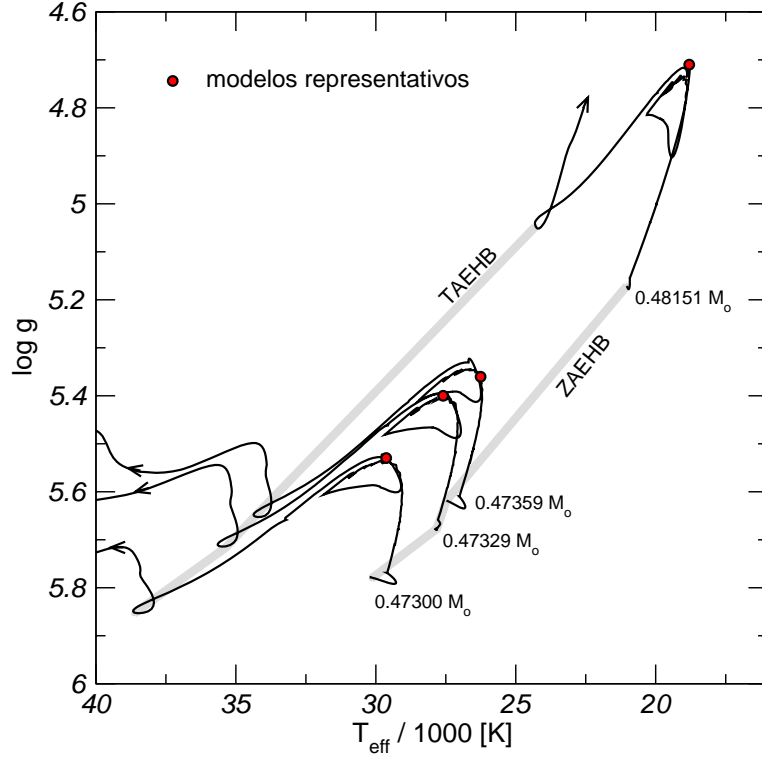


Figura 3.3: Ubicación de los modelos representativos elegidos en el plano $\log g - T_{\text{eff}}/1000\text{K}$. La posición de los modelos se indica mediante círculos ubicados sobre los tracks correspondientes a cada secuencia evolutiva. También se indica la ZAEHB y la TAEHB.

El factor B se denomina término de Ledoux y contiene las contribuciones específicas debidas a los gradientes de composición química que afectan la frecuencia de Brunt-Väisälä, es decir, las transiciones químicas. Su expresión es:

$$B \equiv -\frac{1}{\chi_T} \sum_{i=0}^{N_c} \chi_{X_i} \frac{d \ln X_i}{d \ln P} \quad (3.2)$$

con

$$\chi_T = \left[\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right]_{\rho}; \chi_{\rho} = \left[\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right]_T; \chi_{X_i} = \left[\frac{\partial \ln P}{\partial \ln X_i} \right]_{\rho, T, X_{j \neq i}} \quad (3.3)$$

donde N_c corresponde al número de elementos químicos presentes en el gas y la suma se realiza sobre $N_c - 1$ especies independientes más la condición adicional $\sum_{i=1}^{N_c} X_i = 1$.

A continuación se eligió un modelo de cada una de las cuatro secuencias evolutivas y se calculó, utilizando el código de pulsaciones descrito en la sección 2.2, el espectro de períodos correspondiente. Los cálculos se restringieron a modos con grado armónico $\ell \leq 3$. En la figura 3.3 se indica la posición de los modelos elegidos en la HB sobre los tracks evolutivos correspondientes a cada secuencia. Por completitud, en la tabla 3.1, se muestran los parámetros de superficie, la masa de la envoltura y la edad de los modelos elegidos. En adelante cada modelo será identificado con la masa de la estrella en la HB.

Además del espectro de períodos, la salida del código de pulsaciones proporciona los perfiles correspondientes a las frecuencias características de Brunt-Väisälä y Lamb a lo largo de la estrella. Estos perfiles se pueden utilizar para estudiar los efectos de la estructura interna de la estrella sobre los modos de pulsación.

En la figura 3.4 se muestran las frecuencias de Brunt-Väisälä y Lamb para $\ell = 1, 2$ y 3 para los cuatro modelos elegidos, uno por cada secuencia evolutiva, así como también el término

Tabla 3.1: Parámetros de superficie, masa de la envoltura y edad de los modelos elegidos. Estos modelos están identificados con la masa en la HB de la secuencia evolutiva a la cual pertenecen.

Masa (M_*)	Edad (10^6 años)	$M_{\text{env}}(M_*)$	T_{eff} (K)	$\log g$
0.48151	13454.8	1.9×10^{-2}	18 770	4.72
0.47359	13525.1	2.51×10^{-3}	26 448	5.36
0.47329	13557.1	2×10^{-3}	27 148	5.44
0.47300	13559.2	1.95×10^{-3}	29 733	5.53

de Ledoux, en función del logaritmo de la coordenada de masa fraccional $\log(1 - M_r/M_*)$. La posición de los picos en las frecuencias características y en el término de Ledoux está directamente relacionada con los cambios en la composición química de la estrella a medida que nos movemos hacia el centro de la misma.

La figura 3.5 muestra la composición química en función de $-\log(1 - M_r/M_*)$, indicando las abundancias de hidrógeno, helio, carbono y oxígeno para los cuatro modelos de la figura 3.4. Definimos la abundancia por masa, o abundancia fraccional, de la especie i dentro de un gas como $X_i = \rho_i/\rho$, donde ρ_i es la densidad de la especie i y ρ la densidad del gas. Por ejemplo, si $X_i = 0.7$ significa que el 70% de la masa es de la especie i . La suma de las abundancias de todas las especies satisface que $\sum_i X_i = 1$.

El término de Ledoux B tiene valor nulo en toda la estrella excepto en las regiones de las transiciones químicas He/H y C/O/He, que son muy localizadas y caracterizadas por gradientes abruptos en las abundancias químicas. Estos gradientes conducen, de acuerdo con la ecuación (3.1), a picos muy pronunciados de N en las transiciones químicas. Esta estructura se puede observar en los modelos de la figura 3.4. Por ejemplo, en el modelo de masa $0.47329M_\odot$ los picos se localizan en $\log(1 - M_r/M_*) \sim -3$ y -0.5 . El término de Ledoux para los cuatro modelos tiene un pico muy angosto correspondiente a la transición química He/H en $\log(1 - M_r/M_*) \sim -1.7$ para el modelo con masa $0.48151M_\odot$ y en $\log(1 - M_r/M_*) \sim -2.7$ para los modelos restantes. Este pico tiene mayor amplitud para la secuencia con masa $0.48151M_\odot$. El pico correspondiente a la transición C/O/He es muy pequeño en los cuatro modelos. Esto se debe a que la transición química C/O/He es menos abrupta y por lo tanto B , que depende de las derivadas de los gradientes químicos, tiene una amplitud pequeña. Sin embargo, es evidente su presencia en el perfil de N^2 .

Puede observarse a partir de la figura 3.5 que la transición del núcleo rico en helio a la región más interna rica en helio, carbono y oxígeno (C/O/He) es escalonada, con un crecimiento gradual de las concentraciones de carbono y oxígeno y un decrecimiento en la abundancia de helio. Esta región “escalonada”, centrada en $\log(1 - M_r/M_*) \sim -0.05$, es una zona semiconvectiva que rodea al núcleo convectivo. Por el contrario, la transición de la zona rica en helio a la envoltura rica en hidrógeno (He/H) es más abrupta, la cual se observa en la figura 3.5 como un crecimiento abrupto de la abundancia de helio y un decrecimiento igualmente abrupto de la abundancia de hidrógeno. Este fenómeno da lugar a un pico en B de mayor amplitud asociado a la transición He/H en comparación con el pico correspondiente a la transición C/O/He.

Notemos que, en el modelo utilizado por Charpinet et al. (2000), las dos transiciones químicas están bien definidas y los dos picos de B tienen amplitudes comparables. Sin embargo las amplitudes son un orden de magnitud menores comparadas con la amplitud del pico de B en He/H para nuestro modelo de referencia.

En la frecuencia de Brunt-Väisälä también se pueden distinguir zonas convectivas, que satisfacen el criterio de Schwarzschild $\nabla_{\text{ad}} - \nabla \leq 0$, que aparecen como divergencias negativas en $\log N^2$. En la figura 3.4 se observan dos pozos en el perfil de $\log N^2$ y están, por lo tanto, relacionados con el núcleo convectivo (cerca del centro) y con una región convectiva angosta

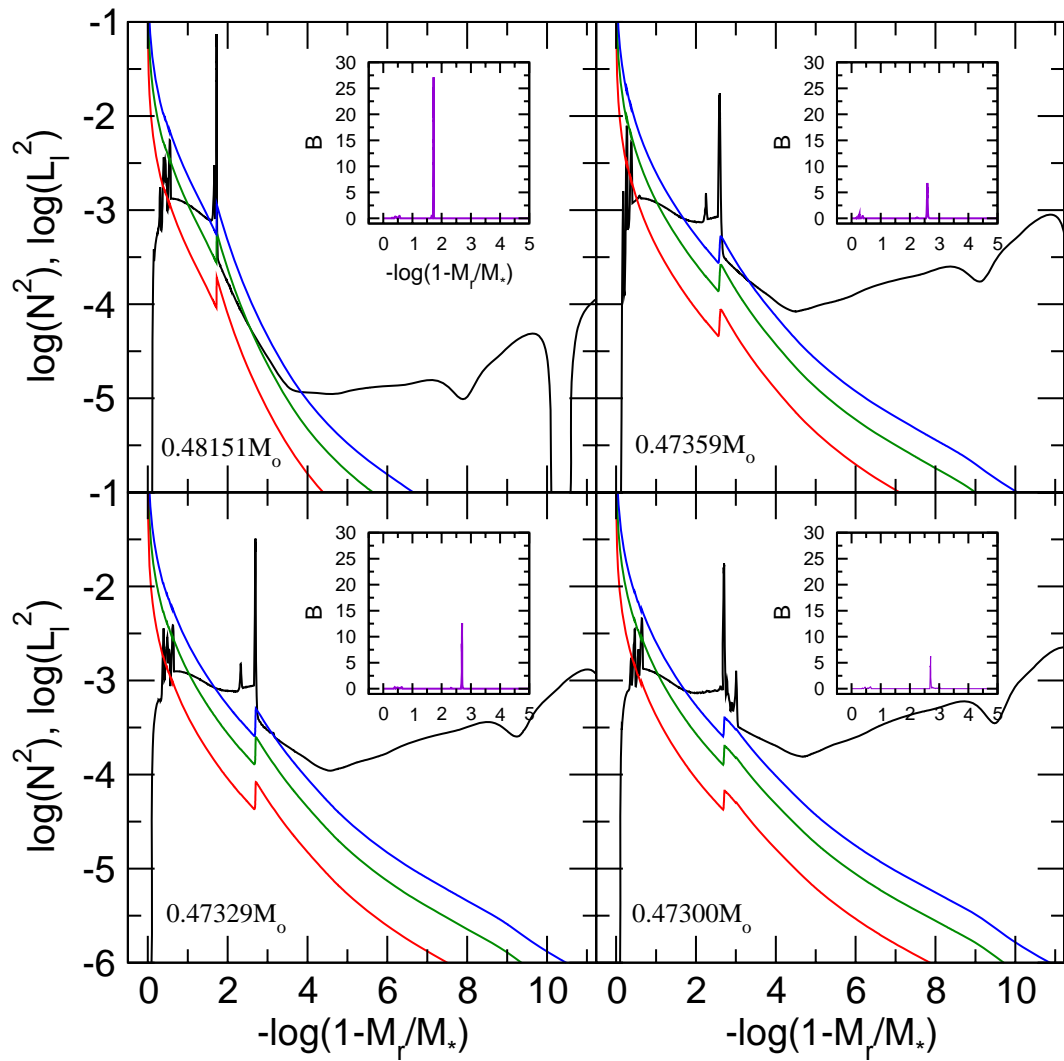


Figura 3.4: Cuadrados de las frecuencias de Brunt-Väisälä (negro) y Lamb para $\ell=1$ (rojo), 2 (verde) y 3 (azul) en función de la coordenada $-\log(1 - M_r/M_*)$ para los cuatro modelos utilizados. También se muestra el gráfico del término B de Ledoux para cada modelo en función de $-\log(1 - M_r/M_*)$.

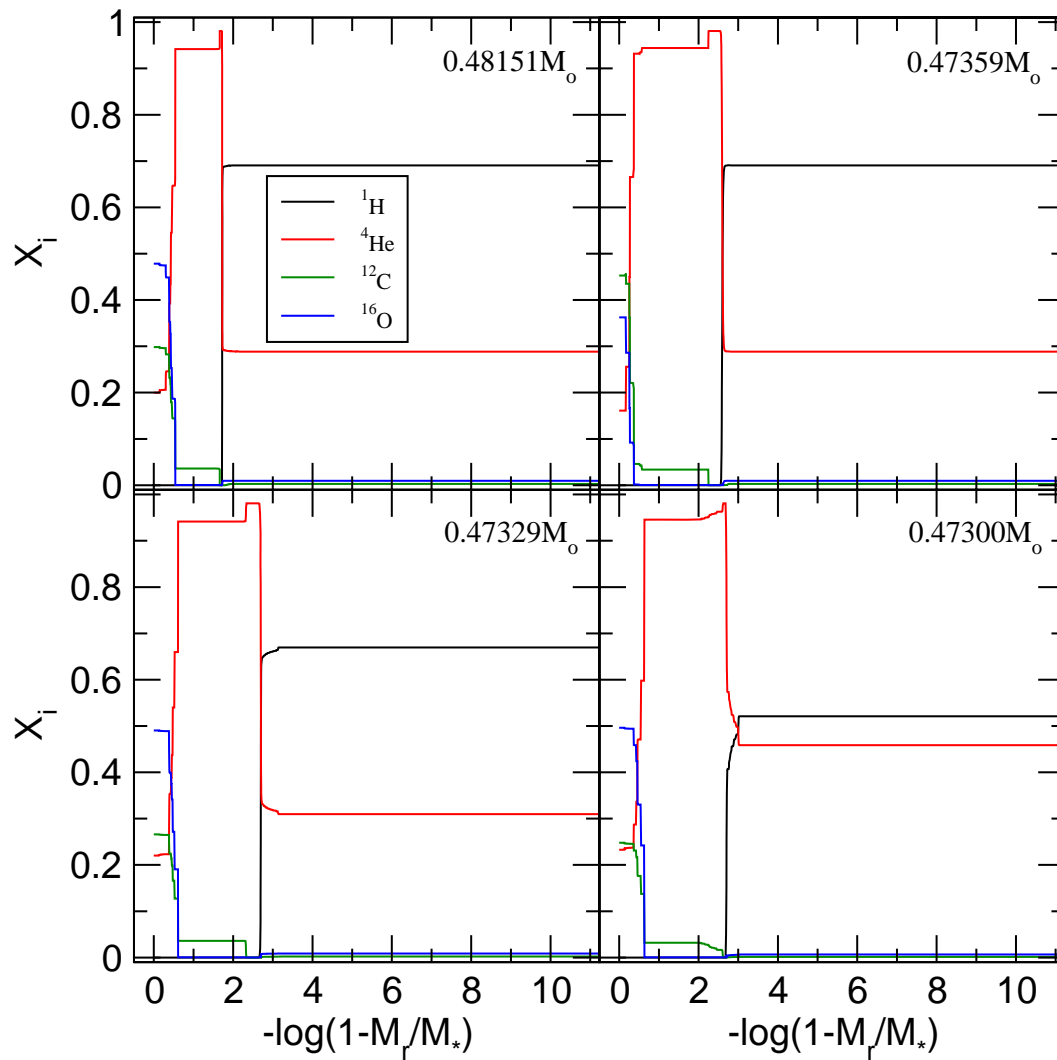


Figura 3.5: Abundancia fraccional de elementos químicos en función de $-\log(1 - M_r/M_*)$ para los modelos de la figura 3.4. Los elementos considerados son: hidrógeno, helio, carbono y oxígeno.

debida a la ionización parcial de HeII/HeIII (cerca de la superficie). Esta última zona convectiva solo está presente en el modelo correspondiente a la secuencia con masa $0.48151M_{\odot}$, mientras que en los restantes solo se observa una pequeña depresión en los alrededores de $\log(1 - M_r/M_*) = -9.5$.

La frecuencia de Lamb no refleja en forma tan clara los aspectos importantes de la estructura de las estrellas sdB. Sin embargo, podemos reconocer en la figura 3.4 la transición química principal He/H que aparece como un escalón en los perfiles de $\log L_{\ell}^2$ en $\log(1 - M_r/M_*) \sim -1.7$ para el modelo más masivo y en $\log(1 - M_r/M_*) \sim -2.7$ para los demás modelos. Este comportamiento es producido por un rápido cambio en la velocidad adiabática del sonido debida a la variación abrupta en la densidad a través de las zonas de transición química. El comportamiento de L_{ℓ}^2 refleja directamente el comportamiento de la ecuación (A.45) al mostrar una divergencia en el centro de la estrella ($r \rightarrow 0$), mientras que L_{ℓ}^2 tiende a 0 en la superficie. Aún más, notamos que los perfiles de L_{ℓ}^2 están desplazados hacia arriba con ℓ creciente, de acuerdo con la dependencia de la frecuencia de Lamb con el grado armónico ℓ .

Por último, observemos el perfil de las abundancias químicas que se muestra en la figura 3.5 para el modelo con masa $0.47300M_{\odot}$. A diferencia de los tres modelos restantes, las abundancias de helio e hidrógeno en la región correspondiente a la envoltura ($-\log(1 - M_r/M_*) \gtrsim 3$) son similares, alrededor de 0.5. Este modelo podría considerarse entonces como un ejemplo de las sdB híbridas, las cuales poseen atmósferas enriquecidas en helio. En los modelos restantes las abundancias de helio e hidrógeno son ~ 0.3 y 0.7 respectivamente.

Pulsaciones en Estrellas sub-enanas B

4.1. Mecanismos de Excitación

4.1.1. Generalidades

Consideremos un gas ideal en equilibrio. Según el principio de Le Chatêlier, si un sistema está en equilibrio estable, entonces cualquier cambio espontáneo en los parámetros debe inducir un proceso que tienda a restaurar el estado de equilibrio. Para ilustrar este principio, consideremos un elemento de volumen constante dentro del gas. Si la temperatura del elemento considerado aumenta, se genera un flujo de calor hacia el material circundante para alcanzar nuevamente en equilibrio térmico con el medio. De la misma manera, si su temperatura disminuye, el calor fluye hacia el elemento desde el exterior. Esto implica que el sistema es térmicamente estable. La estabilidad térmica se garantiza pidiendo que el calor específico a volumen constante (c_V) sea positivo.

En su forma simplificada, una estrella se puede considerar como un volumen de gas inmerso en un campo de radiación. Dentro de la estrella, la energía fluye mediante gradientes de temperatura, desde las regiones más calientes hacia las regiones más frías, manteniendo al sistema en equilibrio. Sin embargo, cantidades como las derivadas de la opacidad y la temperatura afectan el equilibrio local dentro de la estrella. En general, si un elemento de volumen dentro del gas se comprime, se produce un aumento en la temperatura y un decrecimiento en la opacidad del mismo. El aumento en la temperatura induce un flujo saliente de radiación hacia el exterior del elemento en cuestión, mientras que el decrecimiento en la opacidad disminuye la eficiencia con que se absorbe la radiación. Para una estrella la estabilidad está garantizada pidiendo que una dada región pierda calor durante una compresión y gane calor durante una expansión. Cuando esto no suceda, y el elemento de masa realice trabajo sobre el material que lo rodea durante compresión y expansión, cualquier perturbación microscópica, en lugar de ser amortiguada, puede crecer lo suficiente como para ser observable en una estrella pulsante.

Dentro de una estrella pulsante se pueden identificar dos clases de regiones desde el punto de vista de las pulsaciones: regiones de excitación y de amortiguamiento. Las regiones de excitación, o *driving*, son aquellas regiones que durante una fase de máxima compresión tienen una ganancia neta de calor. Por el contrario, las regiones de amortiguamiento, o *damping*, son las regiones de la estrella que tienen una pérdida neta de calor durante una etapa de compresión máxima. Entonces, la estabilidad o inestabilidad de un dado modo depende de la competencia entre los efectos de excitación y amortiguamiento.

Para problemas de estabilidad, se utilizan frecuentemente dos cantidades: la integral de trabajo (\bar{W}) y su derivada ($d\bar{W}/dr$) (ver Unno et al. 1989). Estas cantidades se utilizan para conocer la contribución de las diferentes regiones de la estrella a la excitación y al amortiguamiento de las oscilaciones.

La cantidad \bar{W} se define como el cambio de la energía total en una estrella esféricamente simétrica sobre un período de pulsación. La cantidad $d\bar{W}/dr$ representa la cantidad neta de energía ganada (o perdida) localmente por el material desplazado durante el ciclo de pulsación. Cuando, a una dada posición dentro de la estrella, $d\bar{W}/dr > 0$, la zona correspondiente contribuye a desestabilizar el modo de oscilación, es decir, el modo gana energía. Por el contrario, si $d\bar{W}/dr < 0$, la zona correspondiente tiene un efecto de amortiguamiento sobre el modo, es decir, el modo pierde energía. La suma de todas las contribuciones locales determina si el modo es globalmente estable, cuando la suma es negativa, o inestable, cuando la suma es positiva. En resumen, el sistema es globalmente inestable cuando el trabajo realizado por las regiones de excitación sobrecompensa el trabajo realizado por las regiones de amortiguamiento a lo largo de un ciclo de pulsación.

4.1.2. Mecanismo κ

El mecanismo dominante en la excitación de pulsaciones es el llamado mecanismo κ . Una región interior de la estrella contribuirá a excitar pulsaciones mediante este mecanismo si las derivadas de la opacidad satisfacen (Cox 1980):

$$\frac{d}{dr} \left[\kappa_T + \frac{\kappa_\rho}{(\Gamma_3 - 1)} \right] > 0 \quad (4.1)$$

donde

$$\kappa_T = \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T} \right)_\rho \quad \kappa_\rho = \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln \rho} \right)_T \quad \Gamma_3 - 1 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S \quad (4.2)$$

En las ecuaciones (4.2) S es la entropía específica, κ es la opacidad en cm^2/gr , y las variables r , ρ y T tienen su significado usual. Es importante aclarar que la ecuación (4.1) es una condición necesaria pero no suficiente para excitar pulsaciones en una estrella.

La ecuación (4.1) se cumple en forma frecuente cuando alguna especie química dentro de la estrella está parcialmente ionizada. En particular, κ_T usualmente aumenta en la región más caliente (región interna) y decrece en la región más fría (región externa). De esta manera, la parte interna de la región de ionización puede excitar pulsaciones mientras que la región externa tiende a amortiguarlas. El exponente adiabático $\Gamma_3 - 1$ es siempre positivo y usualmente alcanza un mínimo cuando el material estelar está parcialmente ionizado. Esta intensificación del mecanismo κ se denomina mecanismo γ . Físicamente, el mecanismo γ representa la conversión de una parte del trabajo de compresión en ionización adicional de la especie química en cuestión. Este efecto tiende a comprimir aún más el elemento de gas, acentuando la inestabilidad.

4.1.3. Mecanismos de Excitación en Estrellas sub-enanas B

Charpinet et al. (1996) y (1997) investigaron las propiedades de estabilidad pulsacional de modelos evolutivos de estrellas sdB con una envoltura rica en hidrógeno de composición solar uniforme. Utilizaron estructuras en equilibrio obtenidas de secuencias evolutivas de metalicidad solar, complementadas por envolturas estáticas de varias metalicidades.

Aunque todos los modelos con metalicidad solar resultaron globalment estables, descubrieron una región de excitación fuerte asociada con un máximo secundario en el perfil de la opacidad media de Rosseland, en varios de los modelos analizados. Este pico en la opacidad se conoce usualmente como *Z-bump*, y es causado por la ionización parcial de elementos pesados (hierro principalmente). El máximo en la opacidad es lo suficientemente importante y está bien localizado como para producir una excitación local significativa a través del mecanismo κ (ver sección 4.1.2).

Cabe aclarar que, contrariamente a las expectativas iniciales, la zona de ionización parcial HeII/HeIII, presente en los modelos, resultó estar localizada muy por encima de las regiones que contribuyen significativamente a la excitación y/o amortiguamiento. Su influencia es por lo tanto despreciable. Otros mecanismos potenciales de excitación, como el mecanismo ϵ debido a la presencia de una cáscara débil de hidrógeno en combustión localizada en la base de la envoltura rica en hidrógeno o debido al núcleo de helio en combustión, no contribuyen significativamente a la desestabilización de modos en los modelos de estrellas sdB (Charpinet et al. 2001).

Al incrementar el valor de la metalicidad en la envoltura por sobre el valor solar¹, Charpinet et al. (1997) descubrieron que los modelos con $Z \geq 0.04$ eran pulsacionalmente inestables a través del mecanismo κ actuando en la región de ionización del hierro, y estaban confinados a bajas temperaturas y bajas gravedades superficiales. A partir de este resultado, realizaron la predicción de que una subclase de las estrellas sdB debería mostrar variaciones en su brillo resultantes de inestabilidades pulsacionales (Charpinet et al. 1996). Esta predicción fue corroborada poco después por Kilkenny et al. (1997) con el descubrimiento de la primera estrella sdB pulsante en modos p no-radiales, EC 14026-2647.

Por último, Charpinet et al. (1997) calcularon una segunda serie de modelos. Esta vez relajaron la suposición de una metalicidad uniforme y consideraron la condición de equilibrio difusivo entre el *settling* gravitacional y la levitación radiativa en el hierro, responsable del proceso de excitación, dando lugar a una distribución no uniforme en la abundancia del mismo. Para ello utilizaron cálculos detallados de fuerzas radiativas sobre el hierro y las tablas de opacidad OPAL, tomando en cuenta las grandes variaciones de la abundancia de hierro alrededor del valor cósmico predicho por la teoría de levitación radiativa de equilibrio. Estos modelos resultaron ser inestables pulsacionalmente, lo que muestra que el mecanismo de excitación solamente requiere de un enriquecimiento local de elementos pesados en la región de excitación (Fontaine et al. 1998).

Estudios posteriores realizados por Jeffery & Saio (2006) demostraron que el mecanismo Z , o mecanismo *Fe-bump* de opacidad, es efectivo en las estrellas EC 14026 por un crecimiento en el contraste entre la opacidad debida al grupo de elementos del hierro y la opacidad debida a otras fuentes. Este aumento en el contraste se logra ya sea aumentando la abundancia de hierro, confirmando el trabajo anterior de Charpinet et al. (2001), o reduciendo la abundancia de hidrógeno (Jeffery y Saio 1998). Para modos radiales y modos p no radiales demostraron que el borde azul para la franja de inestabilidad radial es afectado por el peso molecular medio en la envoltura estelar, tal que aumentando la abundancia de hierro solamente conduce a una región de inestabilidad más caliente que incrementando la abundancia de los elementos pesados como un todo (Z). Esto es necesario para explicar la localización de la región de inestabilidad de las estrellas EC 14026, bajo la suposición general de que las propiedades de los modos p no radiales están cercanamente relacionadas con los modos radiales correspondientes con el mismo orden radial. La acumulación de hierro en las capas alrededor de los 200 000 K (Chayer, Fontaine y Wesemael 1995), debida a la acción diferencial de las fuerzas radiativas sobre los iones, acentúa el *Fe-bump* lo suficiente para excitar pulsaciones en alrededor de un 10 % de las sdB dentro de la zona de inestabilidad de las EC 14026 (Charpinet et al. 2001).

Al considerar pulsaciones no-radiales, Jeffery y Saio (2006) se concentraron en la inestabilidad de los modos g con orden armónico $\ell < 4$. Para los modos g no radiales descubrieron una isla de inestabilidad en la HB caliente que no requiere de realzamiento en la abundancia de hierro o una reducción en la abundancia de hidrógeno, pero solo en un rango pequeño de temperaturas efectivas alrededor de 18 000 K. Sin embargo, al reducir la abundancia de hidrógeno se observa una tendencia a desplazar el borde caliente de inestabilidad de los modos g y el límite frío de inestabilidad de los modos radiales y p a menores temperaturas. El ancho de la franja de inestabilidad para modos g y el número de modos excitados aumenta sustancialmente

¹El valor para la metalicidad solar es $Z=0.02$.

con el aumento en la abundancia de hierro, pero Jeffery y Saio (2006) no fueron capaces de obtener modos g inestables para $T_{\text{eff}} > 24\,000\text{K}$. El límite azul teórico para los modos g es 5000K más frío que las estrellas más calientes conocidas, que tienen una temperatura efectiva de $\sim 29\,500\text{K}^2$.

Siguiendo con esta línea de investigación, Jeffery y Saio (2006) estudiaron los efectos sobre la posición del *Fe-bump* de un crecimiento en la contribución de otros elementos además del hierro. Para ello utilizaron las tablas actualizadas de la opacidad media de Rosseland (Badnell et al. 2005) del *Opacity Project* (OP) para las mezclas con $X=0.7$, $Z_0=0.02$, pero con elementos como el cromo, magnesio, hierro y níquel realzados individualmente por un factor 10. Usando las tablas OP se pueden incluir variaciones de las abundancias por masa de los distintos elementos pesados en forma independiente dentro del valor de Z , mientras que usando las tablas de OPAL solo se puede variar el valor de Z como un todo. Considerando las abundancias relativas de los elementos pesados, descubrieron que tanto el níquel como el cromo son altamente eficientes en la absorción de radiación. En particular, descubrieron que la temperatura a la cual se produce el *bump* del níquel es marcadamente más alta que aquella en la que ocurre el *bump* de hierro, mientras que aquellos del magnesio y el cromo son similares o menores. Este resultado lleva a un desplazamiento del límite azul hacia temperaturas más altas, dado que la posición de la franja de inestabilidad está dictado por la temperatura a la que ocurre el pico de opacidad que provee la excitación.

El uso de las opacidades de OP combinado con los excesos de níquel puede desplazar el límite azul teórico de la franja de inestabilidad de los modos g significativamente cerca del límite azul observado. Para estos modelos se obtienen modos g inestables con $\ell = 3$ a temperaturas de hasta $T_{\text{eff}} \lesssim 28\,000\text{K}$ mientras que para los modelos de OPAL T_{eff} no supera los $25\,000\text{K}$. Aunque es menos probable de ser observado, los modos g con $\ell = 4$ son excitados hasta $T_{\text{eff}} \sim 29\,500\text{K}$ para modelos OP. En contraste, la posición de los modelos en el diagrama H-R difícilmente cambia con la elección de la tabla de opacidades. Estos resultados pueden confirmar la afirmación de Fontaine et al. (2003) al identificar las oscilaciones en las estrellas PG 1716 como modos g . Además la diferencia entre el límite azul predicho y el observado se puede resolver utilizando una física atómica más precisa para los cálculos de la opacidad estelar, así como también considerando otras especies atómicas además del hierro.

4.2. Modelo de Referencia

Para realizar un análisis de las pulsaciones en las estrellas sdB, siguiendo los pasos de Charpinet et al. (2000) y (2002b), elegimos el modelo de la secuencia evolutiva de masa $0.47329M_{\odot}$ en la Rama Horizontal, analizado en la sección 3.2. Los parámetros de superficie del modelo elegido, que llamaremos de referencia, son: $\log g = 5.4$ y $\log T_{\text{eff}} = 4.43$, o $T_{\text{eff}} = 27\,148\text{K}$, como se indican en la tabla 3.1. Elegimos la secuencia con masa $0.47329M_{\odot}$ porque comparte más similitudes con la secuencia utilizada por Charpinet et al. (2000). El modelo en particular fue elegido por su localización en el plano $\log g - \log T_{\text{eff}}$, ya que se trata de un modelo que se ubica aproximadamente en el centro de la etapa HB. Este criterio fue utilizado en la elección de todos los modelos analizados en la sección 3.2 para cada secuencia evolutiva.

A continuación realizaremos un análisis de los modos de pulsación para el modelo de referencia. Los modos de presión y de gravedad serán analizados por separado, dado que cuentan con características diferentes; como por ejemplo que se propagan en zonas distintas de las estrellas sdB. Analizaremos los comportamientos de cantidades como la energía cinética y el espaciamiento de períodos o frecuencias consecutivos para ambos tipos de modos no radiales en función del período o la frecuencia, según corresponda. Estas cantidades resultan útiles a la hora de

²Las estrellas PG 1716 conocidas con mayores temperaturas efectivas son Balloon 090100001 y HS 0702+6043 (Oreiro et al. 2005; Schuh et al. 2006).

estudiar los efectos de atrapamiento y confinamiento de modos g y de “microatrapamiento” en los modos p , debido a las transiciones químicas dentro de las estrellas sdB. Luego analizaremos el comportamiento de las autofunciones de desplazamiento que, junto con la energía cinética, indican en qué zonas de la estrella se propagan los distintos modos con mayor amplitud. Por último, estudiaremos las regiones de la estrella que tienen mayor influencia en los períodos de los modos de presión y gravedad usando las amplitudes relativas de las funciones de peso.

4.3. Energía Cinética de Modos

Existen dos cantidades útiles para el estudio de los fenómenos de atrapamiento y confinamiento de modos: la energía cinética (E_{cin}), y el espaciamiento de períodos consecutivos ($\Delta\Pi_k$). La primera y más importante cantidad, la energía cinética de un modo, está definida en función de las autofunciones de desplazamiento como (Unno et al. 1989):

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\sigma^2 \int_V \rho \vec{\xi}(\vec{r}) \cdot \vec{\xi}^*(\vec{r}) dV = \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^R [\xi_r^2 + \ell(\ell+1)\xi_h^2] \rho r^2 dr \quad (4.3)$$

donde $\vec{\xi}(\vec{r})$ representa el autovector de desplazamiento Lagrangiano asociado al modo de pulsación (ec. (A.37)), siendo ξ_r su componente en la dirección horizontal (ec. (A.38)) y P' y Φ' son las perturbaciones Eulerianas de la presión y el potencial gravitatorio respectivamente. Debido a que las amplitudes de las autofunciones calculadas están normalizadas arbitrariamente, solo puede hacerse un análisis cualitativo a partir de ellas, mediante la comparación entre modos. Como veremos más adelante, la energía cinética de los modos p (figura 4.6) tiende a ser mucho menor que la energía cinética de los modos g (figura 4.1). Esto significa que los modos g tienen mayor inercia, es decir, que requieren mayor energía que los modos p para oscilar, suponiendo que las amplitudes están normalizadas de la misma manera.

En la ecuación (4.3), se realiza una integración sobre toda la estrella de todas las contribuciones locales a la energía cinética sobre las amplitudes relativas de las autofunciones Lagrangianas de desplazamiento con un factor de peso ρr^2 . Por lo tanto, dado que la densidad del gas aumenta fuertemente desde $\sim 10^{-5}$ g/cm³ cerca de la superficie hasta $\sim 10^3$ g/cm³ en el núcleo, las regiones más profundas y más densas de la estrella tienden a tener mayor inercia que las capas superficiales. De esta manera, contribuyen al crecimiento significativo de los valores de energía cinética si las amplitudes de las autofunciones son lo suficientemente grandes en estas zonas internas. Como resultado, las diferencias importantes observadas entre los valores de E_{cin} para los modos p y g sugieren que los modos g oscilan con amplitudes relativas mayores en regiones más profundas de la estrella comparados con los modos p . Este comportamiento sugiere que los modos g se propagan en zonas internas de la estrella mientras que los modos p lo hacen en zonas más superficiales convirtiéndolos en modos de envoltura.

4.4. Modos de Gravedad

4.4.1. Energía Cinética y Espaciamiento de Períodos Consecutivos

En esta sección realizaremos un estudio de la energía cinética y el espaciamiento de períodos consecutivos en el caso de los modos de gravedad. Para el estudio de los períodos de los modos g , utilizaremos un tratamiento semianalítico basado en la teoría asintótica de Tassoul (Tassoul 1980), desarrollado por Brassard et al. (1992a) y adaptado para las estrellas sdB por Charpinet et al. (2000)³. En esta aproximación, se asume que la estrella posee una estructura interna donde las regiones convectivas y radiativas están separadas por transiciones químicas. En el

³Para más detalles se remite al lector a Charpinet et al. (2000) y referencias.

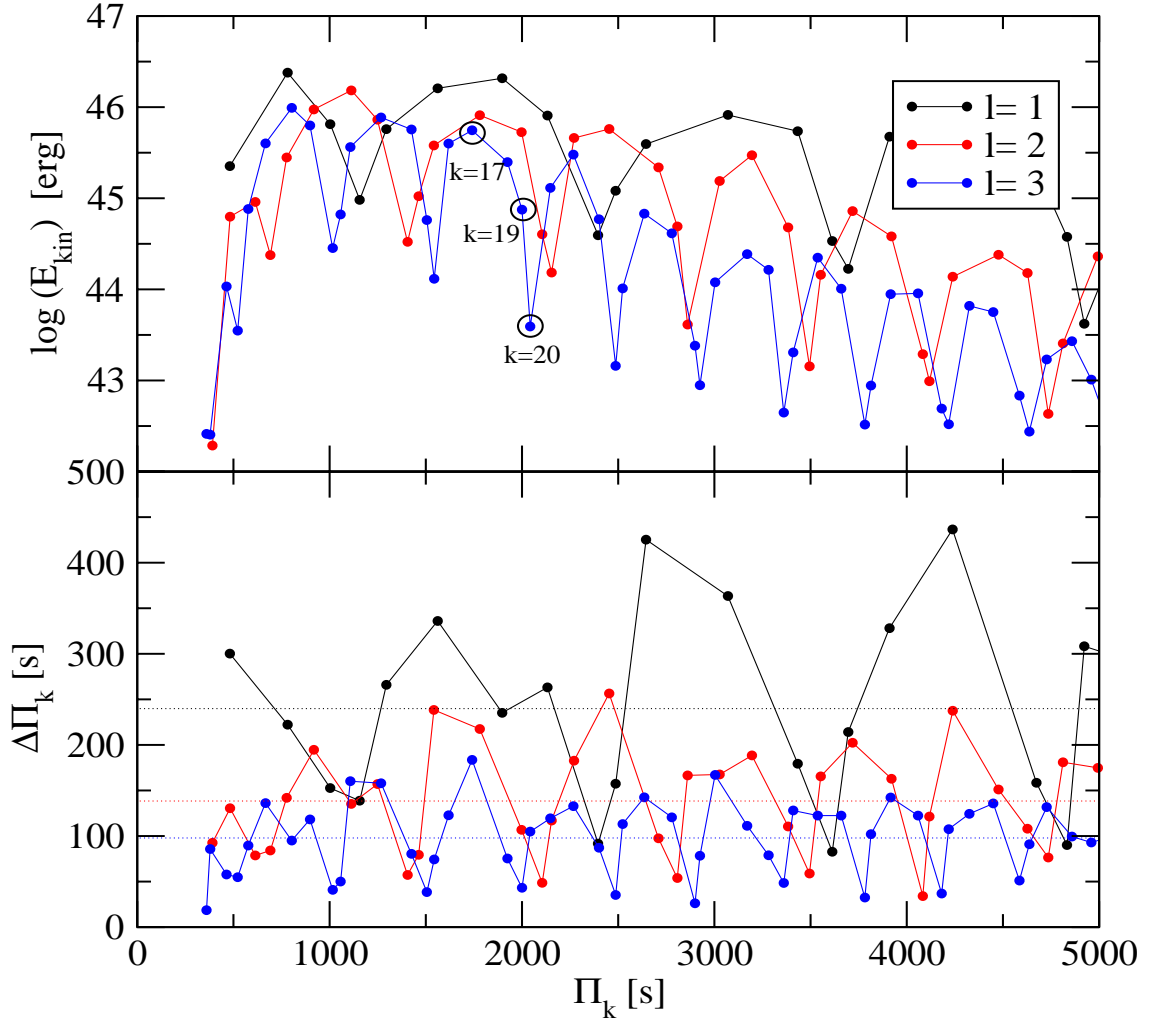


Figura 4.1: Espectro de energía cinética (erg) (panel superior) y espaciamento de períodos consecutivos (s) (panel inferior) en función del período (s) para los modos g del modelo de referencia con $\ell = 1, 2$ y 3 . Las líneas punteadas horizontales indican el valor asintótico de $\Delta\Pi_k$ para cada valor de ℓ . Con círculos se indican un modo confinado ($k=17$), un modo normal ($k=19$) y un modo atrapado ($k=20$). Dichos modos serán analizados posteriormente.

caso de las estrellas sdB, las transiciones se localizan en el límite del núcleo convectivo central (C/O/He) y en la base de la envoltura (He/H). En este contexto, la expresión asintótica para el espaciamento de períodos consecutivos está dado por:

$$\overline{P_{k+1} - P_k} \simeq \frac{\overline{P_{i+1} - P_i}}{\Delta k} = \frac{\Pi_0^{rad}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \quad (4.4)$$

donde

$$\Pi_0^{rad} \equiv 2\pi^2 \left(\int_{r_c}^R \frac{|N|}{r} dr \right)^{-1} \quad (4.5)$$

Notemos que, el espaciamento medio de períodos de los modos g en general (ver ec. (4.4)), aunque parecen depender de la posición del borde exterior del núcleo convectivo a través de Π_0^{rad} , no muestran ninguna contribución en sus expresiones asintóticas de la estructura del núcleo convectivo interno en si mismo, es decir, que los detalles físicos del núcleo no son críticos. Este efecto será analizado más adelante.

Tabla 4.1: Valores del período y energía cinética para modos de gravedad con $\ell = 0, 1, 2, 3$ y $k = 1, \dots, 15$ correspondientes al modelo de referencia con $M_* = 0.47329 M_\odot$, $T_{\text{eff}} = 27\,148\text{ K}$, $\log g = 5.44$.

		$\ell = 0$		$\ell = 1$		$\ell = 2$		$\ell = 3$	
	k	Π_k	$\log E_{\text{cin}}$	Π_k	$\log E_{\text{cin}}$	Π_k	$\log E_{\text{cin}}$	Π_k	$\log E_{\text{cin}}$
		[s]	[erg]	[s]	[erg]	[s]	[erg]	[s]	[erg]
g	1	481.34	45.35	390.53	42.28	360.09	42.41
g	2	781.45	46.37	483.07	44.79	378.61	42.40
g	3	1003.80	45.81	613.48	44.95	464.34	44.03
g	4	1156.37	44.98	692.25	44.37	522.02	43.54
g	5	1295.13	45.75	776.46	45.44	576.87	44.88
g	6	1561.15	46.20	918.48	45.97	666.43	45.60
g	7	1897.26	46.31	1113.01	46.18	802.62	45.99
g	8	2132.49	45.90	1248.36	45.86	897.61	45.79
g	9	2395.66	44.59	1405.29	44.52	1015.93	44.45
g	10	2487.44	45.08	1462.65	45.02	1056.95	44.82
g	11	2644.86	45.59	1542.04	45.57	1106.95	45.56
g	12	3070.18	45.91	1780.52	45.91	1267.04	45.88
g	13	3433.62	45.73	1997.97	45.72	1425.01	45.75
g	14	3612.87	44.53	2104.89	44.60	1505.43	44.76
g	15	3695.58	44.22	2153.50	44.18	1543.89	44.11

Dadas las herramientas teóricas, pasemos al análisis de la energía cinética y el espaciado de períodos consecutivos. Como ya mencionamos en la sección de 1.6.2 los modos g poseen una distribución de energía cinética no uniforme que puede estar relacionada con los fenómenos de atrapamiento y confinamiento de modos. Este comportamiento está ilustrado en el panel superior de la figura 4.1 para $\ell=1, 2$ y 3 , con períodos entre 80 y 5000 segundos. En la tabla 4.1 se muestran los valores de los períodos y la energía cinética para los modos de gravedad con $\ell=0, 1, 2$ y 3 , desde $k=1$ hasta $k=15$.

En la figura 4.1 se puede observar que los mínimos de E_{cin} son muy angostos y bien definidos, mientras que los máximos son más bien anchos, extendiéndose en un rango de períodos correspondiente a 2 ó 3 modos con energías cinéticas más altas. Los modos con E_{cin} mínima se denominan modos atrapados mientras que, los que poseen una E_{cin} máxima se llaman confinados. Por lo tanto, podemos ver a partir del perfil de la E_{cin} que los efectos de selección de modos son más eficientes en situaciones de atrapamiento. El espaciado de períodos de modos consecutivos ($\Delta\Pi_k$) se muestra en el panel inferior de la figura 4.1. En el perfil de $\Delta\Pi_k$ también se pueden observar manifestaciones de los efectos de atrapamiento/confinamiento de modos g . Aquellos modos atrapados y sus vecinos inmediatos están localizados en un mínimo de $\Delta\Pi_k$, llevando, en principio, a una señal observable de este fenómeno. Cuando k aumenta el espaciado entre los períodos tiende a un valor asintótico (Tassoul 1980) que se indica en la figura 4.1 por una línea horizontal. Este comportamiento se observa con mayor claridad para el caso con $\ell = 3$.

El perfil de $\Delta\Pi_k$ muestra una serie de mínimos primarios inercalados con mínimos secundarios de menor amplitud. La existencia de los mínimos secundarios se debe a la presencia de la interface C/O/He que tiene una influencia menor que la interface He/H, dando lugar a un patrón que puede interpretarse como una superposición de dos perfiles debidos a las interfaces por separado. Según la teoría asintótica, en el caso de tener solo una interface, por ejemplo He/H, el perfil de $\Delta\Pi_k$ mostraría solamente mínimos primarios con amplitudes comparables.

4.4.2. Origen del Atrapamiento de Modos g

Ahora queremos analizar el fenómeno de atrapamiento de modos g en estrellas sdB debidos a las transiciones químicas.

Los resultados asintóticos obtenidos por Charpinet et al. (2000) suponiendo una estructura interna con interfaces químicas, como es el caso de los modelos de estrellas sdB utilizados en esta tesis, sugieren que la transición química de He/H tienen un mayor impacto en los efectos de atrapamiento/confinamiento. A partir de esta observación, siguiendo los pasos de Charpinet et al. (2000), recalculamos todo el espectro de períodos de pulsación para dos versiones del modelo de referencia modificadas artificialmente. Estos modelos se obtuvieron forzando a cero el término B de Ledoux en distintas regiones de la estrella, logrando así anular los efectos de las transiciones químicas en la frecuencia de Brunt-Väisälä. El primer modelo, denominado $B(C/O/He) = 0$, se obtiene anulando B en la transición interna de C/O/He, y está caracterizado por una frecuencia de Brunt-Väisälä cuyo perfil se muestra en la figura 4.2b. Este perfil no muestra el pico en $\log(1 - M_r/M_*) \sim -0.3$ que se observa en el modelo de referencia (figura 4.2a).

El segundo modelo modificado se obtiene anulando el término de Ledoux en toda la estrella ($B=0$). Esta condición elimina los dos picos correspondientes a las transiciones de C/O/He y He/H de la frecuencia de Brunt-Väisälä como se muestra en la figura 4.2c.

Notar que, aunque anulamos B en las distintas regiones de la estrella, cancelando los efectos de las transiciones químicas, los saltos en la densidad siguen teniendo relevancia en la frecuencia de Brunt-Väisälä a través del factor ρ (ver ec. (3.1)), y por consiguiente en el espectro de pulsaciones. En las figuras 4.2b y 4.2c podemos ver que los picos asociados a las transiciones químicas donde se anula B desaparecen, pero la forma general de N^2 se conserva.

Como las características de los modos g están cercanamente relacionadas con el perfil de la frecuencia de Brunt-Väisälä dentro de la estrella, eliminar la componente de Ledoux de esta cantidad minimiza considerablemente el impacto de las transiciones químicas, y por consiguiente, sus efectos en el atrapamiento de modos de gravedad. Para los modelos modificados artificialmente calculamos los períodos de los modos g para $\ell = 3$. En la figura 4.3 se muestra el análogo de la figura 4.1 para el modelo de referencia y sus dos versiones modificadas en el caso $\ell = 3$. Como se puede observar, el comportamiento para el modelo $B(C/O/He) = 0$ no difiere significativamente del modelo de referencia, exhibiendo una patrón similar, en especial para E_{cin} . Esto implica que la transición C/O/He no tiene una influencia significativa en la estructura de atrapamiento de modos. El efecto sobre $\Delta\Pi_k$ tampoco es muy notorio dado que el comportamiento general es similar al caso del modelo de referencia.

Para el modelo con $B=0$, caracterizado por la ausencia de estructuras de atrapamiento, se observa un comportamiento notoriamente más uniforme y suave en la energía cinética comparado con los otros dos modelos, con máximos y mínimos menos definidos. Este resultado lleva a la conclusión de que la transición He/H controla el efecto de atrapamiento/confinamiento de modos de gravedad en las estrellas sdB. La variación en $\Delta\Pi_k$ es menor y tiene una estructura más uniforme, que tiende en forma más próxima al valor asintótico, como predice la teoría asintótica (Tassoul 1980)⁴. Sin embargo, para nuestro modelo de referencia no se elimina completamente el efecto de las transiciones químicas dado que tanto E_{cin} como $\Delta\Pi_k$ aún poseen una estructura “oscilante” y no tienen un valor fijo. Esto se debe a que, como ya mencionamos, la frecuencia de Brunt-Väisälä depende explícitamente de la densidad a lo largo de la estrella.

4.4.3. Autofunciones de Desplazamiento de Modos g

Las autofunciones de desplazamiento también proporcionan información valiosa acerca del comportamiento de los modos g en las estrellas sdB. Graficamos entonces en la figura 4.4 la

⁴La teoría asintótica predice que para el caso de un modelo químicamente homogéneo la energía cinética y el espaciamiento de períodos de modos g consecutivos tienen un valor fijo que no depende del orden radial k .

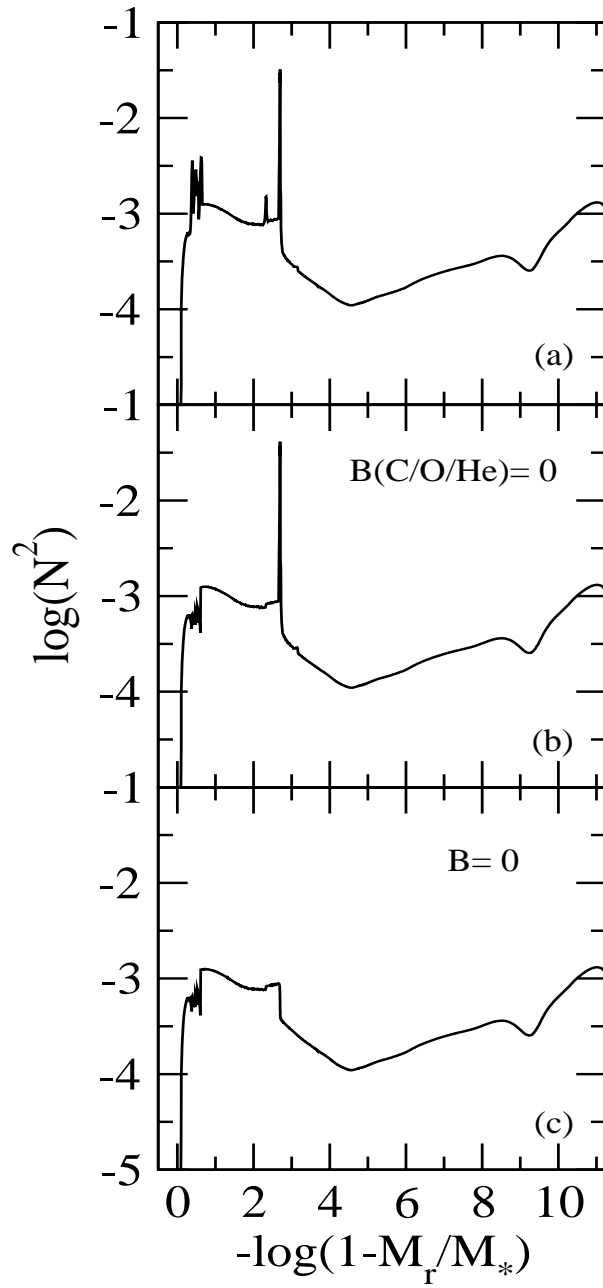


Figura 4.2: Perfil de la frecuencia de Brunt-Väisälä en función de $-\log(1 - M_r/M_*)$ para el modelo de referencia (a) y los modelos modificados artificialmente. El primer modelo modificado se obtiene forzando B a cero en la interface C/O/He y se denomina $B(\text{C/O/He}) = 0$ (b). El segundo modelo se obtiene forzando a cero el término B de Ledoux en toda la estrella y se denomina $B = 0$ (c).

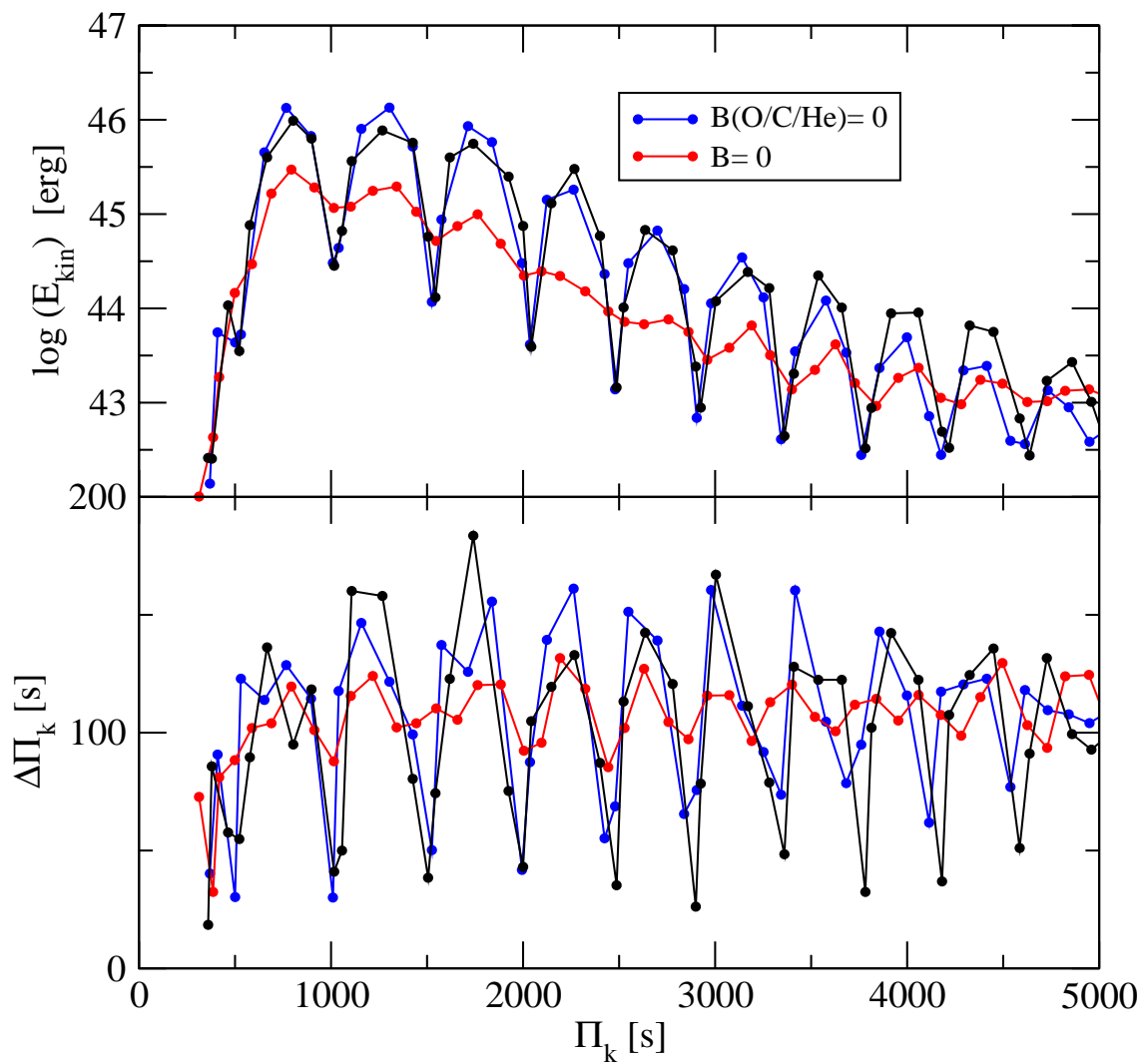


Figura 4.3: Energía cinética (panel superior) y espaciamento de períodos consecutivos (panel inferior) en función del período para los modos g con $\ell = 3$, correspondientes al modelo de referencia y para los dos modelos modificados artificialmente.

autofunción radial $y_1 = \xi_r/r$ (paneles superiores) y la horizontal $y_2 \equiv (P'/\rho + \Phi')/gr$ (paneles inferiores) que son las dos autofunciones adimensionales introducidas por Dziembowski (1971). También están indicadas las transiciones químicas mediante líneas de trazos. La línea punteada indica el límite exterior de la zona convectiva central o del núcleo convectivo. Por último, la amplitud de las autofunciones está normalizada tal que $y_1 = 1$ en la superficie de la estrella. En las figuras 4.4a y 4.4c graficamos las autofunciones correspondientes a modos con $\ell = 3$ del modelo de referencia representativos de las tres clases de modos: confinados ($k = 17$), normales ($k = 19$) y atrapados ($k = 20$). Los modos representativos se eligieron de manera tal que la energía cinética del modo confinado fuera un máximo local y la correspondiente al modo atrapado fuera un mínimo. Por otro lado el modo normal tiene una energía cinética de valor intermedio entre el modo confinado y el modo atrapado. Los modos elegidos se indican con círculos en la figura 4.1 sobre el espectro de E_{cin} .

Las autofunciones correspondientes al modo confinado (negro) muestran amplitudes relativas grandes en la región comprendida entre las dos transiciones químicas en comparación con otras regiones. Esto implica que el modo está confinado en una cavidad limitada por las dos transiciones químicas. Además posee un nodo ubicado muy cerca de la transición He/H. En el caso de y_1 el nodo está ubicado arriba de la transición, mientras que para y_2 el nodo se ubica por debajo. Según Charpinet et al. (2000), es prácticamente imposible lograr que ambos nodos se encuentren sobre la interface, lo que hace que el proceso de confinamiento sea mucho menos efectivo que el de atrapamiento. Se observan amplitudes relativas grandes en las autofunciones correspondientes al modo confinado en las regiones profundas del núcleo de helio, lo que explica por qué poseen energías cinéticas grandes, ya que las zonas internas de la estrella son más densas. En el caso de y_2 se observa un cambio en la pendiente bien definido cuando la autofunción cruza la interface He/H dando un efecto más acentuado al confinamiento.

Para el modo atrapado (azul) las autofunciones muestran un nodo cerca de la transición He/H para y_1 y sobre la transición para y_2 donde se observa un cambio abrupto en la pendiente de la curva, como en el caso del modo confinado. Esto dá lugar a una configuración óptima que minimiza la energía cinética, y por consiguiente, provoca el atrapamiento de modos g en la envoltura de la estrella. El origen del mínimo en la energía cinética para los modos atrapados se revela también en la figura 4.4 como consecuencia de una amplitud relativa significativamente menor en las regiones más profundas de la estrella, por debajo de la transición He/H. Recordemos que las zonas más profundas tienen mayor densidad y generalmente poseen mayor peso en las contribuciones a la energía cinética de los modos. Por lo tanto, los modos g atrapados en las estrellas sdB son casi enteramente reflejados de vuelta hacia la superficie desde la transición He/H, donde son literalmente capturados.

Las autofunciones del modo que denominamos normal (rojo) exhibe amplitudes relativas considerables en toda la estrella. Estos modos no son ni atrapados ni confinados, y por consiguiente sus autofunciones poseen características intermedias entre ellos. Los modos normales poseen la peor configuración de nodos posible relativa a la transición He/H, y por lo tanto, permanecen casi inalterados por su efecto de reflexión. En otras palabras, son poco sensibles a los cambios en la composición química interna del modelo estelar dado que no son afectados por las transiciones químicas.

Otras manifestaciones del fenómeno de atrapamiento se pueden ver en las figuras 4.4b y 4.4d. En ellas se graficaron las autofunciones y_1 e y_2 para el modo atrapado ($k = 20$) correspondiente al modelo de referencia, junto con el modo con $\ell = 3$ y $k = 17$ correspondiente al modelo con $B = 0$. El modo del modelo modificado fue elegido por la cercanía del valor de su período con el modo atrapado. Como se espera, las autofunciones son prácticamente iguales en la región exterior a la transición He/H. Sin embargo, podemos observar que para las regiones interiores a dicha transición la forma de las curvas difieren significativamente. El efecto responsable del decrecimiento de la amplitud en los modos atrapados en el núcleo de helio ocurre en la transición He/H sólo para el modo correspondiente al modelo de referencia,

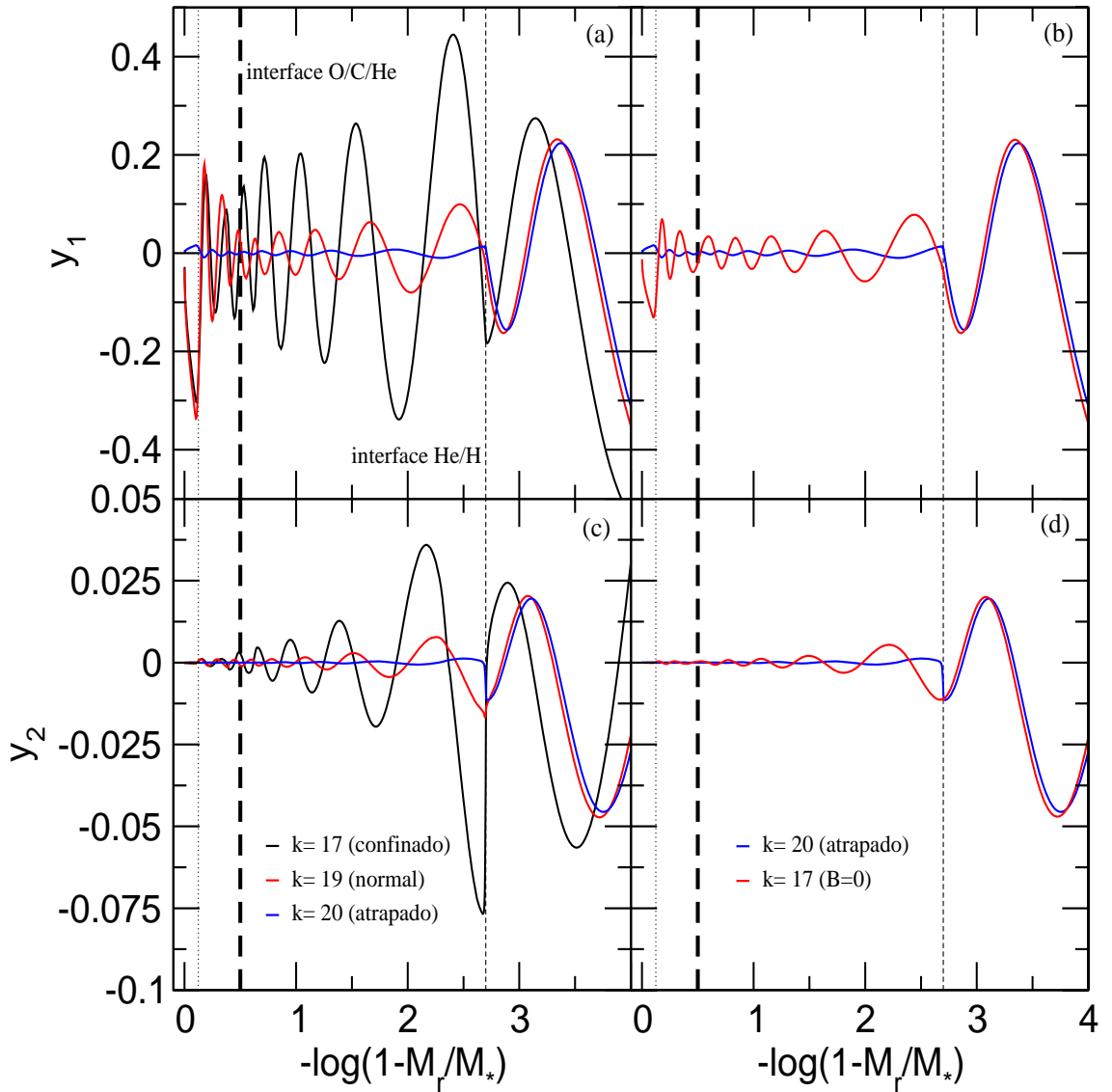


Figura 4.4: Autofunciones y_1 (a) e y_2 (c) correspondientes a tres modos representativos de modos confinados, atrapados y normales con $\ell=3$ para el modelo de referencia. También se muestran la autofunciones de desplazamiento y_1 (b) e y_2 (d) correspondientes al modo atrapado con $k=20$ del modelo de referencia y el modo con $k=17$ para el modelo modificado artificialmente $B=0$. El modo para $B=0$ fue elegido tal que el período de dicho modo fuera el más cercano al modo atrapado del modelo de referencia. La energía cinética de los modos representativos se indica con círculos en la figura 4.1. También se indica la posición de las interfaces químicas mediante líneas de trazos y con línea punteada se indica el límite exterior de la zona convectiva central.

mientras que aquel correspondiente al modelo modificado artificialmente permanece inalterado. Para las autofunciones del modelo modificado no se observan cambios en la concavidad de la curva al cruzar la interface He/H y su amplitud aún es considerable en comparación con la amplitud en la superficie. Esto no ocurre en el caso del modo atrapado que tiene una amplitud casi nula en las regiones interiores a la transición He/H. Esto implica que la interface He/H es responsable del atrapamiento de modos en acuerdo con los resultados obtenidos al analizar el comportamiento de la energía cinética.

En todos los casos las autofunciones se vuelven evanescentes en la región del núcleo convectivo central donde decaen a cero sin oscilar. Esto se debe a que los modos g no se propagan en zonas convectivas y por lo tanto el núcleo convectivo es una zona de evanescencia.

4.4.4. Regiones de Formación de Períodos de Modos g

Se denominan regiones de formación de períodos a aquellas regiones de la estrella donde la función de peso tiene mayor amplitud. Cambios en la estructura de estas zonas de la estrella tienen un impacto no despreciable sobre los períodos de oscilación, dando lugar a fluctuaciones en los valores de los mismos.

Comencemos primero fijando una base teórica para justificar nuestras afirmaciones. Se sabe que el cuadrado de la autofrecuencia (σ^2) de un dado modo, se puede expresar como una integral donde el integrando depende de las autofunciones (Unno et al. 1989):

$$\sigma^2 \propto \int F(y_1, y_2, y_3, y_4; r) dr \quad (4.6)$$

donde y_1 e y_2 fueron definidas en la sección anterior, e $y_3 \equiv \Phi'/gr$ e $y_4 \equiv g^{-1}d\Phi'/dr$ son las restantes autofunciones adimensionales introducidas por Dziembowski (1971). En términos de estas funciones, se puede demostrar que

$$F\left(\xi_r, P', \Phi'; r\right) = \left[\xi_r^2 N^2 + \frac{(P')^2}{\Gamma_1 P \rho} + \left(\frac{P'}{\Gamma_1 P} + \xi_r \frac{N^2}{g} \right) \right] \rho r^2 \quad (4.7)$$

Por lo tanto, el valor relativo de la función de peso F evaluada en una dada posición r dentro de la estrella describe la contribución local de la región considerada al período de un dado modo.

Para evaluar cuáles regiones de la estrella se pueden considerar como regiones de formación de períodos, analizaremos el perfil de la función de peso para tres modos representativos de modos g . La figura 4.5 muestra los perfiles de las funciones de peso correspondientes a modos g con $\ell=3$, para $k=17$ (confinado), $k=19$ (normal) y $k=20$ (atrapado). Para las funciones de peso la normalización se realiza de forma tal que el valor máximo sea igual a uno. Las autofunciones y_1 e y_2 correspondientes a los modos analizados se pueden ver en las figuras 4.4a y 4.4c respectivamente.

Antes de comenzar con el análisis, es necesario hacer una aclaración respecto de la clasificación de los modos g . En esta sección definimos como modos confinados a aquellos modos cuya función de peso posee amplitudes grandes en la región delimitada por las transiciones C/O/He y He/H, y amplitudes casi nulas en el resto de la estrella. Por otro lado, llamamos modos atrapados a los modos cuyas funciones de peso tienen amplitudes significativas en la envoltura de la estrella, por encima de la interface He/H, y amplitudes casi nulas para las demás regiones dentro de la estrella. De esta manera obtenemos un criterio para la clasificación de modos g compatible con el criterio de la energía cinética.

Para el modo confinado (figura 4.5a), el máximo en la función de peso se encuentra próximo a la transición C/O/He, aproximadamente en $-\log(1-M_r/M_*)=0.6-0.7$, y la porción de mayor amplitud está ubicada en la región más profunda rica en helio. En forma más general, se observa mayor amplitud en la zona entre las interfaces de C/O/He y He/H. Las contribuciones de las zonas más exteriores, por encima de la transición He/H, son prácticamente nulas, dado que

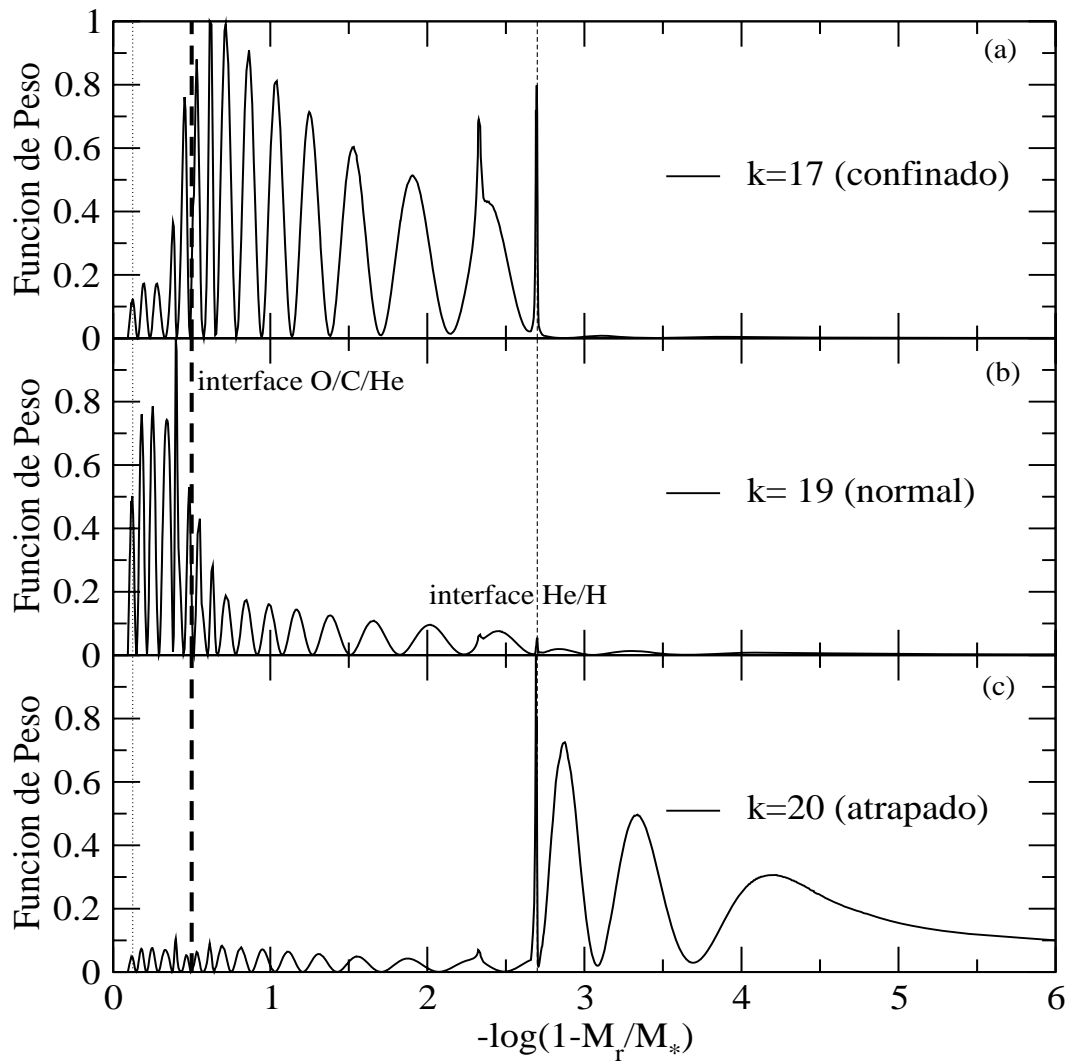


Figura 4.5: Funciones de peso correspondientes a los modos confinado (a), normal (b) y atrapado (c) con $k=17$, 19 y 20 respectivamente, y $\ell=3$ para el modelo de referencia. También se indica la posición de las interfaces químicas mediante líneas de trazos y con línea punteada se indica el límite exterior de la zona convectiva central.

la amplitud de la función de peso en esa región es también nula. Por lo tanto, estas regiones, especialmente la envoltura rica en hidrógeno, no deberían tener un impacto significativo sobre los períodos de los modos g . En conclusión, estos modos son modos del interior profundo que oscilan principalmente cerca de la base de la cáscara radiativa rica en helio. Se observa también una amplitud significativa debajo de la transición C/O/He y por encima del núcleo convectivo, aunque con menor amplitud, (la mitad) que en la zona entre las interfaces. Esto implica que la zona semiconvectiva tiene cierta influencia en los períodos de los modos confinados.

La amplitud relativa de la función de peso para el modo normal (figura 4.5b) es casi nula en la zona de la envoltura como en el caso del modo confinado. Posee una amplitud relativa pequeña en la región entre las transiciones químicas, la cual aumenta considerablemente cuando cruzamos la interface C/O/He hacia el centro de la estrella. Se observa, por lo tanto, que la región de mayor amplitud corresponde a la zona delimitada superiormente por la transición C/O/He e inferiormente por el límite exterior de la zona convectiva central.

Según Charpinet et al. (2000) los perfiles correspondientes a las funciones de peso del modo confinado y del normal deberían pararse en forma porque el mecanismo de confinamiento no es muy eficiente en la selección de modos. Este hecho no ocurre para nuestro modelo de referencia.

Por último, la función de peso para el modo atrapado (figura 4.5c) exhibe un máximo de amplitud relativa igual a uno en la transición He/H. Aunque las zonas por debajo de la transición He/H poseen una amplitud no nula, la región que tiene un impacto dominante está dada por las capas que rodean a la base de la envoltura rica en hidrógeno.

Las tres funciones de peso, así como también las autofunciones correspondientes de la figura 4.4 poseen amplitudes relativas no nulas en el núcleo convectivo central. Sin embargo no se observan oscilaciones y las autofunciones y funciones de peso decaen sin oscilar. Esto se debe a que los modos g no se propagan en zonas convectivas y por lo tanto el núcleo central convectivo es una zona evanescente para estos modos, como mencionamos anteriormente.

4.5. Modos de Presión

4.5.1. Energía Cinética y Espaciamiento de Frecuencias Consecutivas

En forma análoga a los modos g , realizaremos un análisis de la energía cinética y del espaciamiento en frecuencia de modos consecutivos ($\Delta\nu$) en función de la frecuencia (ν).

La teoría asintótica para estrellas químicamente uniformes predice un espectro acústico de frecuencias de la forma (Tassoul 1980)

$$\nu_{k\ell} \simeq \left(k + \frac{\ell}{2} + \frac{n_e}{2} + \frac{1}{4} \right) \left(2 \int_0^R \frac{dr}{C_s} \right)^{-1} \quad (4.8)$$

con n_e es el índice politrópico de las capas superficiales y $C_S(r)$ la velocidad del sonido local adiabática, dada por la relación

$$C_S = \left(\frac{\Gamma_1 P}{\rho} \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

Por consiguiente, en el límite de alto orden radial, se debe esperar que el espaciamiento en frecuencia entre dos modos p consecutivos se vuelva constante y esté dado por

$$\Delta\nu \equiv \nu_{k+1} - \nu_k = \left(2 \int_0^R \frac{dr}{C_S} \right)^{-1} \quad (4.10)$$

Tabla 4.2: Valores del período y energía cinética para modos de presión y fundamental con $\ell = 0, 1, 2, 3$ y $k = 0, \dots, 15$ correspondientes al modelo de referencia con $M_* = 0.47329 M_\odot$, $T_{\text{eff}} = 27148 \text{ K}$, $\log g = 5.44$.

		$\ell = 0$		$\ell = 1$		$\ell = 2$		$\ell = 3$	
k		Π_k	$\log E_{\text{cin}}$	Π_k	$\log E_{\text{cin}}$	Π_k	$\log E_{\text{cin}}$	Π_k	$\log E_{\text{cin}}$
		[s]	[erg]	[s]	[erg]	[s]	[erg]	[s]	[erg]
p	15	71.58	40.18	74.90	40.03	73.47	40.05	71.92	40.13
p	14	76.29	40.17	80.02	39.90	78.34	39.97	76.07	40.05
p	13	81.10	40.19	85.87	39.79	83.32	39.90	80.85	39.91
p	12	86.42	40.14	92.12	39.74	88.73	39.79	86.67	39.78
p	11	93.09	40.10	98.46	39.70	95.37	39.66	93.43	39.68
p	10	101.30	40.10	105.92	39.64	103.41	39.62	100.81	39.66
p	9	110.66	40.15	115.61	39.66	112.73	39.66	108.45	39.70
p	8	120.08	40.24	127.66	39.75	122.69	39.79	117.27	39.71
p	7	130.94	40.22	141.53	39.92	133.35	39.87	128.90	39.77
p	6	146.26	40.23	155.12	40.10	147.84	39.93	143.88	39.89
p	5	165.01	40.38	172.63	40.16	167.33	40.09	161.01	40.11
p	4	179.59	40.67	199.68	40.37	187.13	40.56	176.23	40.35
p	3	201.31	40.58	237.92	40.75	201.41	40.50	197.74	40.40
p	2	239.27	40.88	294.94	41.36	236.03	40.74	229.43	40.80
p	1	297.00	41.45	399.35	42.35	289.27	41.34	242.49	41.24
f	0	403.39	42.43	307.42	42.36	285.59	41.29

Ahora analicemos el comportamiento de E_{cin} y $\Delta\nu$ para nuestro modelo de referencia. En la tabla 4.2 se muestran los valores de los períodos y energía cinética del modo fundamental y los modos de presión con $\ell=0, 1, 2$ y 3 desde $k=0$ hasta $k=15$.

En la figura 4.6 se muestra el perfil de la energía cinética y el espaciamiento de las frecuencias de modos consecutivos en función de la frecuencia en mHz para los modos p con $\ell=0, 1, 2$ y 3 y con orden radial k desde 0 hasta ~ 22 . Contrario a lo que sucede con los modos g (ver fig 4.1 panel superior), no se observan mínimos o máximos locales en la energía cinética que se puedan atribuir a los efectos de atrapamiento o confinamiento de modos. En su lugar, posee un comportamiento suave y prácticamente sin oscilaciones a lo largo de todo el espectro, como se muestra en los paneles correspondientes de la figura 4.6.

Si hacemos un análisis más detallado podemos ver que, la energía cinética muestra un decrecimiento monótono a medida que k aumenta en la sección de bajo orden radial del espectro de energía. Este decrecimiento está seguido por un mínimo global amplio que precede a un crecimiento suave, y aparentemente lineal, en la región de alto orden radial, o alta frecuencia. Superpuestas al comportamiento global, se pueden ver pequeñas fluctuaciones, sobre todo para bajas frecuencias. El comportamiento global observado para los modos p es muy cercano a la predicciones de la teoría asintótica que requiere, para altos valores de k , que $\Delta\nu$ sea constante, al menos para estrellas químicamente uniformes. Las mayores desviaciones del valor asintótico se observan para los modos con k pequeños, esto no es sorprendente dado que la región de validez de la teoría asintótica son los k grandes.

Para estudiar los efectos de las discontinuidades de Ledoux en los modos p , se calculó el espectro de frecuencias completo para el modelo modificado artificialmente, que denominamos $B = 0$. No consideramos el modelo modificado $B(\text{C/O/He}) = 0$ dado que los modos de presión son modos de envoltura y no son sensibles a los cambios en las regiones internas de la estrella. De esta manera, queremos evaluar la influencia de estas discontinuidades en la estructura de

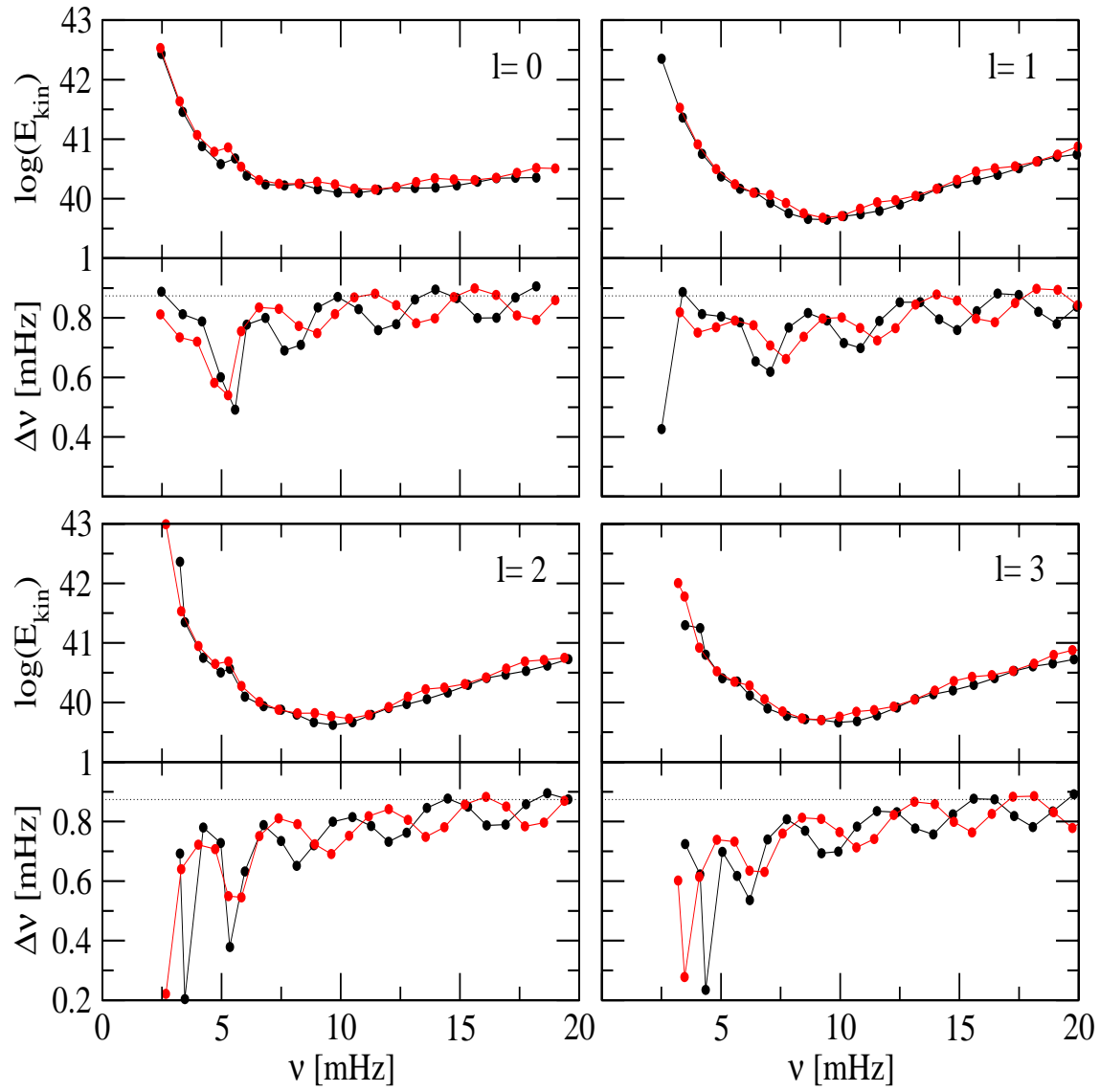


Figura 4.6: Energía cinética y espaciamento de frecuencias consecutivas en función de la frecuencia para los modos p con $\ell=0, 1, 2$ y 3 , del modelo de referencia (negro) y del modelo modificado artificialmente $B=0$ (rojo). Con una línea punteada horizontal se indica el valor asintótico para $\Delta\nu$.

la energía cinética y el espaciamiento de frecuencias consecutivas de los modos de presión. Los resultados también se muestran en la figura 4.6 (círculos rojos). A pesar que la energía cinética de los modos para el modelo $B = 0$ está un poco desplazada hacia arriba y el perfil presenta pequeñas “ondas”, la supresión de las transiciones químicas revela que las discontinuidades de Ledoux tienen un impacto mínimo en la estructura del espectro de los modos p . Las fluctuaciones en $\Delta\nu$ permanecen con la misma amplitud y la forma general de la curva se conserva, aunque, como podemos ver en la figura 4.6, la curva está desplazada hacia la izquierda.

Contrario a los modos g , que son muy sensibles a las discontinuidades en la frecuencia de Brunt-Väisälä, los modos acústicos están relacionados en forma más cercana con la frecuencia de Lamb, que está conectada directamente con la velocidad del sonido adiabática local (C_s). Esta última cantidad, como función de la densidad, también tiene discontinuidades debido a las transiciones químicas. En la figura 3.4 podemos ver picos en la frecuencia de Lamb correspondientes a la interface He/H. Sin embargo, la interface C/O/He no produce cambios en el perfil de esta frecuencia. Charpinet et al. (2000) sostienen que las fluctuaciones observadas en el espectro de modos p , que denominan “microatrapamiento”, son causadas por la zona de transición He/H, que es también responsable de los efectos de atrapamiento/confinamiento en los modos g .

4.5.2. Autofunciones de Desplazamiento de Modos p

Siguiendo con el mismo razonamiento que usamos en el análisis de los modos de gravedad, pasamos a analizar las autofunciones de desplazamiento y_1 e y_2 para modos de presión.

En la figura 4.7 se muestran las autofunciones de desplazamiento y_1 e y_2 para los modos acústicos con $\ell=0, 1, 2$ y 3 con tres valores distintos del orden radial k . Al igual que en el caso de los modos de gravedad, la amplitud de las autofunciones es tal que $y_1 = 1$ en la superficie de la estrella.

A partir de la figura 4.7, podemos ver la razón por la cual no se observan manifestaciones fuertes del efecto de atrapamiento/confinamiento en los modos presión. Estos modos oscilan con amplitudes relativas considerables solamente en la envoltura rica en hidrógeno, bien por encima de la transición He/H, indicada por una línea de trazos pequeños. Por lo tanto, esta transición no introduce cambios significativos en las propiedades de los modos p . Esto también explica la baja energía cinética de los modos acústicos comparados con los modos de gravedad, dado que estos últimos muestran amplitudes relativas mayores en las regiones más internas y densas de la estrella. Las amplitudes de oscilación relativas de los modos acústicos en el núcleo de helio son muy pequeñas, tal que, en la escala de la figura 4.7, no se observan oscilaciones sino amplitudes relativas nulas para todos los valores de ℓ . Esto demuestra que son principalmente modos de envoltura. Los modos de menor orden radial ($k= 0, 1$) son los más profundos en comparación con los modos de mayor orden radial. De aquí que el decrecimiento inicial en la energía cinética del espectro de modos p (ver figura 4.6) se puede explicar con el corrimiento “rígido” hacia la superficie de la amplitud relativa de oscilación cuando k aumenta, ya que las regiones menos densas requieren una energía cinética mucho menor para oscilar.

El crecimiento final para k grandes en la energía cinética se debe a una combinación de dos factores. El primero se debe a la forma en que se modela la estructura de la estrella. En los cálculos de estructura estelar, la superficie del modelo no corresponde a la superficie real de la estrella, que está localizada en $-\log(1 - M_r/M_*) \rightarrow \infty$. Por el contrario, el cálculo del modelo se detiene a una cierta distancia del centro ($-\log(1 - M_r/M_*) \approx 12.5$). Entonces, al comprimir los nodos de las autofunciones cerca de la superficie del modelo, este límite arbitrario fuerza a los modos p de orden radial suficientemente grande a desarrollar amplitudes grandes más adentro de la envoltura a medida que k aumenta, induciendo un crecimiento global en la energía cinética. Por otra parte, si bien las autofunciones se mueven cada vez más cerca de la superficie, donde la densidad es menor, a medida que k aumenta, las amplitudes de las autofunciones son cada

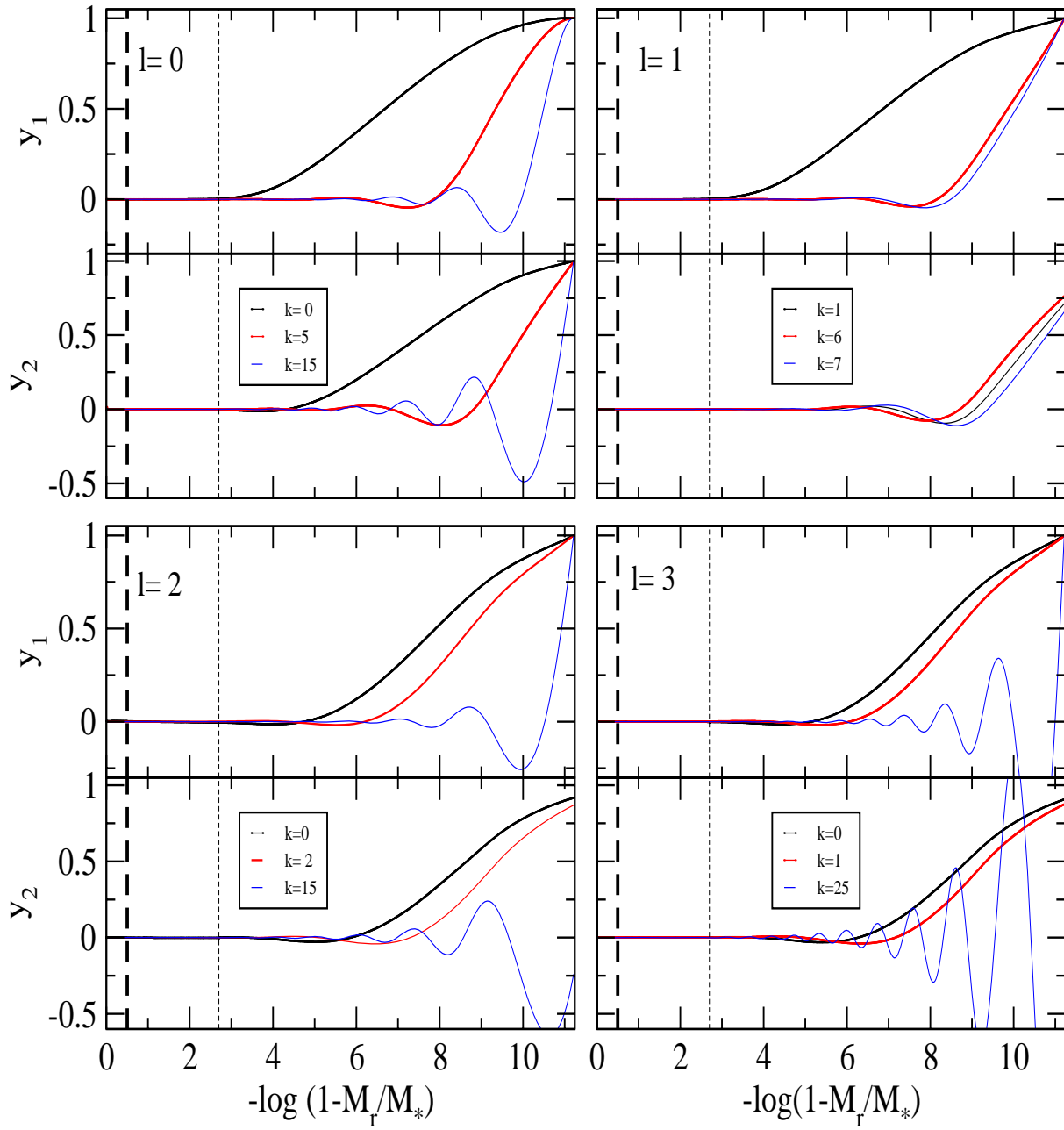


Figura 4.7: Autofunciones y_1 e y_2 correspondientes a tres modos del modelo de referencia de distinto orden radial k y $\ell = 0, 1, 2$ y 3 . También se indica la posición de las interfaces químicas C/O/He (línea de trazos gruesa) y He/H (línea de trazos pequeños).

vez mayores contribuyendo al aumento en la energía cinética que se observa en la figura 4.6 para k grandes.

4.5.3. Regiones de Formación de Períodos de Modos p

Por completitud, es necesario establecer qué regiones de la estrella contribuyen en forma dominante a los períodos o frecuencias de los modos acústicos. El análisis de las autofunciones y la energía cinética muestran que los modos p son principalmente modos de envolura. A partir del gráfico de las frecuencias de Brunt-Väisälä y Lamb (para $\ell=1, 2$ y 3) que se muestra en la figura 3.4 para el modelo de referencia ($M_* = 0.47329 M_\odot$), se observa que la zona de propagación de los modos acústicos está localizada principalmente en la superficie de la estrella. Las energías cinéticas de los modos p ($\log E_{\text{cin}} \sim 40 - 43$) son menores a las correspondientes a los modos g ($\log E_{\text{cin}} \sim 43 - 47$) dado que los primeros oscilan en regiones menos densas que los últimos. Por último las amplitudes relativas de las autofunciones de los modos p son muy pequeñas en el núcleo de la estrella mientras que la oscilación se ve en la envoltura rica en hidrógeno, muy por encima de la interface He/H.

Para tener un resultado definitivo, necesitamos analizar las funciones de peso asociadas a los modos acústicos. Graficamos entonces en la figura 4.8 las funciones de peso correspondientes a los modos p de la figura 4.7, junto con las interfaces de He/H (línea de trazos pequeños) y C/O/He (línea de trazos grueso) en función de $-\log(1 - M_r/M_*)$.

Como ya mencionamos las regiones donde las funciones de peso muestran amplitudes relativas grandes contribuyen significativamente a los períodos o frecuencias de los modos p . A partir de la figura 4.8 podemos ver que las funciones de peso de los modos acústicos estudiados muestran amplitudes relativas mayores en la zona que se encuentra por encima de la interface He/H, es decir, en la envoltura rica en hidrógeno. Por lo tanto, podemos identificar a los modos p como modos de envoltura con períodos sensibles a las regiones más exteriores de la estrella. Algunas contribuciones no despreciables se observan debajo de la transición de He/H. Por consiguiente, el núcleo rico en helio tiene una influencia no despreciable sobre los períodos de los modos p . Esto no es obvio de los perfiles de las autofunciones (figura 4.7), que muestran amplitudes relativas nulas en las regiones por debajo de la interface de He/H, para la escala utilizada.

Para cada valor de ℓ podemos observar distintos comportamientos generales en la funciones de peso en las diferentes regiones de la estrella en el modelo de referencia. A modo de ejemplo, veamos el caso con $\ell=0$.

La función de peso correspondiente al modo con $\ell = 0, k = 0$ muestra una gran amplitud relativa en la envoltura, mientras que la amplitud se va a cero en forma abrupta cuando cruza la interface de He/H. Para el modo con $\ell = 0, k = 15$, el comportamiento de la función de peso posee una amplitud relativa no nula en toda la estrella aunque con mayor amplitud relativa en la región de la envoltura. La amplitud relativa va decreciendo en forma monótona aún después de cruzar la interface de He/H donde se observa un pequeño cambio en el espaciamiento de los máximos locales. Por último, para el modo con $\ell = 0, k = 5$, la función de peso posee una amplitud relativa grande en la región de la envoltura. Esta amplitud relativa decrece a medida que nos acercamos a la interface He/H, pero aún supera la amplitud relativa correspondiente al caso del modo con $\ell = 0, k = 15$. Sin embargo, aunque también se observa un cambio en el espaciamiento de los máximos locales cuando se cruza la interface He/H, la autofunción correspondiente al modo con $\ell = 0$ y $k = 5$ posee una amplitud relativa comparable con el máximo local más pequeño que se observa justo antes de cruzar la interface He/H, es decir, que la amplitud relativa no sigue decreciendo monótonamente.

En todos los casos se observa un cambio abrupto en la pendiente de la curva cuando cruza la interface He/H. En algunos casos se observan picos agudos sobre la misma interface ($\ell = 1, k = 6, \ell = 2, k = 2$ y $\ell = 3, k = 1$). También se observan varios picos bien localizados de

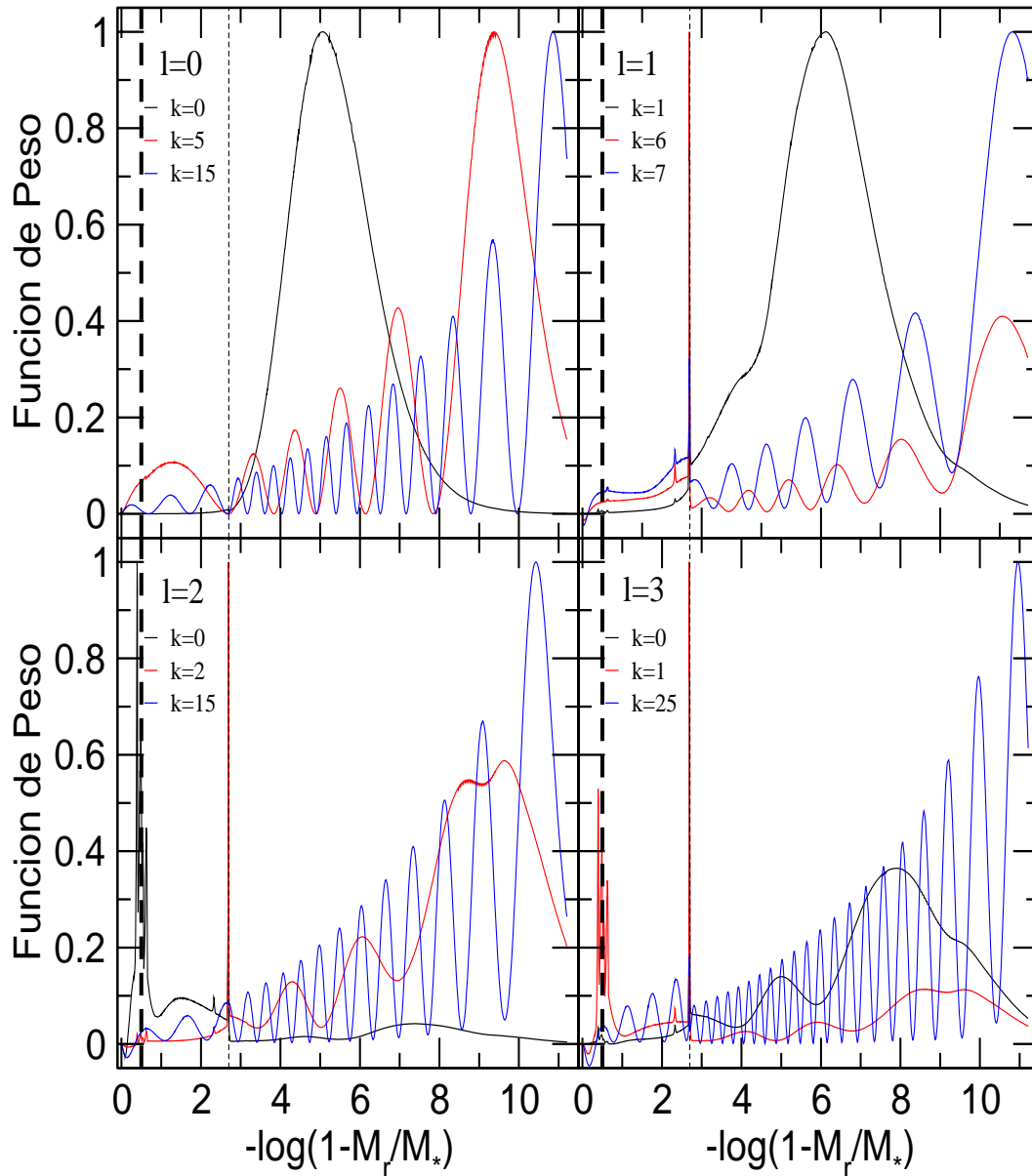


Figura 4.8: Funciones de peso de modos p para tres valores de k distintos con $\ell=0, 1, 2$ y 3 . Las autofunciones de desplazamiento correspondientes a estos modos se pueden ver en la figura 4.7. También se indican las posiciones de las transiciones químicas C/O/He y He/H con líneas de trazos grueso y pequeño, respectivamente.

distinta amplitud relativa en la zona de transición C/O/He para los modos con $\ell = 2$, $k = 0$ y $\ell = 3$, $k = 6$. En el caso con $\ell = 2$ y $k = 0$ podemos ver en la figura 4.8 que amplitud relativa de la función de peso en toda la estrella es muy baja comparada con los modos con $k=2$ y 15 con $\ell=2$, excepto en la región entre las interfaces de He/H y C/O/He donde muestra un pico de gran amplitud, como ya mencionamos, y por debajo de la interface C/O/He donde muestra varios picos muy cercanos con amplitudes relativas considerables. Podemos decir que los períodos correspondientes a este modo están influenciados principalmente por las región del núcleo convectivo. Las contribuciones de la zona del núcleo convectivo central se deben a que los modos p , a diferencia de los modos g , se pueden propagar en las zonas convectivas.

Evolución Temporal

5.1. Evolución Temporal en la Secuencia de Referencia

Para tener una idea general de la evolución de la estructura de las estrellas sdB, elegimos cuatro modelos en diferentes etapas de la secuencia evolutiva caracterizada por una masa de $0.47329M_{\odot}$ en la HB. Los modelos elegidos se indican con círculos en el plano $\log g - \log T_{\text{eff}}$ que se muestra en la figura 5.1.

El primer modelo (modelo 1) se localiza sobre la ZAHB. El segundo y tercer modelo (modelo 2 y 3) se localizan durante la HB antes y después de la etapa del *loop*. Por último, el cuarto modelo (modelo 4) se encuentra en el final de la HB (TAHB) antes de que la estrella entre en la etapa evolutiva posterior. Los parámetros superficiales para los cuatro modelos se pueden ver en la tabla 5.1, donde también se indica la edad medida desde la MS.

La evolución de la composición química de la estrella se puede estudiar a partir de la figura 5.2, donde se muestran las abundancias por masa de las distintas especies químicas dominantes en función de la coordenada masa M_r/M_* para los cuatro modelos considerados.

Para el modelo 1, la abundancia de helio en el núcleo es casi igual a 1. También se observa una pequeña abundancia de carbono de ~ 0.05 en el núcleo. Al comienzo de la HB el helio del núcleo comienza a convertirse en carbono mediante el proceso *triple α* en el cual tres núcleos de helio se combinan para formar un núcleo de carbono. La pequeña contribución en la abundancia de carbono inicial en el núcleo se debe a los efectos de los sub-flashes de helio que ocurren antes de que la estrella se asiente en la ZAHB. Las contribuciones de oxígeno y por supuesto de hidrógeno son nulas en el núcleo.

En el modelo 2 se observa un decrecimiento en la abundancia de helio casi a la mitad en el núcleo convectivo central, aunque se mantiene casi en el mismo valor en la cáscara rica en helio que lo rodea. La abundancia de carbono en la región radiativa rica en helio permanece en el orden de 0.05, mientras que aumenta a casi 0.4 en el núcleo convectivo central, donde también

Tabla 5.1: Parámetros de superficie y edad correspondientes a los modelos utilizados para el estudio de la evolución de la estructura de las estrellas sdB. Estos modelos pertenecen a la secuencia de masa $0.47329M_{\odot}$ en la HB y están indicados en la figura 5.1.

	$T_{\text{eff}}(\text{K})$	$\log g$	Edad (10^6 años)
Modelo 1	27 865	5.686	13412.7
Modelo 2	27 190	5.530	13467.2
Modelo 3	28 672	5.426	13569.4
Modelo 4	33 339	5.641	13583.9

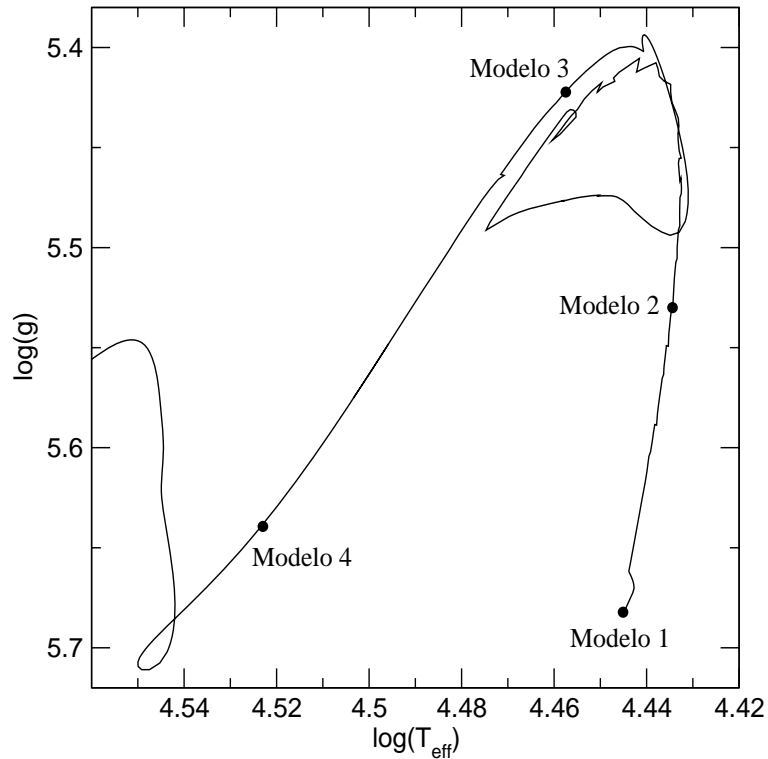


Figura 5.1: Track evolutivo correspondiente a la secuencia con masa $0.47329M_{\odot}$ en la HB en el plano $\log g - \log T_{\text{eff}}$. Sobre el track se indica con círculos la localización de los modelos considerados. Los psámetros de superficie y la edad de cada modelo se muestran en la tabla 5.1.

se observa una abundancia de oxígeno de ~ 0.1 . Esto último se debe al proceso de captura de partículas α , donde un núcleo de carbono captura un núcleo de helio para formar un núcleo de oxígeno mediante la reacción $^{12}\text{C} + \alpha \rightarrow ^{16}\text{O} + \gamma$.

Pasando al modelo 3 podemos ver que la abundancia de oxígeno aumentó considerablemente en el núcleo convectivo. Esto está acompañado de un decrecimiento en las abundancias de carbono y helio. La razón de este comportamiento es el proceso de captura de partículas α que causa una disminución en la abundancia de carbono y helio.

Por último, en el modelo 4 vemos que el aumento en la abundancia de oxígeno continúa junto con el decrecimiento de la abundancia de carbono. La abundancia de helio en el núcleo convectivo es nula. Este modelo se encuentra en el final de la HB, indicada por el agotamiento del helio en el núcleo de las estrellas sdB.

Las abundancias de hidrógeno y helio en la zona de la envoltura permanecen casi constantes en ~ 0.7 y ~ 0.3 respectivamente, durante toda la evolución, mientras que las abundancias de carbono y oxígeno son nulas en estas regiones de la estrella. La transición desde la cáscara radiativa rica en helio y la envoltura de helio e hidrógeno está bien definida en los cuatro modelos elegidos.

Durante la evolución los perfiles químicos en la transición del núcleo convectivo la región radiativa más externa son escalonados, es decir que la transición no está bien definida como en el caso de la transición He/H. Como la zona de transición tiene una extensión no nula se forma una zona semiconvectiva que rodea al núcleo convectivo central. El perfil escalonado de las abundancias químicas en la base de la región radiativa era también responsable de una interface C/O/He menos definida en el modelo de referencia utilizado para el estudio de las pulsaciones en estrellas sdB. También será responsable de una estructura “ruidosa” en la evolución temporal de los períodos de los modos de gravedad que analizaremos en la sección 5.3.2.

En la figura 5.3 se muestran los diagramas de propagación para cada modelo. Los nodos cor-

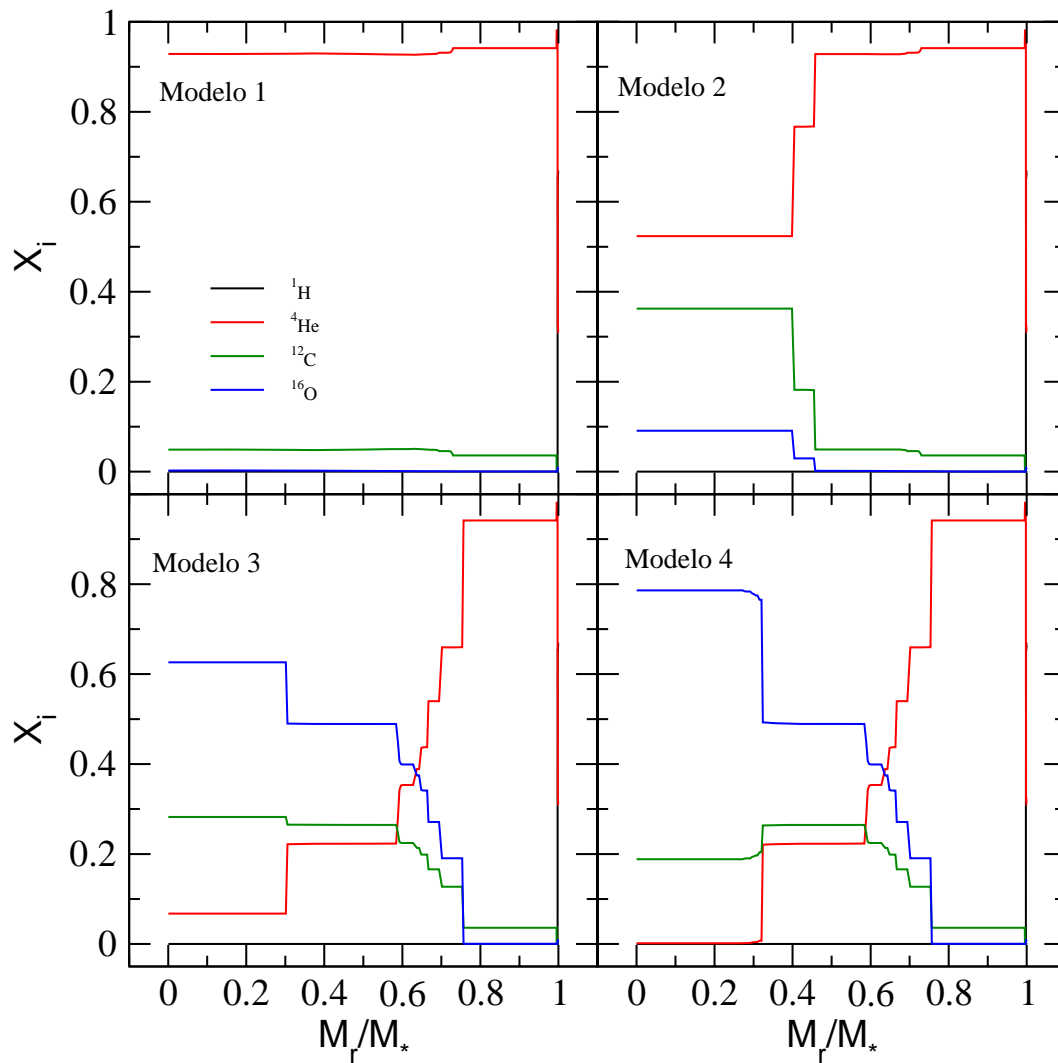


Figura 5.2: Abundancias fraccionales de las especies químicas para los cuatro modelos considerados en función de la coordenada masa M_r/M_* . Las especies químicas dominantes son: hidrógeno (^1H), helio (^4He), carbono (^{12}C) y oxígeno (^{16}O).

responden al modo fundamental y a los modos p y g no radiales con $k < 10$, salvo aclaraciones, y con grado armónico $\ell = 2$.

Los picos muy próximos entre sí en la frecuencia de Brunt-Väisälä correspondientes a la transición C/O/He son el resultado de la estructura escalonada de las abundancias de las especies químicas consideradas que se observa en la figura 5.2 con mayor claridad para los modelos 3 y 4.

En el diagrama de propagación correspondiente al modelo 1 no se observa este conjunto de picos debido a que el perfil de la composición química es sencillo, es decir que no hay una estructura escalonada, sino que tenemos un núcleo compuesto mayoritariamente de helio (ver figura 5.2). Para el modelo 2 la estructura escalonada es aún suficientemente sencilla para poder identificar una transición C/O/He bien localizada alrededor de $M_r/M_* \simeq 0.4$.

Los picos de mayor amplitud en la frecuencia de Brunt-Väisälä corresponden a la transición química He/H, como en el caso del modelo de referencia utilizado para estudiar las propiedades pulsacionales de las estrellas sdB. Este pico está asociado a una transición bien localizada entre la región radiativa rica en helio que rodea el núcleo y la envoltura de hidrógeno y helio.

Cerca del pico principal de la frecuencia de Brunt-Väisälä se observa otro pico de menor amplitud. Este pico está asociado a un crecimiento abrupto de la abundancia de carbono cerca de la transición He/H en la cáscara radiativa rica en helio, donde también se observa una disminución en la abundancia de helio (ver figura 5.2). Este fenómeno ocurre para los cuatro modelos.

A medida que la estrella evoluciona, se observa un cambio en la posición de la interface C/O/He, modificando el tamaño de la zona de propagación de los modos g principalmente. Al modificar las dimensiones de la cavidad resonante se producirá un cambio en los períodos de pulsación para estos modos.

5.2. Evolución Temporal de los Parámetros de Superficie

En la sección siguiente analizaremos el comportamiento de los períodos de los modos de pulsación a medida que los modelos estelares experimentan cambios en su estructura interna a raíz de la evolución con el tiempo. Se sabe que los períodos de pulsación son muy sensibles a las variaciones de los parámetros superficiales. En particular, los modos acústicos son sensibles a las variaciones en la gravedad superficial (se acortan cuando $\log g$ aumenta), aunque son prácticamente insensibles a cambios en la temperatura efectiva. En cambio, los modos de gravedad son sensibles a cambios tanto de la gravedad superficial como de la temperatura efectiva, resultando en un efecto que depende de la combinación de ambos parámetros (ver sección 1.6.2).

Antes de comenzar con el análisis de los modos de pulsación, veamos primero la evolución de los parámetros de superficie, es decir, de la temperatura efectiva, la gravedad superficial y la luminosidad de la estrella para el caso de la secuencia de masa $0.47329M_\odot$ en la HB. En la figura 5.4 se muestra el track evolutivo en el plano $\log g - \log T_{\text{eff}}$ para esta secuencia. Sobre la curva están marcados, con triángulos, los puntos que representan algún cambio significativo en el comportamiento de los parámetros y por lo tanto, en los períodos de pulsación. En la primera parte del track (1→3) se observa un decrecimiento de la gravedad superficial acompañado de un leve decrecimiento de T_{eff} . Físicamente, esta parte del track representa la etapa de expansión relativamente lenta a medida que el modelo se aleja de la ZAEHB. En la segunda parte (3→7) se observa un *loop*, el cual aparece en todas las secuencias evolutivas consideradas en esta tesis. El comportamiento y la existencia en sí misma de los *loops* depende en forma muy sensible del modelado estelar utilizado. Por ejemplo, en el trabajo de Oreiro et al. (2007), se observan tracks evolutivos correspondientes a la EHB que contienen *loops* y otros que no los muestran, mientras que en las secuencias calculadas por Charpinet et al. (2000) no se observan. Por último, en la

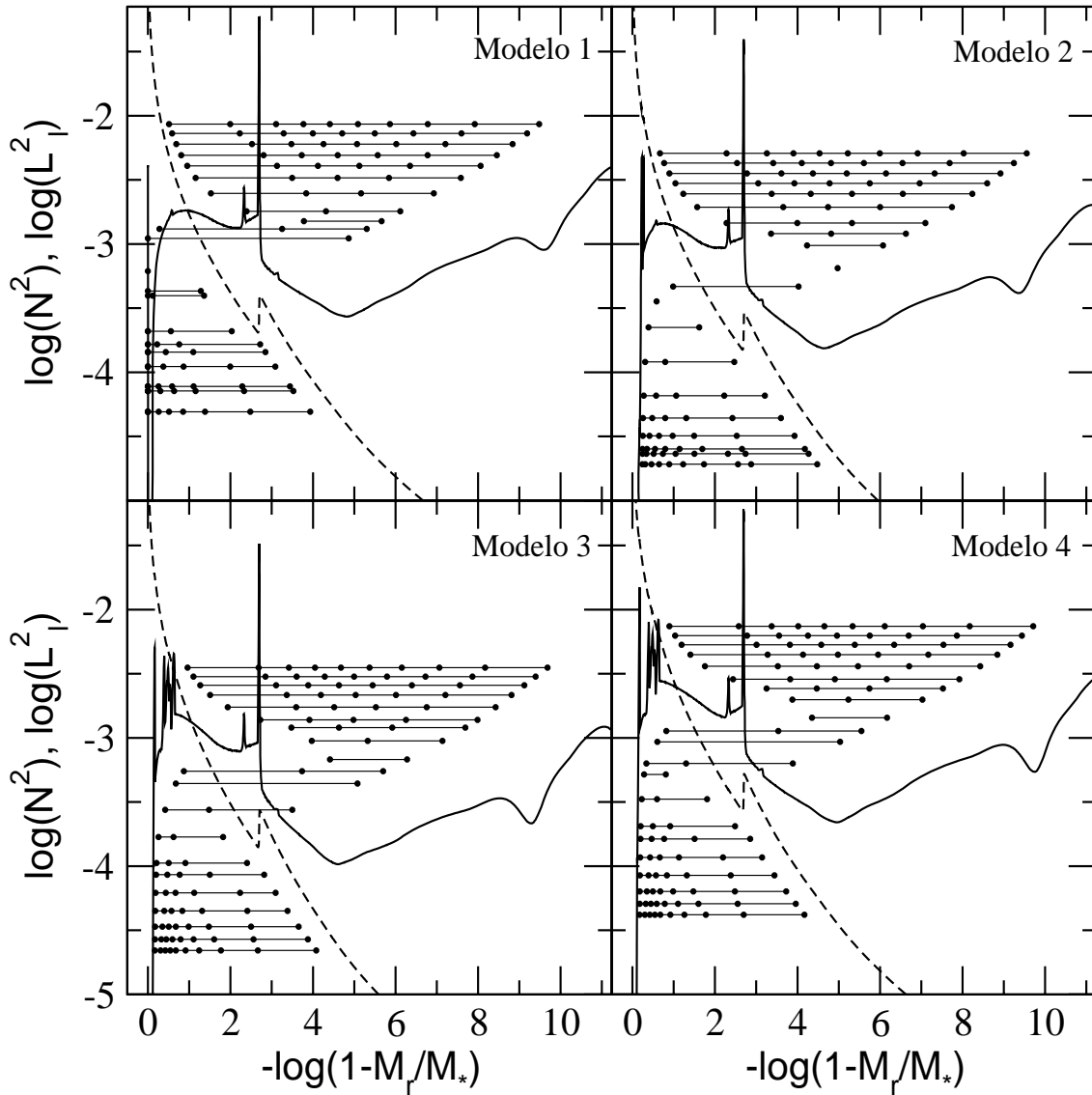


Figura 5.3: Diagramas de propagación correspondientes a los modelos considerados en el análisis de la evolución temporal de la estructura interna de las estrellas sdB. Se muestran el cuadrado de las frecuencias de Brunt-Väisälä (línea sólida) y de Lamb (línea a trazos) para $\ell=2$. Las líneas horizontales corresponden al cuadrado de las autofrecuencias y los puntos negros corresponden a los nodos de la autofunción y_1 para el modo fundamental y a los modos p y g de orden radial $k < 10$.

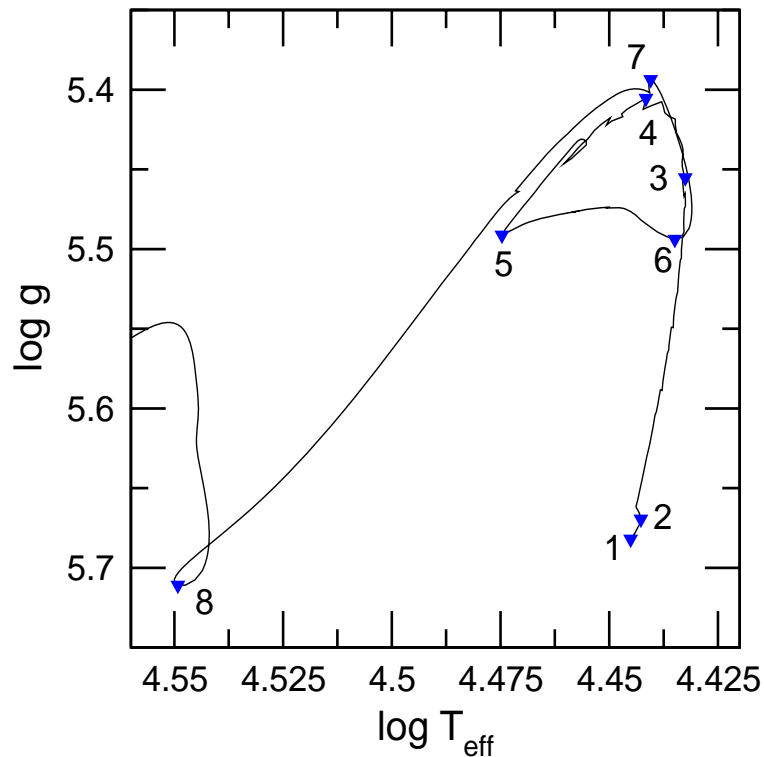


Figura 5.4: Track evolutivo en el plano $\log g$ - $\log T_{\text{eff}}$ para la secuencia con masa $0.47239 M_{\odot}$ en la HB. Los triángulos indican los puntos del track donde se producen cambios relevantes en el comportamiento de los parámetros de superficie.

última parte del track (7 \rightarrow 8) se observa un crecimiento de $\log g$ acompañado de un crecimiento de T_{eff} hasta que el modelo abandona la HB. Esto se corresponde con la etapa de contracción más rápida que sigue cuando el helio, el combustible de la estrella en la fase de HB, comienza a agotarse en las regiones centrales.

En la figura 5.5 se observa la evolución de la gravedad superficial (a), la temperatura efectiva (b) y la luminosidad (c) en función de la edad de la estrella. Al igual que en la figura 5.4, se indican con triángulos numerados los puntos donde se observan cambios en el comportamiento de los parámetros superficiales. De esta manera se vuelve más sencilla la comparación entre las distintas figuras. En la primera parte se observa un decrecimiento monótono y aproximadamente lineal de $\log g$ que indica una etapa de expansión de la estrella a medida que evoluciona luego de abandonar la ZAEHB. Este decrecimiento se detiene en un mínimo de $\log g \sim 5.4$, que se corresponde con el punto más alto del *loop* en el track evolutivo de la figura 5.4 indicado con (4). Para la temperatura efectiva se observa un decrecimiento monótono y con muy poca pendiente comparado con el caso de $\log g$, hasta el punto (3) donde alcanza un mínimo poco definido en ~ 4.43 . Luego comienza a crecer lentamente en una escala temporal corta y alcanza un valor casi igual al inicial ~ 4.44 en (4). Esta primera fase tiene una duración del orden de $\sim 10^8$ años.

En la fase siguiente, a partir de (4), $\log g$ comienza a crecer hasta alcanzar un máximo local en $\log g \sim 5.5$ (5 \rightarrow 6). Seguidamente, la gravedad muestra un rápido decrecimiento que culmina en otro mínimo local, correspondiente al otro punto más alto en el track evolutivo de la figura 5.4 indicado por (7) y ubicado en $\log g \sim 5.4$. En la temperatura efectiva se observa un crecimiento pronunciado y con una escala temporal corta de $\sim 1.5 \times 10^7$ años, hasta que alcanza un máximo en $\log T_{\text{eff}} \sim 4.47$, indicado con (5), donde también se alcanza un máximo en $\log g$. Después, se observa un rápido decrecimiento que termina en un mínimo local de $\log T_{\text{eff}} \sim 4.435$ (6), seguido de un pequeño crecimiento muy rápido hasta 4.440 en (7).

En resumen, desde (4) hasta (5) se tiene un crecimiento tanto de la gravedad superficial

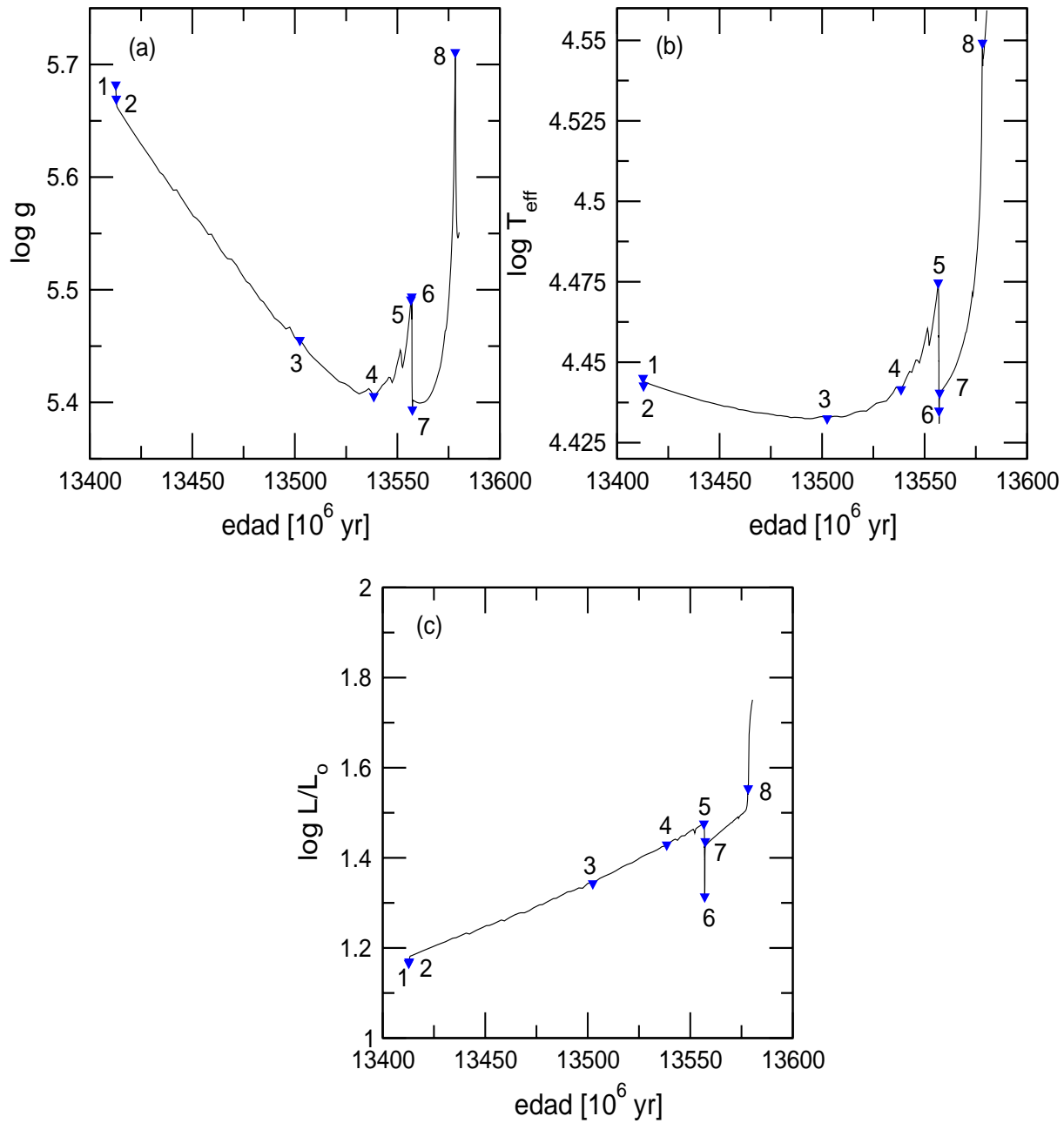


Figura 5.5: Evolución temporal de los parámetros de superficie: $\log g$ (a), $\log T_{\text{eff}}$ (b) y $\log(L/L_{\odot})$ (c). Los triángulos indican los puntos del track donde se producen cambios significativos en el comportamiento de los parámetros de superficie en correspondencia con la figura 5.4.

como de la temperatura efectiva, seguido de un crecimiento considerable de ambas en una escala de tiempo muy corta desde (5) hasta (7). Esta segunda fase, desde (4) hasta (7) tiene una duración de aproximadamente 2×10^7 años.

Desde (3) hasta (6) se puede ver el efecto del *loop* sobre la gravedad superficial y la temperatura efectiva del modelo, que ocurre en una escala temporal de $\sim 5.4 \times 10^7$ años.

En la última parte de la evolución de la gravedad superficial (ver figura 5.5a) se observa un crecimiento casi exponencial hasta un máximo localizado en $\log g \sim 5.7$, indicado con (8), correspondiente al momento en que la estrella abandona la HB. En la figura 5.5b también tenemos un crecimiento muy rápido de $\log T_{\text{eff}}$ hasta que alcanza el valor máximo de 4.55 también en (8). Esta etapa corresponde a la etapa de rápida contracción donde tanto $\log g$ como $\log T_{\text{eff}}$ crecen como consecuencia de la rarificación del combustible termonuclear (helio) en el centro, que produce una disminución en la eficiencia de la producción de energía. Este tramo en la evolución se desarrolla en una escala temporal del orden de 2×10^7 años.

Es interesante notar que, si no apareciera un *loop* en la secuencia evolutiva, tanto $\log g$ como $\log T_{\text{eff}}$ tendrían un comportamiento más regular, con una primera etapa caracterizada por un decrecimiento monótono, con mayor pendiente en el caso de $\log g$, seguido de un crecimiento abrupto de forma exponencial. Estas dos etapas se corresponden a las etapas de expansión lenta y contracción rápida antes mencionadas. En las secuencias consideradas por Charpinet et al. (2000), los *loops* no aparecen y por consiguiente el comportamiento de los parámetros superficiales están dominados por estas dos etapas físicamente bien definidas.

Las variaciones en la luminosidad superficial no tienen un impacto dominante en la evolución de los períodos. Sin embargo, por completitud, consideraremos el comportamiento de este parámetro en función de la edad, que se muestra en la figura 5.5c. El comportamiento de la luminosidad superficial es más simple que para el caso de la gravedad superficial y la temperatura efectiva. Primero se observa un crecimiento monótono, prácticamente lineal, en una escala temporal del orden de 1.4×10^8 años. Este tramo en la evolución de la luminosidad, desde (1) hasta (5), se corresponde con el tramo en la secuencia evolutiva que va desde la ZAEHB hasta que llega al punto más bajo por primera vez en el *loop* (ver figura 5.4). Luego se observa un decrecimiento hasta $\log L/L_{\odot} \sim 1.3$, ubicado en (6), seguido de un aumento súbito hasta 1.4 en (7), que llega un poco más abajo que en (5). Por último se observa un crecimiento con dos tramos de distinta pendiente hasta que alcanza el máximo en (8) con $\log L/L_{\odot} \sim 1.55$. Como vemos, la presencia del *loop* también vuelve más complejo el comportamiento de $\log L/L_{\odot}$ con la edad.

5.3. Evolución Temporal de los Períodos de Pulsación

Para estudiar la evolución temporal de los períodos de pulsación, utilizamos la secuencia evolutiva caracterizada por una masa de $0.47329 M_{\odot}$ en la HB, compuesta de unos 400 modelos. Para dichos modelos, que van desde la ZAEHB hasta la TAEHB, se calcularon los espectros de períodos de pulsaciones para modos con grado armónico $\ell=0, 1, 2$ y 3 . Los resultados se muestran en la figura 5.6, donde graficamos los períodos de los modos de pulsación (seg) en función de la edad de la estrella desde la ZAMS (en unidades de 10^6 años) desde que alcanza la ZAEHB hasta que abandona la HB.

Los modos p y g de bajo orden radial y el modo f están señalados al comienzo de la evolución en la ZAEHB, a la izquierda de las curvas. Con círculos se indican los lugares donde ocurre el fenómeno de *avoided crossing* entre los modos f , p y g de bajo orden radial, que se observan en los casos con grado armónico $\ell > 0$.

El aspecto más importante de los resultados que se observan en la figura 5.6, es el cambio en los valores de los períodos de pulsación debido al cambio en la estructura interna de la estrella cuando ésta evoluciona. Para las estrellas sdB, el principal proceso que gobierna la evolución es

la conversión de helio en carbono y oxígeno en las regiones centrales de la estrella. Este proceso va modificando lentamente la condición de equilibrio hidrostático. Como resultado se obtienen variaciones seculares lentas en la temperatura efectiva y la gravedad superficial, llevando a un camino evolutivo como se muestra en la figura 5.4. Debido a que los valores de los períodos de pulsación dependen de los parámetros superficiales y de la estructura interna de la estrella, se espera que estos cambien a medida que la estrella evoluciona.

La naturaleza de los modos p y g es diferente, y esto se mantiene a lo largo de la secuencia evolutiva. Esto se debe a que, como mostramos en el capítulo anterior, los modos p y g se propagan en distintas regiones de las estrellas sdB. Debido a estas diferencias, analizaremos el comportamiento temporal de los períodos de los modos acústicos y de gravedad por separado.

5.3.1. Evolución Temporal de los Períodos de Pulsación de Modos p

Para los modos de presión, la evolución temporal de los períodos se puede dividir en tres grandes fases. Dentro de cada una se encuentran algunas variaciones en el comportamiento general que trataremos explícitamente.

Como se observa en la figura 5.6, la evolución comienza con un crecimiento monótono en el valor de los períodos hasta un máximo amplio alrededor de los 1.35×10^{10} años. Esta etapa se identifica con la fase de decrecimiento de la gravedad superficial que se observa en la figura 5.5a, donde podemos ver que el máximo en los períodos coincide con el mínimo local en $\log g$, ambos indicados por (4). Sin embargo, como podemos ver en la figura 5.5b, el comportamiento de $\log T_{\text{eff}}$ no es monótono, sino que primero decrece ($1 \rightarrow 3$) y luego crece ($3 \rightarrow 4$), aunque en menor amplitud y pendiente que en el caso de $\log g$. Debido a que el comportamiento de los períodos es monótono y regular en toda esta fase ($1 \rightarrow 4$), podemos concluir que no son afectados notablemente por las variaciones en la T_{eff} y que el efecto dominante es debido a las variaciones en $\log g$. En resumen, los valores de los períodos aumentan cuando $\log g$ disminuye. Este comportamiento general se observa con mayor claridad para los modos con grado armónico $\ell=0$, ya que en este caso no se producen los *avoided crossing* entre los períodos de modos con bajo orden radial; como se observa, por ejemplo para el caso con $\ell=2$, entre f y g_1 primero y entre f y p_1 más adelante. Para $\ell>0$ el comportamiento general es respetado por los modos de presión de alto orden radial.

La segunda fase está caracterizada por un decrecimiento más rápido de los períodos que culmina en un mínimo bien definido en forma de escalón en (5) para todo orden radial k . Luego el valor de los períodos aumenta abruptamente hasta un máximo más amplio. En esta etapa la gravedad superficial crece en un intervalo de tiempo del orden de 1.8×10^7 años, donde los valores de los períodos decrecen; y luego disminuye en forma súbita, causando un aumento abrupto en los períodos. Entonces podemos decir que la variación en los períodos de los modos de presión es inversa a la variación en $\log g$, es decir que, cuando $\log g$ aumenta, los períodos de los modos p disminuyen y viceversa.

Notemos que antes de alcanzar el mínimo en (5) se observa un pico de baja amplitud. Su ancho y altura no son los mismos para todo k o ℓ , pero se observa en todas las curvas de la figura 5.6, incluso para los modos de gravedad. Este pico se corresponde con un análogo en $\log g$ como se observa en la figura 5.5a entre los puntos (4) y (5) a una edad de aproximadamente 1.355×10^{10} años. Si miramos el tramo (4 \rightarrow 5) en la figura 5.4 encontramos un *loop* secundario dentro del *loop* que va desde (3) hasta (6) que explica esta variación en los parámetros.

Por último, luego de máximo en (7) los períodos decrecen hasta alcanzar nuevamente un mínimo pronunciado indicado por (8). Este decrecimiento se corresponde con un aumento exponencial en $\log g$ hasta que la estrella abandona la HB en (8), lo cual indica nuevamente una dependencia inversa de los períodos con la gravedad superficial.

En las últimas dos fases el comportamiento de $\log T_{\text{eff}}$ es muy similar al observado en $\log g$, lo que nos llevaría a pensar que los períodos de los modos de presión aumentan cuando T_{eff}

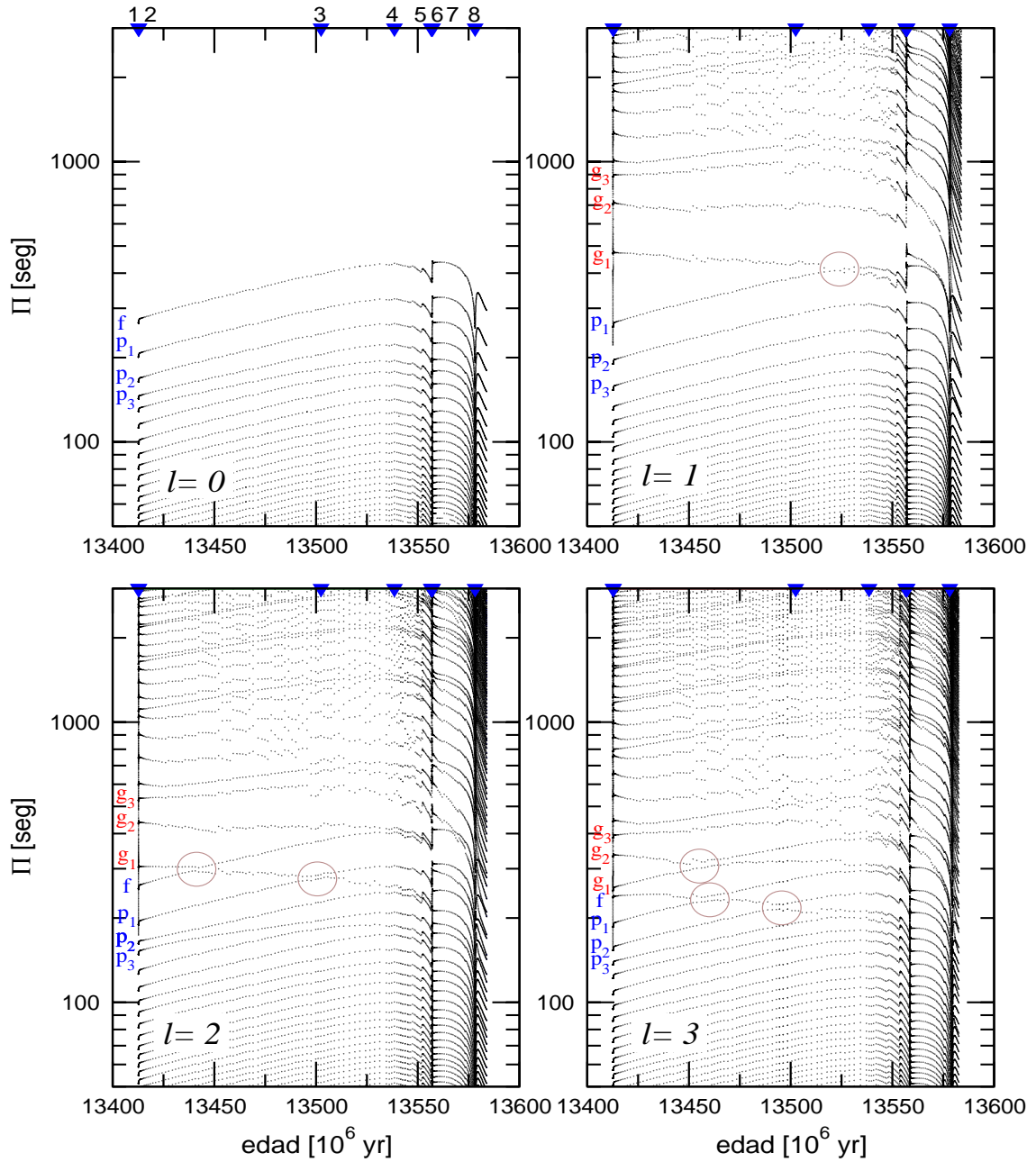


Figura 5.6: Evolución temporal de los períodos de pulsación correspondientes a los modos fundamental, de presión y de gravedad, en función de la edad (en unidades de 10^6 años), para la secuencia de referencia. Con triángulos numerados se indican los momentos en los cuales se producen cambios significativos en los parámetros de superficie, al igual que en las figuras 5.4 y 5.5. Con círculos se indican los sucesos de *avoided crossing*.

decrece y disminuyen cuando T_{eff} crece. Esta suposición se debilita por la falta de correlación entre el comportamiento de los períodos de los modos de presión y $\log T_{\text{eff}}$ en la primera fase, como ya mencionamos. Por lo tanto, consideramos que los períodos de los modos p no son sensibles a los cambios en la temperatura efectiva.

En su trabajo, Charpinet et al. (2002b) identifica solamente dos fases correspondientes con la primera y la tercera fase que describimos anteriormente. La fase restante corresponde a la etapa del *loop* en nuestra secuencia evolutiva. Como ya mencionamos, este *loop* no aparece en las secuencias calculadas por Charpinet et al. (2000), lo cual explica las diferencias entre sus resultados y los nuestros. Sin embargo, la correlación entre los períodos de los modos de presión y la gravedad superficial y la temperatura efectiva se corresponde con los resultados de Charpinet et al. (2002a).

5.3.2. Evolución Temporal de los Períodos de Pulsación de Modos g

La evolución de los períodos de los modos de gravedad no difiere notablemente de aquella correspondiente a los modos de presión, como se puede ver de la figura 5.6. Sin embargo, el análisis se dificulta debido al comportamiento ruidoso de la evolución de los períodos. Esta “estructura” se debe a cambios en la extensión del núcleo convectivo durante la evolución en la EHB, es decir a los cambios en la forma precisa de la interface C/O/He. Los modos de gravedad, al oscilar tan cerca del núcleo, son fuertemente afectados por estas variaciones, en particular los modos confinados. Este “ruido” es resultado de las limitaciones numéricas que aparecen al modelar esta región de la estrella y por lo tanto, suponemos que, en estrellas reales no debería aparecer. Para minimizar los efectos de las variaciones rápidas en la extensión del núcleo convectivo sobre la evolución de los períodos, calculamos la evolución temporal de los mismos anulando la contribución del término B de Ledoux en la región central de la estrella. Los resultados se muestran en la figura 5.7 para $\ell=2$. A partir de estos resultados se puede ver que el comportamiento general de la evolución de los períodos de los modos de gravedad se puede explicar como una sucesión de tres fases, como en el caso de los modos de presión. Sin embargo se observan también ciertas diferencias, en particular en los modos de bajo orden radial. Cabe aclarar que, a pesar de que se anuló el término de Ledoux en la región central, los gradientes en la densidad se mantienen, dando lugar a las pequeñas variaciones que se observan en los períodos de los modos de alto orden radial.

En la primera fase de la evolución en la EHB ($1 \rightarrow 4$), durante la cual $\log g$ decrece lentamente mientras T_{eff} inicialmente también decrece ($1 \rightarrow 3$) pero con menos pendiente, se observa un crecimiento sistemático de los períodos de los modos g hasta que se alcanza un máximo extendido en (4), en acuerdo con los resultados obtenidos por Charpinet et al. (2002a). Este comportamiento es exhibido por los períodos de los modos de alto orden radial y, como ya mencionamos, por los períodos de los modos de presión también de alto orden radial. Sin embargo, en la figura 5.6 se muestran ejemplos de modos cuyos períodos permanecen aproximadamente constantes durante esta etapa, como por ejemplo g_2 con $\ell=1$, o que decrecen, como g_1 también con $\ell = 1$. En la figura 5.7 también se observa este comportamiento para los modos f y g_1 . Estos resultados sugieren la existencia de otros efectos adicionales que compiten contra el decrecimiento de $\log g$ y T_{eff} . El efecto adicional más importante podría deberse a la formación de la discontinuidad química entre el núcleo convectivo, enriquecido en carbono y oxígeno, y la cáscara de helio que lo rodea (C/O/He), debido a que los modos g oscilan en las regiones internas de las estrellas sdB. Como vimos en la sección 5.1, la transición química C/O/He, inicialmente ausente en los modelos de la ZAEHB, se desarrolla y se vuelve más localizada a medida que el helio se transforma progresivamente en carbono, que luego se combina con el helio restante para formar oxígeno, en las regiones centrales. En la sección 4.4.4 mostramos que la zona de transición C/O/He contribuye significativamente a la formación de los períodos de los modos g , dando como resultado un decrecimiento sistemático de los mismos. Por consiguiente,

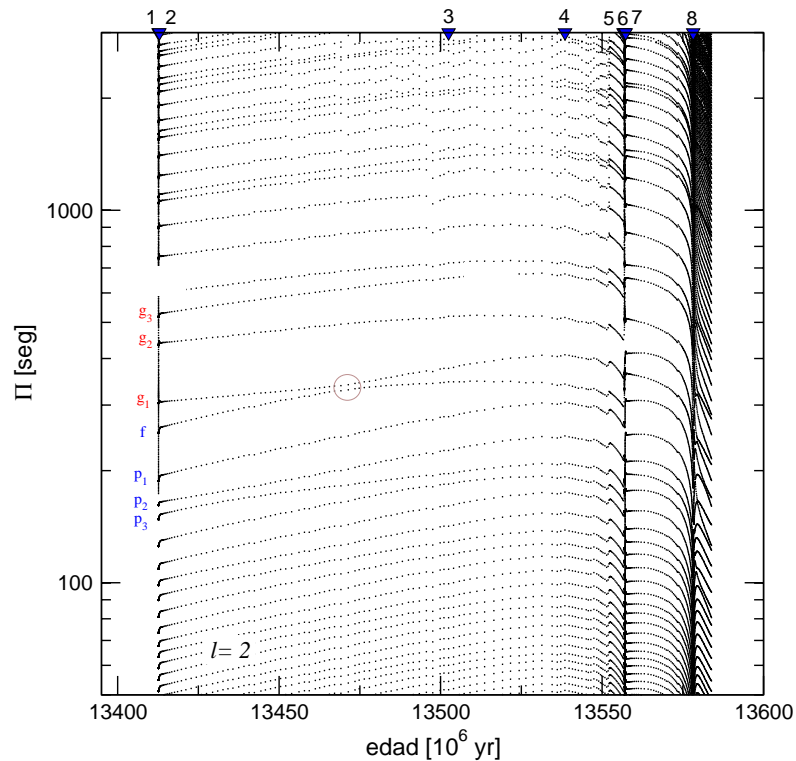


Figura 5.7: Evolución temporal de los períodos de pulsación correspondientes a los modos fundamental, de presión y de gravedad, en función de la edad (en unidades de 10^6 años) con $\ell=2$, para el caso donde se anula B en las regiones centrales de la estrella. Con triángulos numerados se indican los momentos en los cuales se producen cambios en los parámetros de superficie.

la creación, y posterior crecimiento, de la zona de transición C/O/He a medida que la estrella evoluciona tiende a reducir los períodos de los modos g . Este efecto opera en dirección opuesta al asociado con el decrecimiento de $\log g$ y T_{eff} en la primera fase de la evolución en la EHB.

La falta de crecimiento en los períodos de los modos g de bajo orden radial en esta fase de evolución, da lugar a los fenómenos de *avoided crossing* con el modo fundamental, que se observan tanto en la figura 5.6 como en la figura 5.7.

Notar que, contrariamente a lo esperado, los cambios en la T_{eff} no producen un efecto notable en el comportamiento temporal de los períodos de los modos g . En la etapa evolutiva que se encuentra entre los puntos (3) y (4) se observa un aumento en la temperatura efectiva (ver figura 5.5b) lo cual debería inducir un decrecimiento en los valores de los períodos. Este decrecimiento no se observa en la figura 5.7 para los modos de alto orden radial, donde los períodos aumentan en forma monótona hasta (4), siguiendo con el comportamiento inicial que se observa en la zona entre los puntos (1) y (3). Por lo tanto, la influencia de los cambios en la T_{eff} no es apreciable. Esto podría deberse a que la dependencia de los períodos con los cambios en $\log g$ dominan sobre aquellos que puedan llegar a generar los cambios en T_{eff} , dado que la variación en el valor de T_{eff} en el tramo (3 \rightarrow 4) es pequeña comparada con la variación en $\log g$ para el mismo tramo.

La segunda fase comienza con un decrecimiento en el valor de los períodos que se detiene cuando alcanza el mínimo bien definido en (5). Luego, aumenta rápidamente, en respuesta al súbito decrecimiento de $\log g$ y $\log T_{\text{eff}}$ (ver figura 5.5 a y b). Esta etapa corresponde a la evolución en el *loop* que se observa en la figura 5.4. Una diferencia importante con los períodos de los modos de presión es que el pico que se observa justo antes del punto indicado con (5), a una edad de aproximadamente 1.355×10^{10} años, posee la misma amplitud o mayor que el máximo resultante del aumento instantáneo en (5-6-7).

La última fase correspondiente al tramo entre los puntos (7) y (8), consiste en un decrecimiento sistemático del valor de los períodos de los modos g hasta el mínimo correspondiente al punto (8). La tasa de decrecimiento de los períodos de los modos g es mayor que la exhibida por los modos p . Para los modos con menor orden radial, el decrecimiento es irregular pero con mayor pendiente que en el caso de k grandes. En esta etapa tanto $\log g$ como $\log T_{\text{eff}}$ muestran un crecimiento exponencial, correspondiente a la etapa de rápida contracción final de la estrella antes de que abandone la EHB.

5.4. Fenómenos de *Mode bumping* y *Avoided crossing*

Durante la evolución de las estrellas sdB, el comportamiento de las pulsaciones no radiales se ve afectado por colisiones entre modos que complican la interpretación del comportamiento temporal de los períodos. Un ejemplo son los fenómenos denominados *mode bumping* y *avoided crossing* (ver sección 1.6.2), que ocurren cuando los períodos de dos modos consecutivos alcanzan valores cercanos entre sí. Para evitar una colisión los modos se repelen intercambiando propiedades intrínsecas. En consecuencia, los períodos de los modos involucrados muestran un carácter mixto que favorece alternativamente un comportamiento de modo p o g durante la evolución. En la figura 5.6 se observan varios ejemplos de *avoided crossings* los cuales se indican mediante círculos.

El decrecimiento de los períodos de los modos de gravedad en la primera fase de la evolución está inducido por la formación y crecimiento de la interface C/O/He entre el núcleo convectivo y la cáscara rica en helio que lo rodea. En particular, el hecho de que los períodos de los modos g de bajo orden radial no aumenten en la primera etapa de evolución, da lugar a los fenómenos de *avoided crossing* con el modo fundamental, por ejemplo, para el caso con $\ell=2$ entre los modos fundamental y el g_1 . También se observan colisiones entre modos g de bajo orden radial, como en el caso con $\ell=3$ entre los modos g_1 y g_2 o en el caso con $\ell=1$ entre los modos p_1 y g_1 . Recordemos que para el grado armónico $\ell=1$ no existe el modo fundamental ($k=0$).

Durante su evolución, un modo puede sufrir varias colisiones como se observa en la figura 5.6 en el caso con $\ell=2$ entre los modos fundamental y g_1 primero y luego entre los modos fundamental y p_1 . En este caso se observa con claridad como el modo fundamental modifica su comportamiento después de cada colisión. Los modos se repelen entre sí modificando la dirección de cambio que traían antes de la colisión. Este tipo de colisiones dobles también se observa en el caso con $\ell=3$. Aquí, el modo p_1 colisiona primero con el modo fundamental y luego con el modo p_2 .

En la última fase de la evolución los períodos de los modos g decrecen con mayor pendiente que los períodos correspondientes a los modos de presión. Para los modos con menor orden radial, el decrecimiento es irregular pero con mayor pendiente que en el caso de k grandes. Este efecto induce la aparición de *avoided crossing* para modos g de bajo orden radial entre sí y con el modo fundamental, en las últimas etapas de la evolución en la EHB. Por ejemplo, en la figura 5.6, se observan *avoided crossing* entre los modos g_1 y g_2 con $\ell=1$ y los modos g_2 y g_3 con $\ell=2$.

Como vimos en la figura 5.6, los fenómenos de *mode bumping* y *avoided crossing* se dan entre modos de bajo orden radial, en escalas temporales largas. Además de los casos de *avoided crossing* que citamos antes, también se observa este fenómeno a escalas temporales cortas, como se muestra en las figuras 5.8, 5.9 y 5.10. Estas figuras son ampliaciones en distintos intervalos de edad donde el comportamiento de la evolución de los períodos de pulsación no se resuelve lo suficiente en la figura 5.6. La figura 5.8 corresponde al principio de la evolución alrededor del punto indicado con (1 \rightarrow 2), donde se muestra un pequeño crecimiento inicial en los modos p , en la figura 5.6. La figura 5.9 corresponde al intervalo temporal alrededor del punto indicado por (5-6-7) en la figura 5.6 donde se encuentra el primer mínimo en forma de escalón.

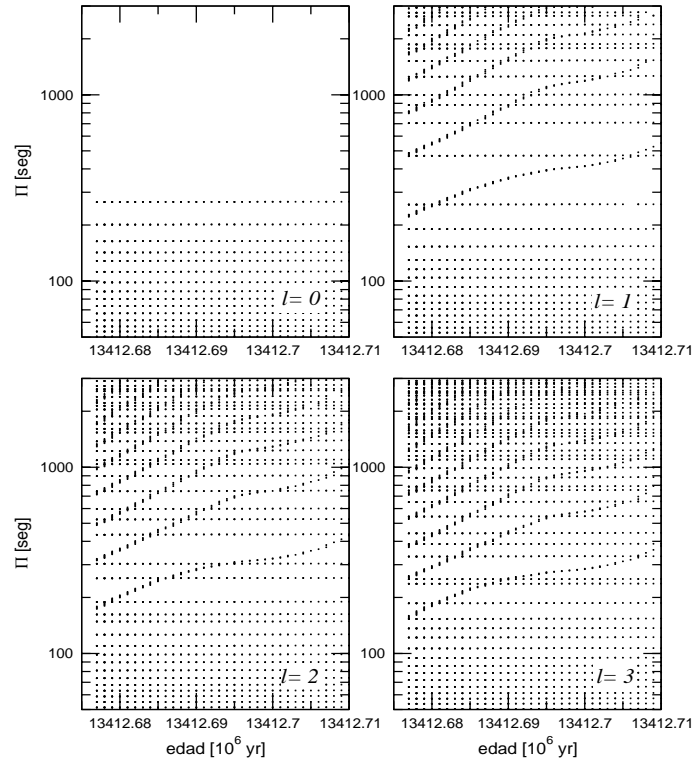


Figura 5.8: Evolución temporal de los períodos de pulsación (seg) correspondientes a los modos fundamental, de presión y de gravedad, en función de la edad (en unidades de 10^6 años), para la secuencia en el intervalo entre (1) y (2) de la figura 5.6.

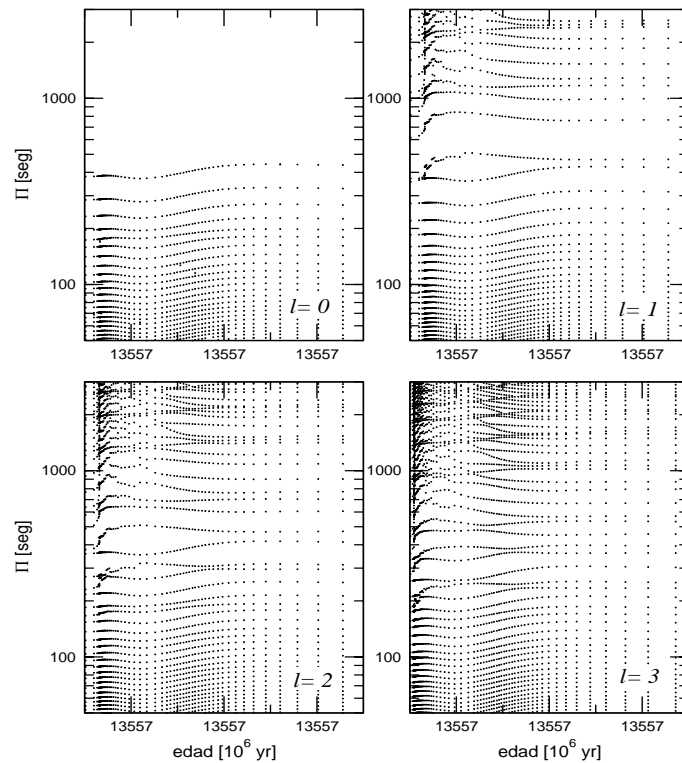


Figura 5.9: Evolución temporal de los períodos de pulsación (seg) correspondientes a los modos fundamental, de presión y de gravedad, en función de la edad (en unidades de 10^6 años), para la secuencia en el intervalo entre (5) y (7) de la figura 5.6.

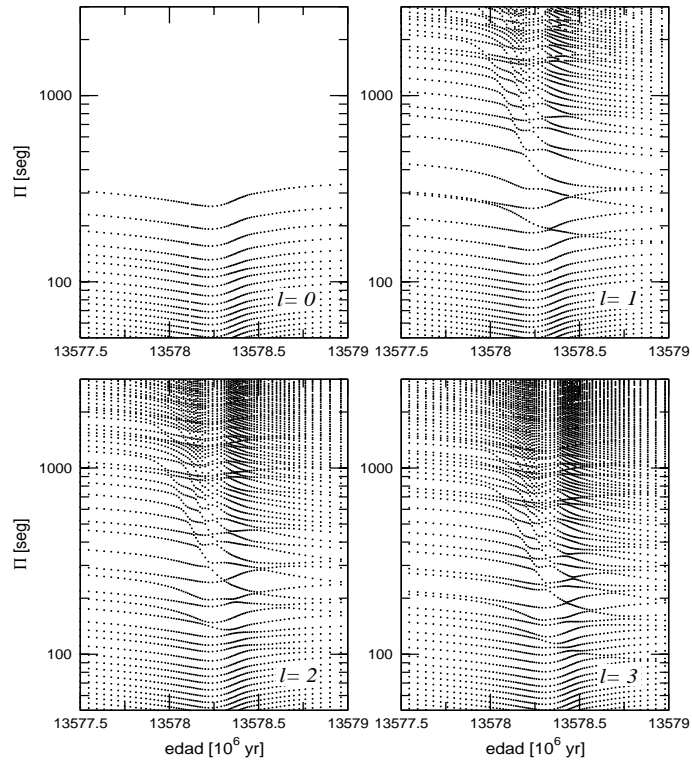


Figura 5.10: Evolución temporal de los períodos de pulsación (seg) correspondientes a los modos fundamental, de presión y de gravedad, en función de la edad (en unidades de 10^6 años), para la secuencia en el intervalo posterior al punto indicado por (8) de la figura 5.6.

Por último, la figura 5.10 corresponde al final del intervalo temporal considerado, en la etapa posterior al momento indicado por (8).

A diferencia de la figura 5.6, se observan fenómenos de *mode bumping* y *avoided crossing* en escalas temporales muy cortas, incluso para los modos con alto orden radial.

Estrellas sub-enanas B Pulsantes: Observaciones

Las estrellas sdB son la contraparte de campo Galáctico de las estrellas de la EHB de los cúmulos globulares. Son pulsadores multimodales que muestran entre 2 y 50 modos de pulsación, en los dominios de los modos radiales y no-radiales de presión y gravedad (Reed et al. 2000). En este breve capítulo describiremos muy rápidamente las propiedades de grupo de las estrellas sub-enanas B pulsantes observadas hasta el momento. Un análisis detallado está mas alla del alcance de esta Tesis.

En las tablas 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4 se muestra una lista de las estrellas sdB variables observadas hasta diciembre de 2006. Cabe destacar que no existe una compilación completa publicada de estrellas sdB pulsantes. Las tablas presentadas aquí fueron elaboradas luego de una exhaustiva búsqueda a través de la bibliografía de estrellas sdB. En las tablas 6.1 y 6.2 se encuentran las estrellas tipo EC 14026, que pulsan en modos de presión en un rango de períodos que va desde los 80 hasta los 600 segundos¹. En la tabla 6.4 se encuentran las estrellas PG 1716. Estas estrellas pulsan en modos de gravedad en un rango de períodos entre 0.8 y 1.6 horas. Por último, en la tabla 6.3, se muestra un lista de las estrellas sdB variables llamadas híbridas. Estas estrellas pulsan tanto en modos de presión como de gravedad. Además de las sdB híbridas se encuentran las estrellas sdO, que son estrellas evolucionadas cuyas progenitoras son las estrellas sdB; las estrellas sdO pulsan en modos p . También se incluyen las estrellas *He-rich*, que son estrellas sdB variables donde la abundancia de helio en la atmósfera está realzada; estas estrellas pulsan en modos g .

En la figura 6.1 graficamos los intervalos de períodos de pulsación en función de $\log g$ y $T_{\text{eff}}/1000K$ para las distintas clases de estrellas observadas. Las líneas azules corresponden a los períodos de la estrellas EC 14026, con líneas verdes se muestran los períodos de las estrellas PG 1716 y por último, con líneas rojas, se graficaron los períodos correspondientes a las estrellas tipo híbridas.

Las estrellas tipo PG 1716 poseen los períodos más largos ya que pulsan en modos de gravedad. A partir de la figura 6.1 observamos que estas estrellas ocupan el dominio de gravedades superficiales bajas y son también las más frías, formando el límite rojo de la banda de inestabilidad de las estrellas sdB variables. Por otro lado, las estrellas EC 14026, que pulsan en modos de presión, se agrupan en la región de altas temperaturas efectivas, en el límite azul de la banda de inestabilidad. También poseen, en general, gravedades superficiales más altas que las estrellas PG 1716; sin embargo, existen algunos ejemplos de estrellas EC 14026 de baja gravedad superficial, como se observa en el panel izquierdo de la figura 6.1. Por último, las estrellas denominadas híbridas ocupan la región de inestabilidad media cuando consideramos la dependencia con T_{eff} . Respecto de $\log g$, las estrellas híbridas se ubican en los dominios de bajas gravedades superficiales.

A partir de este análisis podemos suponer una tendencia global entre los períodos de pul-

¹ver sección 1.6.2

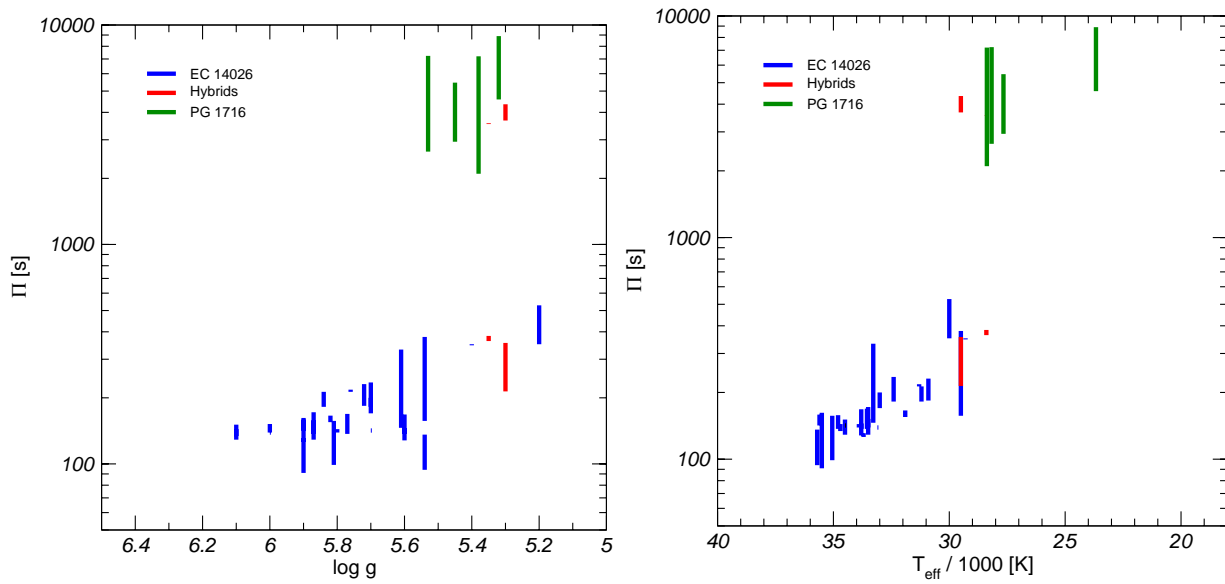


Figura 6.1: Intervalos de períodos observados en función de $\log g$ (panel izquierdo) y en función de T_{eff} (panel derecho) para las estrellas sdB variables observadas de tipo EC 14026 (azul), PG 1716 (verde) e híbridas (roja).

sación de las distintas clases de estrellas con la variación de $\log g$ y T_{eff} . En los dominios de bajas gravedades superficiales y bajas temperaturas efectivas los períodos de pulsación se vuelven más largos, y se identifican en general con modos de gravedad (estrellas PG 1716), mientras que cuando nos movemos hacia las regiones de alta T_{eff} o alta $\log g$, los períodos se acortan y se identifican con modos acústicos (estrellas EC 14026). Entonces los períodos aumentan cuando tanto la gravedad superficial como la temperatura efectiva decrecen, y viceversa.

Tabla 6.1: Compilación de las estrellas EC 14026 conocidas.

	Nombre	T_{eff}	$\log g$	$\Delta\Pi$	Referencia
1	EC 14026 – 2647	34 700	6.10	134 – 144	Kilkenny et al. (1997)
2	PB 8783	35 700	5.54	120 – 134	Koen et al. (1997)
		94 – 136	O'Donoghue et al. (1998b)
3	EC 10228 – 0905	33 500	6.00	139 – 152	Stobie et al. (1997)
4	EC 20117 – 4014	34 800	5.87	137 – 159	O'Donoghue et al. (1997)
		34 800	...	137 – 158	Randall et al. (2006)
5	PG 1047 + 003	34 370	5.70	104 – 162	Billères et al. (1997)
		35 500	5.90	104 – 162	O'Donoghue et al. (1998a)
		91 – 162	Charpinet et al. (2001)
6	PG 1336 – 018	33 000	5.70	141 – 184	Kilkenny et al. (1998)
		170 – 200	Kilkenny et al. (2003)
7	KPD 2109 + 4401	31 200	5.84	182 – 198	Billères et al. (1997)
		182 – 198	Koen (1998)
		104 – 213	Charpinet et al. (2001)
		182 – 213	Zhou et al. (2006)
		31 380	5.65	...	For et al. (2006)
8	PG 1605 + 072	32 100	5.25	350 – 539	Koen et al. (1998a)
		295 – 573	Kilkenny et al. (1999)
		30 000	5.20	290 – 601	Charpinet et al. (2001)
		351 – 528	O'Toole et al. (2005)
		32 520	5.27	...	For et al. (2006)
9	Feige 48	28 900	5.45	340 – 380	Koen et al. (1998b)
		29 500	5.50	...	Heber et al. (2000)
		258 – 376	Charpinet et al. (2001)
		344 – 379	Reed et al. (2004)
		29 580	5.48	157 – 379	Charpinet et al. (2005b)
		29 500	5.54	...	O'Toole & Heber (2006)
10	PG 1219 + 534	32 800	5.76	128 – 149	Koen et al. (1999a)
		34 300	5.95	...	Heber et al. (2000)
		33 600	5.81	129 – 172	Charpinet et al. (2005a)
		33 500	5.87	...	O'Toole & Heber (2006)
11	PG 0911 + 456	31 900	5.82	155 – 166	Koen et al. (1999a)
12	PG 0014 + 067	33 550	5.77	80 – 170	Brassard et al.(2001)
		77 – 173	Jeffery et al. (2005)
		137 – 169	Vucković et al.(2006)
		34 130	5.77	...	For et al. (2006)
13	KUV 0442 + 1416	30 900	5.72	184 – 231	Koen et al. (1999b)
14	EC 05217 – 3914	31 300	5.76	213 – 218	Koen et al. (1999b)
15	KPD 1930 + 2752	33 280	5.61	146 – 332	Billères et al. (2000)
16	PG 1618 + 563B	33 900	5.80	139 – 144	Silvotti et al. (2000)
		34 320	5.79	...	For et al. (2006)
17	HS 0815 + 4243	33 700	5.90	126 – 131	Østensen et al. (2001a)
18	HS 2149 + 0847	35 600	5.90	142 – 159	Østensen et al. (2001a)
19	HS 2201 + 2610	29 300	5.40	347 – 351	Østensen et al. (2001a)
20	HS 0039 + 4302	32 400	5.70	182 – 235	Østensen et al. (2001b)
		32 320	5.68	...	For et al. (2006)

Tabla 6.2: Compilación de las estrellas EC 14026 conocidas (Continuación Tabla 6.1).

	Nombre	T_{eff}	$\log g$	$\Delta\Pi$	Referencia
21	HS 0444 + 0458	33 800	5.60	137 – 168	Østensen et al. (2001b)
22	HS 1824 + 5745	33 100	6.00	139	Østensen et al. (2001b)
		139	Reed et al. (2006)
23	HS 2151 + 0857	34 500	6.10	129 – 151	Østensen et al. (2001b)
		129 – 151	Reed et al. (2006)
24	HS 2303 + 0152	33 800	5.60	128 – 145	Silvotti et al. (2004a)
25	PG 1325 + 101	35 200	5.80	130 – 156	Silvotti et al. (2004a)
		34 800	5.81	...	Telting & Østensen (2004)
		35 050	5.81	99 – 157	Charpinet et al. (2006)
26	SDSS J171722,08	34 500	5.70	142	Solheim et al. (2004)
27	PG 0048 + 091	106 – 190	Koen et al. (2004)
28	PG 0154 + 182	164	Koen et al. (2004)
		110 – 164	Reed et al. (2006)
29	EC 11583 – 2708	114 – 149	Kilkenny et al. (2006)
30	EC 20338 – 1925	135 – 168	Kilkenny et al. (2006)
31	EC 09582 – 1137	136 – 151	Kilkenny et al. (2006)

Tabla 6.3: Tabla superior: estrellas sdB variables que muestran características pulsacionales tanto de las estrellas tipo EC 14026 como de las tipo PG 1716. Tabla del medio: estrellas sdO variables. Tabla inferior: estrellas sdB variables ricas en helio (*Helium-rich* (He-sdB)).

	Nombre	T_{eff}	$\log g$	$\Delta\Pi$	Referencia
1	HS 0702 + 6043	28 400	5.35	363 – 382	Dreizler et al. (2002)
		363 – 383, 3538	Schuh et al. (2006)
2	Balloon 09	29 500	5.30	350 – 356	Oreiro et al. (2004)
		214 – 356, 4354 – 3671	Baran et al. (2005)
		29 810	5.58	...	For et al. (2006)
	Nombre	T_{eff}	$\log g$	$\Delta\Pi$	Referencia
1	J16007 + 0748	59 – 119	Woudt et al. (2006)
	Nombre	T_{eff}	$\log g$	$\Delta\Pi$	Referencia
1	LS IV–14°116	32 500	5.4	...	Ahmad & Jeffery (2003)
		1954 – 2870	Ahmad & Jeffery (2005)

Tabla 6.4: Compilación de estrellas PG 1716 conocidas. (Los datos correspondientes a las estrellas 8-29 han sido extraídos gráficamente de la Fig. 2 de Schuh et al. (2006). En dicha figura no están incluídos los nombres de las estrellas.)

	Nombre	T_{eff}	$\log g$	$\Delta\Pi$	Referencia
1	PG 1716 + 426	27 400	5.47	...	Saffer et al. (1994)
		26 100	5.33	...	Morales-Rueda et al. (2003)
		27 662	5.45	2939 – 5460	Reed et al. (2004)
2	PG 1627 + 017	22 800	5.27	...	Maxted et al. (2001)
		21 600	5.12	...	Morales-Rueda et al. (2003)
		23 670	5.32	4588 – 8901	Randall et al. (2006a)
3	PG 0101 + 039	28 173	5.53	2650 – 7235	Randall et al. (2005)
4	PG 1338 + 481	28 179	5.38	2100 – 7200	Randall et al. (2006b)
5	PG 0850 + 170			...	
6	PB 5450			...	
7	PG 1739 + 489			...	
8	...	27 000	5.27	...	Schuh et al. (2006)
9	...	26 600	5.29	...	Schuh et al. (2006)
10	...	26 650	5.31	...	Schuh et al. (2006)
11	...	25 590	5.32	...	Schuh et al. (2006)
12	...	27 820	5.325	...	Schuh et al. (2006)
13	...	27 760	5.39	...	Schuh et al. (2006)
14	...	27 940	5.40	...	Schuh et al. (2006)
15	...	27 410	5.405	...	Schuh et al. (2006)
16	...	28 530	5.41	...	Schuh et al. (2006)
17	...	28 290	5.41	...	Schuh et al. (2006)
18	...	27 880	5.42	...	Schuh et al. (2006)
19	...	28 830	5.427	...	Schuh et al. (2006)
20	...	28 765	5.45	...	Schuh et al. (2006)
21	...	29 000	5.46	...	Schuh et al. (2006)
22	...	26 500	5.472	...	Schuh et al. (2006)
23	...	26 764	5.483	...	Schuh et al. (2006)
24	...	27 530	5.486	...	Schuh et al. (2006)
25	...	28 000	5.52	...	Schuh et al. (2006)
26	...	28 470	5.54	...	Schuh et al. (2006)
27	...	28 490	5.54	...	Schuh et al. (2006)
28	...	29 500	5.527	...	Schuh et al. (2006)
29	...	24 235	5.53	...	Schuh et al. (2006)

Conclusiones

En este trabajo hemos iniciado un estudio de las propiedades evolutivas y pulsacionales de las estrellas sub-enanas B, utilizando modelos numéricos representativos. Esta es la primera vez que se encara un estudio de estas estrellas variables utilizando secuencias evolutivas completas y detalladas junto con cálculos teóricos de pulsaciones estelares.

Mediante el código evolutivo LPCODE, se calcularon secuencias evolutivas desde la MS hasta que abandonan la HB. Usando distintas tasas de pérdida de masa durante la RGB, se forzó la ocurrencia del flash de helio en distintos momentos de la AGB, generando así cuatro secuencias evolutivas distintas. Las secuencias evolutivas están caracterizadas por la masa que poseen en la HB: $0.48151M_{\odot}$, $0.47359M_{\odot}$, $0.47329M_{\odot}$ y $0.47300M_{\odot}$.

Observamos que las secuencias que sufren una pérdida de masa mayor durante la RGB poseen una envoltura menos masiva. Estas secuencias se asientan en la HB a T_{eff} y $\log g$ mayores. Dado que todas las secuencias calculadas comparten la evolución en la MS y en la RGB, la metalicidad es la misma en todos los casos. Esto implica que el único parámetro que controla el momento del flash es la masa de la envoltura, y por consiguiente la pérdida de masa.

Notamos que las secuencias calculadas no cruzan la región del plano $\log g - \log T_{\text{eff}}$ más poblada de las sdB de tipo EC 14026, correspondientes a las estrellas más calientes y de mayor gravedad superficial. En la actualidad no existen cálculos evolutivos completos cuyos tracks crucen la región donde se concentran las estrellas EC 14026. Cálculos evolutivos preliminares indican que un decrecimiento significativo en la metalicidad (desde 0.02 a 0.01) produce un desplazamiento de los tracks hacia temperaturas más altas, aunque no lo suficiente para alcanzar la región donde se encuentran las estrellas EC 14026. Resultados similares se obtiene disminuyendo la masa de la envoltura, en este caso el corrimiento hacia el azul es mayor que al variar Z pero aún es insuficiente.

Por otro lado, las secuencias de masas $0.47359M_{\odot}$, $0.4329M_{\odot}$ y $0.47300M_{\odot}$ cruzan por la zona donde se encuentran las estrellas tipo PG 1716, por lo tanto, los resultados obtenidos en esta tesis se pueden relacionar en mayor medida con las estrellas PG 1716.

Para realizar un análisis pulsacional teórico elegimos un modelo perteneciente a cada secuencia que se encuentra en la etapa de HB. Para cada modelo calculamos las frecuencias de Brunt-Väisälä y Lamb para $\ell=1, 2$ y 3 junto con las abundancias fraccionales de hidrógeno, helio, carbono y oxígeno. Analizando el perfil químico de los modelos observamos que las estrellas sdB poseen una estructura estratificada, formada por tres regiones en general bien definidas: un núcleo convectivo rico en carbono y oxígeno, una región radiativa más externa rica en helio y finalmente una envoltura de hidrógeno y helio. Separando esta regiones se observan transiciones químicas identificadas como C/O/He y He/H. En nuestros modelos la interface He/H está bien definida y localizada, esto se traduce en un pico de gran amplitud en la frecuencia de Brunt-Väisälä y también en picos en las frecuencias de Lamb. En cambio la interface C/O/He tiene una extensión finita, y la transición es escalonada. Esto se refleja en una estructura de

picos muy juntos en la frecuencia de Brunt-Väisälä en la posición de esta interface. En la frecuencia de Lamb no se observan efectos relacionados con la existencia de a interface C/O/He. Las propiedades pulsacionales dependen en gran medida de la estructura interna estratificada de las estrellas sdB.

Para el estudio de las propiedades pulsacionales de las estrellas sdB, elegimos un modelo de referencia perteneciente a la secuencia con masa $0.47329M_{\odot}$ en la HB. Los parámetros superficiales correspondientes al modelo de referencia son: $\log g=5.44$, $T_{\text{eff}} = 27\,148\text{K}$; localizado aproximadamente en el centro de la HB. Utilizando el código de pulsaciones, calculamos el espectro de oscilaciones completo, bajo la aproximación adiabática, de modos radiales y no-radiales con $\ell=0, 1, 2$ y 3 , para una estrella con simetría esférica.

Los modos de presión poseen energías cinéticas bajas ($\log E_{\text{cin}} \simeq 40-43$) dado que las regiones más externas son menos densas (10^{-5}g/cm^3) y poseen menos inercia. Las autofunciones de desplazamiento para los modos p poseen amplitudes significativas solamente en la envoltura de las estrellas sdB, y se van desplazando hacia el exterior a medida que k aumenta. Debajo de la transición He/H las autofunciones muestran amplitudes nulas. Estos resultados indican que los modos de presión son modos de envoltura en las estrellas sdB. Por último, observamos que los períodos de los modos p se forman principalmente en la envoltura rica en hidrógeno, aunque también se observan contribuciones provenientes del núcleo convectivo. En particular existen contribuciones importantes a la formación de los períodos de los modos p provenientes de las interfaces químicas en sí mismas, donde observamos que las amplitudes de las funciones de peso son máximas. Esto implica que, a pesar de que los modos p son modos de envoltura, los valores de sus períodos están influenciados también por las regiones internas de la estrella. Esto claramente sugiere que para un cálculo preciso de los períodos de los modos p es importante el modelado aún en las regiones centrales de la estrella.

Los modos de gravedad se propagan en las zonas internas de las estrellas sdB, mayormente en la cáscara radiativa de helio. Poseen energías cinéticas altas ($\log E_{\text{cin}} \simeq 43-47$) dado que las regiones internas de la estrella son más densas (10^3g/cm^3) y por lo tanto, requieren una energía cinética mayor para oscilar. Además el comportamiento de la energía cinética en función de los períodos es “oscilatoria”, debido a los efectos de atrapamiento y confinamiento de modos, con mínimos agudos y bien definidos y máximos extendidos que son ocupados por varios modos. Basados en los resultados de la teoría asintótica y de los experimentos numéricos, encontramos que la zona de transición He/H entre la envoltura rica en hidrógeno y el núcleo rico en helio, es responsable de los efectos de atrapamiento y confinamiento de modos g . Observamos que los períodos de los modos atrapados se forman principalmente en la base de la envoltura rica en hidrógeno y las autofunciones poseen amplitudes relativas grandes en la región que se encuentra sobre la interface He/H. Cabe aclarar que, a pesar que los modos g atrapados se propagan en la envoltura, siguen siendo más profundos que los modos p . Para los modos que denominamos normales, los períodos se forman en la zona semiconvectiva que se encuentra entre el núcleo convectivo central y la interface C/O/He, aunque también se observan contribuciones de la región entre las interfaces químicas. Las autofunciones correspondientes a los modos normales poseen amplitudes relativas significativas en toda la estrella. Para los modos confinados, los períodos se forman en la región entre las interfaces de C/O/He y He/H, en el núcleo radiativo rico en helio. También se observan contribuciones de menor amplitud en la zona semiconvectiva. Estos modos tienen autofunciones con amplitudes relativas grandes en la zona central del núcleo radiativo de helio y en la región semiconvectiva que rodea al núcleo central.

En los tres casos observamos que las autofunciones de desplazamiento tienen un comportamiento evanescente en el núcleo central. Esto se debe a que los modos de gravedad no se propagan en zonas convectivas, como indica la teoría de pulsaciones estelares.

Los efectos de atrapamiento y confinamiento de modos son más débiles cuando se trata de modos de presión. Las autofunciones presentan amplitudes grandes en la zona de la envoltura, por encima de la interface He/H. Esto los hace casi insensibles a los efectos de la transición de

C/O/He. Sin embargo, encontramos que la transición He/H produce un pequeño efecto en el espectro de frecuencias de los modos de presión, denominado microatrapamiento. El perfil de la energía cinética para los modos de presión tiene un comportamiento más suave que para los modos de gravedad. La energía cinética muestra primero un decrecimiento monótono, debido a que las autofunciones de los modos p se van desplazando hacia el exterior de la estrella a medida que k aumenta, es decir que la frecuencia aumenta. Luego se observa un crecimiento monótono con menor pendiente que el observado para k pequeños. Esto se debe a que el límite exterior del modelo estelar se fija en forma arbitraria, obligando a las autofunciones a oscilar hacia adentro de la envoltura donde la densidad es mayor. Además, a medida que k aumenta las amplitudes de las autofunciones también aumentan.

Para estudiar los cambios en la estructura interna de las estrellas sdB con la evolución, elegimos cuatro modelos ubicados a distintos momentos de la evolución de la secuencia con masa $0.47329M_{\odot}$ en la HB. A medida que la estrella evoluciona podemos ver como se va formando la transición C/O/He entre el núcleo convectivo central y la cáscara rica en helio que lo rodea. La formación y posterior crecimiento de dicha interface tiene una influencia significativa en los valores de los períodos de los modos g de bajo orden radial.

Por último estudiamos la evolución temporal de los valores de los períodos de pulsación para los modos radiales y no-radiales con $\ell=0, 1, 2$ y 3 . Con este fin calculamos el espectro pulsacional para cada modelo perteneciente a la secuencia evolutiva de masa $0.47329M_{\odot}$ en la HB, desde la ZAEHB hasta TAEHB, cubriendo la evolución en toda la HB. Analizando también la variación de los parámetros de superficie durante la evolución encontramos una relación entre estos parámetros y el valor de los períodos. Los resultados muestran que la evolución de los modos g y p tiene un comportamiento general muy similar. Se observa una primera fase de crecimiento monótono, que se corresponde con un decrecimiento en la gravedad superficial. Esta etapa corresponde a la fase de expansión que sufre la estrella a medida que se aleja de la ZAEHB. La segunda fase corresponde a la evolución en el *loop* que se observa en el plano $\log g - \log T_{\text{eff}}$, y que culmina en un máximo de los períodos de pulsación. La tercera y última fase corresponde a la etapa de contracción rápida que ocurre antes de que la estrella abandone la HB. En esta etapa los períodos de pulsación decrecen en forma monótona a partir del máximo en el cual termina la etapa anterior. Ese comportamiento se corresponde con un aumento rápido en la gravedad superficial. La tasa de decrecimiento que observamos en los modos g es mayor a la que observamos en los modos p .

El efecto de las variaciones de T_{eff} no se observa en el comportamiento temporal tanto de los períodos de los modos p como de los modos g . Esto también ocurre para la luminosidad superficial. En resumen podemos concluir que los valores de los períodos correspondientes a los modos de presión y gravedad aumentan cuando $\log g$ decrece y disminuyen cuando $\log g$ crece.

Para los modos de gravedad, el efecto de la formación de la transición química C/O/He actúa en sentido contrario el correspondiente a $\log g$. Esto produce que los períodos de los modos g de bajo orden radial no aumentan en la primera fase de evolución, y en cambio se mantengan constantes y en algunos casos decrezcan. Esta falta de crecimiento da lugar a los sucesos de *avoided crossing* y *mode bumping* con los modos p de bajo orden radial y con el modo fundamental. Para los modos de presión, la formación y posterior crecimiento de la interface C/O/He durante la evolución en la HB no afecta visiblemente los valores de los períodos, esto se debe a que son modos de envoltura.

Los resultados obtenidos en esta Tesis constituyen un primer paso en el estudio teórico de las propiedades evolutivas y pulsacionales de las estrellas sdB. En el futuro nos proponemos ampliar el espacio de parámetros a estudiar para poder cubrir la región del plano $\log g - \log T_{\text{eff}}$ donde se encuentran las estrellas PG 1716. Con este fin incluiremos nuevas secuencias evolutivas para un mejor estudio de la evolución y estructura interna de las mismas. También buscamos realizar análisis astrosismológicos de estrellas PG 1716 individuales. Por otra parte, exploraremos canales evolutivos alternativos con el fin de generar tracks evolutivos que cubran

el dominio de la estrellas EC 14026. Finalmente, planeamos realizar cálculos de pulsaciones no-adiabáticas en modelos de estrellas sdB en general, con el fin de investigar el rol de las especies químicas, tales como el hierro, níquel, cromo y magnesio, en la desestabilización de modos de pulsación.

Ecuaciones de Pulsación

En esta sección desarrollaremos la teoría de pulsaciones no-radiales adiabáticas en la aproximación lineal, o de pequeñas perturbaciones, para un sistema con simetría esférica, es decir, en ausencia de rotación o campos magnéticos. Partiremos entonces de las ecuaciones de la hidrodinámica para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales que tiene como solución las autofunciones y autofrecuencias de oscilación. El tratamiento que se muestra a continuación sigue el tratamiento y la derivación de Unno et al. (1989). Las ecuaciones básicas de la hidrodinámica son las ecuaciones de conservación de masa (ec. A.1), del momento (ec. A.2) y de la energía (ec. A.3):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = \rho \vec{f} - \nabla P - \rho \nabla \Phi + \nabla \Theta \quad (\text{A.2})$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) S = \rho (\epsilon_N + \epsilon_V) - \nabla \cdot \vec{F}_R \quad (\text{A.3})$$

En estas ecuaciones ρ denota la densidad de masa, P la presión, T la temperatura, \vec{u} la velocidad de flujo, S la entropía específica, Φ el potencial gravitatorio, \vec{f} las fuerzas electromagnéticas externas, Θ el tensor de esfuerzos viscosos, ϵ_N la tasa de generación de energía nuclear, ϵ_V la generación de calor por viscosidad, \vec{F}_R el flujo de energía por radiación y ∇ es el operador gradiente.

Para completar la descripción del sistema debemos agregar ecuaciones suplementarias. Estas ecuaciones son: la ecuación de Poisson, que relaciona el potencial gravitatorio con la distribución de masa,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (\text{A.4})$$

y la ecuación de difusión radiativa,

$$\hat{F}_R = -K \nabla T \quad (\text{A.5})$$

donde G es la constante de gravitación universal, ∇^2 es el operador Laplaciano y K es la constante de conductividad radiativa, que se puede escribir en función de la opacidad κ como:

$$K = \frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \quad (\text{A.6})$$

En esta ecuación a es la constante de densidad de radiación y c es la velocidad de la luz. También existe un conjunto de ecuaciones que proporcionan las expresiones para $P(\rho, T)$, $S(\rho, T)$, $\epsilon_N(\rho, T)$ y $\kappa(\rho, T)$.

Generalmente la viscosidad es pequeña en el interior estelar y en ausencia de convección. Por lo tanto, podemos despreciar el término de viscosidad en (ec.A.2) ($\nabla \cdot \Theta \approx 0$) y el término que contiene ϵ_N en la ecuación A.3 ($\epsilon_V \approx 0$).

Si consideramos también un sistema autogravitante y en ausencia de campos magnéticos tenemos que $f = 0$. Bajo estas suposiciones las ecuaciones (A.1)-(A.3) resultan:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \right) \bar{v} = \rho \bar{f} - \nabla P - \rho \nabla \Phi \quad (\text{A.8})$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \right) S = \rho \epsilon_N - \nabla \cdot \bar{F}_R \quad (\text{A.9})$$

Mientras que las ecuaciones (A.4) y (A.5) no varían.

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{F}_R = -\frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \nabla T \quad (\text{A.11})$$

Notar que la ecuación (A.8) es la aproximación de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido no viscoso, es decir, la ecuación de Euler. En las ecuaciones anteriores notamos con \bar{v} a la velocidad del fluido en ausencia de convección para diferenciarla de la velocidad general \vec{u} que puede incluir campos de velocidad turbulentos.

Ahora consideremos el estado de equilibrio, para ello fijamos $v_0 = 0$ y $(\partial/\partial t = 0)$ en las ecuaciones (A.7)-(A.11). Esto resulta en:

$$-\nabla P_0 - \rho_0 \nabla \Phi_0 = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\rho_0 \epsilon_{N,0} - \nabla \bar{F}_{R,0} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla_2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0 \quad (\text{A.14})$$

$$\bar{F}_{R,0} = -K_0 \nabla T \quad (\text{A.15})$$

donde el indicamos con un subíndice 0 las variable físicas en equilibrio. Notar que la ecuación (A.14) es la condición de equilibrio hidrostático.

Para derivar las ecuaciones de oscilación, consideramos el estado no perturbado o en equilibrio y le superponemos pequeñas perturbaciones. Dado que las perturbaciones son mucho menores en magnitud que las variables en equilibrio, podemos asumir que vale la teoría lineal y descartar así términos de orden mayor a uno en las perturbaciones.

Las perturbaciones de cierta cantidad física f se pueden describir matemáticamente de dos maneras: con variaciones Lagrangianas (δf) o Eulerianas (f').

$$\begin{aligned} \delta f(\bar{r}, t) &= f(\bar{r}, t) - f_0(\bar{r}) \\ f'(\bar{r}, t) &= f(\bar{r}, t) - f_0(\bar{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Si definimos $\bar{\xi} = \bar{r} - \bar{r}_0$ como la variación Lagrangiana de la posición de un elemento de fluido, tenemos que la relación entre los dos tipos de perturbaciones está dada, a primer orden, por:

$$\delta f(\bar{r}, t) = f'(\bar{r}, t) + \bar{\xi} \cdot \nabla f_0(\bar{r}_0) \quad (\text{A.17})$$

Las variaciones Lagrangiana y Euleriana coinciden para el caso no perturbado ($\bar{v}_0=0$) y están dadas por:

$$\bar{v} = \bar{v}' = \delta\bar{v} = \frac{d\bar{\xi}}{dt} \quad (\text{A.18})$$

Ahora procederemos a la linealización de las ecuaciones (A.7)-(A.11). Para ello escribimos a cada variable física como su valor en equilibrio más una pequeña perturbación Euleriana.

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho' \\ \Phi &= \Phi_0 + \Phi' \\ P &= P_0 + P' \\ \bar{v} &= \bar{v}_0 + \bar{v}' \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Reemplazando las expresiones (A.19) en las ecuaciones (A.7)-(A.11), despreciando términos de orden mayor o igual a dos en las perturbaciones y usando que las variables de equilibrio satisfacen las ecuaciones (A.12)-(A.15), se obtiene:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \bar{v}) = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla P' + \rho_0 \nabla \Phi' + \rho' \nabla \Phi_0 = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (\text{A.22})$$

$$\bar{F}'_R = -K_0 \nabla T' - K' \nabla T_0 \quad (\text{A.23})$$

Las ecuaciones (A.20)-(A.23) forman un sistema de ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales para las variables perturbadas (ρ' , Φ' , T' , etc) y para el vector velocidad $\bar{v} = \bar{v}' = \delta\bar{v}$ o la variación Lagrangiana del desplazamiento $\bar{\xi}$. Los coeficientes de estas ecuaciones diferenciales incluyen solamente cantidades en equilibrio, que son funciones solo de r ya que estamos considerando que el modelo no perturbado tiene simetría esférica.

$$\rho_0 = \rho_0(r), \quad T_0 = T_0(r), \quad \Phi_0 = \Phi_0(r) \quad (\text{A.24})$$

En adelante, para simplificar la notación, omitiremos los subíndices 0.

Las perturbaciones o variaciones Eulerianas son funciones del tiempo y de las coordenadas. Si elegimos coordenadas esféricas podemos escribir estas funciones como:

$$f' = f'(r, \theta, \phi, t)$$

A partir de aquí se puede hacer la primera separación de variables. Suponemos una dependencia temporal oscilatoria de la forma $e^{i\sigma t}$, donde σ es la frecuencia angular de oscilación, que se relaciona con la frecuencia cíclica ν y el período Π de la siguiente manera:

$$\nu = \frac{\sigma}{2\pi} = \frac{1}{\Pi}$$

Así podemos escribir cualquier cantidad física de la forma

$$f'(r, \theta, \phi, t) = f'(r, \theta, \phi) e^{i\sigma t} \quad (\text{A.25})$$

Consideremos la siguiente relación termodinámica (Unno et al. 1989):

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{P'}{p} - A\xi_r - \nabla_{ad} \frac{\rho T}{p} \delta S \quad (\text{A.26})$$

En la ecuación (A.26)

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_{S'} \quad \nabla_{ad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_{S'} \quad (\text{A.27})$$

donde el subíndice S' indica que las derivadas se realizan a entropía constante, ξ_r es la componente radial de $\bar{\xi}$ y A es el discriminante de Schwarzschild que denota el grado de estabilidad ($A < 0$) o inestabilidad ($A > 0$) convectiva y está dado por:

$$A = \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr}$$

Utilizando la dependencia dada en la ec (A.25), la ecuación (A.26) y operando con las ecuaciones (A.20)-(A.23) obtenemos:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\rho g}{\Gamma_1 P} \right) P' - (\sigma^2 + gA) \xi_r + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} = g \nabla_{ad} \frac{\rho T}{P} \delta S \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r^2 \xi_r)}{\partial r} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} \xi_r + \left(\frac{\rho}{\Gamma_1 P} + \frac{\nabla_{\perp}^2}{\sigma^2} \right) \frac{P'}{\rho} + \frac{1}{\sigma^2} \nabla_{\perp}^2 \Phi' = \nabla_{ad} \frac{\rho T}{P} \delta S \quad (\text{A.29})$$

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \nabla_{\perp}^2 \right) \Phi' - 4\pi G \rho \left(\frac{P'}{\Gamma_1 P} - A \xi_r \right) = -4\pi G \nabla_{ad} \frac{\rho^2 T}{P} \delta S \quad (\text{A.30})$$

$$i\sigma \rho T \delta S = (\rho \epsilon_N)' - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r')}{\partial r} + \nabla_{\perp}^2 (KT') \quad (\text{A.31})$$

$$F_r' = -K \frac{\partial T'}{\partial r} - K' \frac{dT'}{dr} \quad (\text{A.32})$$

donde ∇_{\perp}^2 es el operador diferencial.

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (\text{A.33})$$

Aquí F_r' es la componente radial de la variación Euleriana en el flujo, F_R' .

Como resultado, las ecuaciones (A.28)-(A.32) son independientes del tiempo. Los coeficientes dependen solamente de la coordenada radial r , y el único operador diferencial con derivadas respecto de los ángulos es ∇_{\perp}^2 . Por lo tanto, podemos hacer otra separación de variables, en una parte radial y otra angular. La dependencia de la parte angular se puede especificar en función de los armónicos esféricos $Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$. Estas funciones son autofunciones del operador $L^2 = r^2 \nabla_{\perp}^2$ con autovalores $\ell(\ell + 1)$.

$$L^2 Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = \ell(\ell + 1) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (\text{A.34})$$

La forma explícita de los armónicos esféricos está dada por:

$$Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = (-1)^{m+|m|/2} \left[\frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{2\pi(\ell + m)!} \right]^{1/2} P_{\ell}^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (\text{A.35})$$

donde $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$ y $P_\ell^{|m|}(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre.

Después de esta separación de variables, para los modos normales, las perturbaciones toman la forma:

$$f'(r, \theta, \phi) = f(r)Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (\text{A.36})$$

Y la expresión para la variación Lagrangiana del desplazamiento es:

$$\bar{\xi} = \left[\xi_r(r), \xi_h(r) \frac{\partial}{\partial \theta}, \xi_h(r) \frac{\partial}{\sin \theta \partial \phi} \right] Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t} \quad (\text{A.37})$$

donde

$$\xi_h = \frac{1}{\sigma^2 r} \left(\frac{P'}{\rho} + \Phi' \right) \quad (\text{A.38})$$

Assumiendo que las perturbaciones de las cantidades físicas tienen la forma (A.36), las ecuaciones (A.28)-(A.32) se transforman en:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dr} + \frac{g}{\rho c_S^2} P' + (N^2 - \sigma^2) \xi_r + \frac{d\Phi'}{dr} = g \nabla_{ad} \frac{\rho T}{P} \delta S \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} \xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) \frac{P'}{\rho c_S^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi' = \nabla_{ad} \frac{\rho T}{P} \delta S \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' - 4\pi G \rho \left(\frac{P'}{\rho c_S^2} + \frac{N^2}{g} x_{i_r} \right) = -4\pi G \nabla_{ad} \frac{\rho^2 T}{P} \delta S \quad (\text{A.41})$$

$$K \frac{dT'}{dr} = -F'_r - K' \frac{dT}{dr} \quad (\text{A.42})$$

$$i\sigma \rho T \delta S = (\rho \epsilon_N)' - \frac{1}{r^2} \frac{r^2 F'_r}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} K T' \quad (\text{A.43})$$

siendo $c_S^2 = (\Gamma_1 p / \rho)^{1/2}$ la velocidad local del sonido. N y L_ℓ son las frecuencias de Brunt-Väisälä y Lamb, respectivamente, y están dadas por:

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -gA \quad (\text{A.44})$$

$$L_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} c_S^2 \quad (\text{A.45})$$

Las frecuencias de Brunt-Väisälä y de Lamb cumplen un rol fundamental en la teoría de pulsaciones estelares no-radiales. En particular, la frecuencia de Brunt-Väisälä define las características globales del espectro de modos g .

Las ecuaciones (A.39)-(A.43) tienen como solución la parte con dependencia radial de las perturbaciones, es decir, $p'(r), \Phi'(r), T'(r)$, etc, para oscilaciones no-radiales lineales y no-adiabáticas.

Consideremos ahora la aproximación adiabática. Para ello suponemos que no hay intercambio de calor entre los elementos del fluido al oscilar. Esta condición se cumple principalmente en las zonas internas de la estrella, pero no lo hace en las regiones próximas a la superficie. La condición de oscilaciones adiabáticas es equivalente a decir que la entropía específica se conserva, tal que

$$\delta S = 0 \quad (\text{A.46})$$

A partir de esta condición la relación termodinámica (A.26) toma la siguiente forma simplificada:

$$\rho' = \frac{P'}{c_S^2} + \frac{\xi_r \rho N^2}{g} \quad (\text{A.47})$$

que expresa la perturbación en la densidad en función de la perturbación en la presión.

Tomando en cuenta la relación (A.47), las ecuaciones básicas (A.39)-(A.41) se reducen a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} - \frac{g}{c_S^2} \xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2}\right) \frac{P'}{\rho c_S^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi' \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dr} + \frac{g}{\rho c_S^2} P' + (N^2 - \sigma^2) \xi_r = -\frac{d\Phi'}{dr} \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' = 4\pi G \rho \left(\frac{P'}{\rho c_S^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r \right) \quad (\text{A.50})$$

Las ecuaciones (A.48)-(A.50) con las condiciones de contorno apropiadas en el centro ($r=0$) y en la superficie de la estrella ($r = R$ ó $P = 0$), constituyen un problema de autovalores (σ^2), donde las soluciones están dadas por los modos normales de oscilación. Podemos ver también que estas ecuaciones son independientes del número azimutal m y muestran, por consiguiente, una degeneración del orden $2\ell + 1$ en los autovalores. Esta degeneración se rompe, por ejemplo, para sistemas rotantes o que poseen un campo magnético.

Las ecuaciones (A.48)-(A.50) aplicadas a modelos estelares generales deben resolverse en forma numérica. Para realizar un análisis numérico del sistema planteado, es necesario escribir el sistema de ecuaciones en forma adimensional, para lo cual debemos definir también las variables del problema en su forma adimensional. Las nuevas variables adimensionales se definen como:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\xi_r}{r} & y_2 &= \frac{1}{gr} \left(\frac{P'}{\rho} \right) \\ y_3 &= \frac{\Phi'}{gr} & y_4 &= \frac{1}{g} \frac{d\Phi'}{dr} & \omega^2 &= \frac{R_*^3}{GM_*} \sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

por lo tanto, las incógnitas del problema se pueden expresar en función de las variables adimensionales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \xi_r &= r y_1 & P' &= \rho g r (y_2 - y_1) \\ \Phi' &= g r y_3 & \frac{d\Phi'}{dr} &= g y_4 & \sigma^2 &= \frac{GM_*}{R_*^3} \omega^2 \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Sustituyendo las expresiones (A.52) en las ecuaciones (A.48)-(A.50) obtenemos un sistema de ecuaciones adimensionales dado por:

$$x \frac{dy_1}{dr} = \left(V_g^3 \right) y_1 + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{C_1 \omega^2} - V_g \right] y_2 + V_g y_3 \quad (\text{A.53})$$

$$x \frac{dy_2}{dr} = (C_1 \omega^2 - A^*) + (A^* - U + 1) y_2 - A^* y_3 \quad (\text{A.54})$$

$$x \frac{dy_3}{dr} = (1 - U) y_3 + y_4 \quad (\text{A.55})$$

$$x \frac{dy_4}{dr} = U A^* y_1 + U V_g y_2 + [\ell(\ell+1) - U V_g] y_3 - U y_4 \quad (\text{A.56})$$

donde

$$V_g = \frac{V}{\Gamma_1} = -\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{gr}{c_S^2} = \frac{gr\rho}{\Gamma_1 p} \quad (\text{A.57})$$

$$U = \frac{d \ln M_r}{d \ln r} = \frac{4\pi\rho r^3}{M_r} \quad (\text{A.58})$$

$$C_1 = \left(\frac{r}{R_*}\right)^3 \frac{M_*}{M_r} \quad (\text{A.59})$$

$$A^* = -rA = \frac{r}{g} N^2 = r \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) \quad (\text{A.60})$$

La variable adimensional x es la coordenada radial escaleada con el radio estelar ($x = r/R_*$), M_r es la masa contenida en una esfera de radio r , y M_* es la masa total de la estrella.

Ecuaciones de Evolución y Estructura Estelar

En este apéndice realizaremos una breve introducción de la teoría de estructura y evolución estelar para un modelo con simetría esférica, junto con la evolución de la composición química.

Si consideramos como variable (Lagrangiana) independiente a la masa interna m , las ecuaciones de estructura y evolución estelar son (Kippenhahn & Weigert 1990):

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_n - \epsilon_\nu - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla \quad (\text{B.4})$$

donde t es el tiempo, $r(m, t)$ es la distancia radial al centro de la estrella, $l(m, t)$ es la luminosidad, $P(m, t)$ la presión, ρ la densidad de masa, ϵ_n la liberación de energía nuclear por unidad de masa y de tiempo, ϵ_ν la pérdida de energía por emisión de neutrinos por unidad de masa y de tiempo, c_P el calor específico a presión constante, G es la constante de gravitación universal, c la velocidad de la luz en el vacío y a la constante de densidad de radiación. Además $\delta \equiv -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_P$ y $\nabla \equiv d \ln T / d \ln P$ es el gradiente de temperatura adimensional.

La ecuación (B.1) corresponde a la ecuación de conservación de la masa, la ecuación (B.2) es la ecuación de Euler en simetría esférica escrita en función de las variables masa m y t como variables independientes, la ecuación (B.3) corresponde a la ecuación de conservación de la energía y la ecuación (B.4) está relacionada con el transporte de la energía ya que éste determina el valor de ∇ . Si el transporte de energía es debido a la radiación, ∇ se reemplaza por el gradiente radiativo:

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa l P}{m T^4}, \quad (\text{B.5})$$

donde κ es la opacidad radiativa y/o conductiva. Por otro lado, si el transporte de la energía está dado por medio de fenómenos de convección, entonces el valor de ∇ (su expresión funcional) depende de la teoría de convección utilizada.

En la ecuación (B.2) el segundo término del miembro derecho es proporcional a la aceleración del elemento de masa considerado y solo es significativo cuando la estrella se encuentra en equilibrio hidrostático. Sin embargo, ante pequeñas desviaciones del equilibrio hidrostático la estrella se reajusta para restablecer el equilibrio en una escala temporal del orden de $\tau_{hid} \simeq \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}$. Para el Sol esta escala temporal es del orden de decenas de minutos, mientras que para enanas blancas es del orden de segundos. En cualquiera de estos casos, y en todos los

casos tratados en esta tesis, τ_{hid} resulta mucho menor que las escalas temporales en las cuales se producen los cambios en la estructura de la estrella. Esto permite despreciar el término de aceleración en la ecuación (B.2) que toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (\text{B.6})$$

Una cantidad fundamental es ∇ , contenida en la ecuación (B.4), que determina la estratificación de la isoterma dentro de la estrella. Si el transporte de energía se produce por radiación o conducción, entonces ∇ se reemplaza por el gradiente radiativo ∇_{rad} definido como:

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa l P}{mr^4} \quad (\text{B.7})$$

donde κ es la opacidad radiativa y/o conductiva. Si el transporte de energía se realiza por convección, ∇ se debe obtener mediante teorías de convección apropiadas. Para las regiones más internas de la estrella, la convección, si se presenta, es prácticamente adiabática, de forma tal que $\nabla = \nabla_{ad}$ en un muy buen grado de aproximación.

En resumen, el conjunto de ecuaciones que determina la estructura y evolución estelar empleadas en los cálculos realizados son:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{GM}{4\pi r^4} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_n - \epsilon_\nu - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla \quad (\text{B.11})$$

Para completar la descripción es necesario conocer las ecuaciones que controlan los cambios en la composición química.

Sea n_i el número de partículas por unidad de volumen de la especie química i . Entonces, el cambio en la composición química de un dado elemento de masa está descrito por:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial n_i}{\partial t} \right)_{nuc} + \left(\frac{\partial n_i}{\partial t} \right)_{mix} \quad i = 1, \dots, I \quad (\text{B.12})$$

donde el suíndice “*nuc*” indica el cambio producido por reacciones nucleares y el suíndice “*mix*” indica el cambio debido a los diferentes mecanismos de mezcla, como convección, difusión microscópica o inestabilidad de Rayleigh-Taylor. Por cada especie química de abundancia significativa hay una ecuación de la forma (B.12). Por lo tanto, se obtiene un sistema de I ecuaciones diferenciales acopladas, donde I es el número de especies nucleares presentes.

Consideremos el término debido a las reacciones nucleares. Una dada especie nuclear se puede crear o destruir a través de numerosas reacciones nucleares con otras especies. Si notamos con $\langle v\sigma \rangle_{ij}$ a la tasa de reacciones nucleares por cada par de partículas entre las especies i y j , y con $\langle v\sigma \rangle_{kl}$ a la correspondiente a las reacciones entre partículas k y l que generan partículas i , tenemos

$$\left(\frac{\partial n_i}{\partial t} \right)_{nuc} = - \sum_j \langle v\sigma \rangle_{ij} n_i n_j + \sum_{k,l} \langle v\sigma \rangle_{kl} n_k n_l \quad (\text{B.13})$$

La primera sumatoria representa el número de reacciones nucleares que destruyen partículas de la especie i , mientras que la segunda representa el número de reacciones que crean partículas

de dicha especie. Por lo tanto la ecuación (B.13) es una ecuación de balance. Cabe aclarar que las reacciones nucleares pueden involucrar más de dos partículas. Sin embargo, dado que estamos tratando con una representación esquemática, es suficiente considerar solo reacciones binarias. Para más detalles se recomienda consultar Arnett (1996).

El segundo término de la ecuación (B.12) representa una amplia variedad de procesos de mezcla como ya mencionamos. El más conocido de estos procesos es el de convección. Sin embargo, podemos notar que los diferentes procesos de mezcla se pueden modelar como procesos de difusión de la composición química mediante coeficientes de difusión apropiados para cada proceso. Asumiendo simetría esférica, podemos escribir

$$\left(\frac{\partial n_i}{\partial t}\right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_{mix} \frac{\partial n_i}{\partial r} \right) \quad (\text{B.14})$$

donde D_{mix} es el coeficiente de difusión determinado por el mecanismo de mezcla considerado. Debido a la linealidad de estas ecuaciones con respecto a D_{mix} , si dos o más mecanismos de mezcla operan simultáneamente sus efectos pueden sumarse directamente definiendo $D_{mix} = \sum_{proc} D_{proc}$. La ecuación (B.12) resulta entonces:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = - \sum_j \langle v\sigma \rangle_{ij} n_i n_j + \sum_{k,l} \langle v\sigma \rangle_{kl} n_k n_l + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_{mix} \frac{\partial n_i}{\partial r} \right) \quad i = 1, \dots, I \quad (\text{B.15})$$

que, determina la evolución temporal de la composición química. La ecuación (B.15) junto con las ecuaciones (B.8)-(B.11), son las ecuaciones que determinan la estructura y evolución estelar.

Bibliografía

- [1] Ahmad, A. and Jeffery, C.S.:2003, *Astron. Astrophys.* **402**, 335
- [2] Ahmad, A. and Jeffery, C.S.:2005, *Astron. Astrophys.* **437**, L51
- [3] Alexander, D.R. and Ferguson, J.W.:1994, *The Astrophysical Journal* **437**, 879
- [4] Althaus, L.G., Córscico, A.H., Gautschy, A., Han, Z., Serenelli, A.M. and Panei, J.A.:2003, *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía* **46**, 32
- [5] Angulo, C.:1999, *Nuclear Physics A* **656**, 3
- [6] Arnett, D.:1996, *Supernovae and Nucleosynthesis*, Princeton University Press, Princeton
- [7] Badnell, N.R., Bautista, M.A., Butler, K., Delahaye, F., Mendoza, C., Palmeri, P., Zeippen, C.J. and Seaton, M.J.:2005, *M.N.R.A.S* **360**, 458
- [8] Baran, A., Pigulski, A., Koziel, D., Ogloza, W., Silvotti, R. and Zola, S.:2005, *M.N.R.A.S* **360**, 737
- [9] Billères, M., Fontaine, G., Brassard, P. and Charpinet, S.:1997, *The Astrophysical Journal* **487**, L81
- [10] Billères, M., Fontaine, G., Brassard, P., Charpinet, S., Liebert, J. and Saffer, R.A.:2000, *The Astrophysical Journal* **530**, 441
- [11] Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., and Hansen, C.J.:1992a, *The Astrophysical Journal Society* **80**, 369
- [12] Brassard, P., Fontaine, G., Billères, M., Charpinet, S., Liebert, J. and Saffer, R.A.:2001, *The Astrophysical Journal Society* **563**, 1013
- [13] Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., and Tassoul, M.:1992b, *The Astrophysical Journal Society* **81**, 747
- [14] Briley, M. M., Hesser, J. E., Bell, R. A., Bolte, M. J. and Smith, G. H.:1994, *The Astrophysical Journal Society AJ* **108**, 2183
- [15] Brocato, E., Matteucci, F., Mazzitelli, I., and Tornamb, A.:1990, *The Astrophysical Journal* **349**, 458
- [16] Brown, T., Sweigart, A., Lanz, T., Landsman, W. and Hubeny, I.: 2001, *The Astrophysical Journal* **562**, 368

- [17] Buonanno, A., Catalano, S., Frasca, A., Mignemi, G. and Paternò, L.: 2003, *Astron. Astrophys.* **398**, 283
- [18] Cassisi, S., Schlattl, H., Salaris, M. and Weiss, A.:2007, *astro-ph/0211498v1*
- [19] Castellani, V., Giannone, P. and Renzini, A.:1971, *Astrophysics and Space Science* **10**, 355
- [20] Caughlan, G.R. and Fowler, A.:1988, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **40**, 283
- [21] Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., and Dorman, B.:1996, *The Astrophysical Journal* **741**, 103
- [22] Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., Chayer, P., Rogers, F.J., Iglesias, C.A. and Dorman, B.:1997, *The Astrophysical Journal* **483**, 123
- [23] Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., and Dorman, B.:2000, *The Astrophysical Journal* **131**, 223
- [24] Charpinet, S., Fontaine, G. and Brassard, P.: 2001, *The Astronomical Society of the Pacific* **113**, 775
- [25] Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., and Dorman, B.: 2002, *The Astrophysical Journal* **139**, 487
- [26] Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., and Dorman, B.: 2000, *The Astrophysical Journal* **140**, 469
- [27] Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., Green, E.M. and Chayer, P.: 2005a, *The Astronomical Society of the Pacific (Conference)* ed. D. Koester and S. Mohler, San Francisco **334**, 615
- [28] Charpinet, S., Fontaine, G., Brassard, P., Billères, M., Green, E.M. and Chayer, P.:2005b, *Astron. Astrophys.* **443**, 251
- [29] Charpinet, S., Silvotti, R., Bonanno, A., Fontaine, G., Brassard, P., Chayer, P., Green, E.M., Bergeron, Bernabei, S., Leccia, S., Kjeldsen, H., Janulis, R., Frasca, A., Østensen, R., Kim, S.-L., Park, B.-G., Jiang, X., Reed, M.D., Patterson, R.S., Gietzen, K.M., Clark, P.J., Wolf, G.W., Lipkin, Y., Formiggini, L., Leibowitz, E., Oswalt, T.D., Rudkin, M. and Johnstan, K.:2006, *Astron. Astrophys.* **459**, 565
- [30] Chayer, P., Fontaine, G. and Wesmael, F.:1995, *The Astrophysical Journal* **599**, 189
- [31] Clayton, D.D.:1968, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis* New York: McGraw Hill
- [32] Córscico, A., Benvenuto, O., Althaus, L., Isern, J. and García Berro, E.:2001, *New Astronomy* **6**, 197
- [33] Córscico, A. and Benvenuto, O.:2002, *Astrophysics and Space Science* **279**, 281
- [34] Cowling, T.J.:1941, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **101**, 367
- [35] Cox, J. P.: 1980, *Theory of Stellar Pulsation* Princeton University Press, Princeton
- [36] Christensen and Dalsgaard.:1998b, *The First MONS Workshop: Science with a small space Telescope*, Eds. H. Kjeldsen, H.R. Bedding, Aarhus Universitet , 17

- [37] D'Cruz, Noella L., Dorman, Ben, Rood, Robert T., and O'Connell, Robert W.: 1996, *The Astrophysical Journal* **466**, 359
- [38] Dorman, Ben.: 1992, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **80**, 701
- [39] Dorman, Ben, Rood, Robert T., and O'Connell, Robert W.: 1993, *The Astrophysical Journal* **419**, 596
- [40] Driezler, S.: 1993, *In White Dwarfs: Advances in Observations and Theory* ed. M.A. Barstow (NATO ASI Ser. 403), 287
- [41] Driezler, S. Schuh, S.L., Deetjen, J.L., Edelmann, H. and Heber, U.: 2002, *Astron. Astrophys.* **386**, 249
- [42] Dziembowski, W.:1971, *Acta Astron.* **21**, 289
- [43] Fontaine, G., Charpinet, S., Brassard, P., Chayer, P., Rogers, F.J., Iglesias, C.A. and Dorman, B.: 1998, *IAUS* , 367-374
- [44] Fontaine, G., Brassard, P., Charpinet, S., Green, E.M., Chayer, P., Billères, M. and Randall, S.K.: 2003, *The Astrophysical Journal* **597**, 518
- [45] For, B.Q., Green, E. M., O'Donoghue, D., Kiss, L.L., Randall, S.K., Fontaine, G., Jacob, A.P., O'Toole, S.J., Hyde, E.A. and Bedding, T.R.: 2006, *The Astrophysical Journal* **642**, 1117
- [46] Fussi-Pecchi, F., and Renzini, A.: 1976, *Astron. Astrophys.* **46**, 447
- [47] Green, E.M., Liebert, J. and Saffer, R.A.:2000, *astro-ph /001 2246*
- [48] Green, E.M., Fontaine, G., Reed, M.D., Callera, K., Seitanzahl, I.R., Whitw, B.A., Hyde, E.A., Ostensen, R., Cordes, O., Brassard, P., Falter, S., Jeffery, E.J., Driezler, S., Schuh, S.L., Giovanni, M., Edelmann, H., Rigby, J. and Bronowska, A.: 2003, *The Astrophysical Journal* **583**, L31
- [49] Greggio, L. and Renzini, A.: 1990, *The Astrophysical Journal* **364**, 35
- [50] Han, Z.: 1998, *M.N.R.A.S* **296**, 1019
- [51] Han, Z., Tout, C.A. and Eggleton, P.P.: 2000, *M.N.R.A.S* **272**, 800
- [52] Han, Z., Podsiadlowski, Ph., Marsh, T.R. and Ivanova, N.: 2002, *M.N.R.A.S* **335**, 948
- [53] Han, Z., Podsiadlowski, Ph., Maxed, P.F.L., Marsh, T.R. and Ivanova, N.: 2002, *M.N.R.A.S* **336**, 449
- [54] Han, Z., Podsiadlowski, Ph. and Marsh, T.R.: 2003, *M.N.R.A.S* **341**, 669
- [55] Heber, U.: 1991, *IAU Simposium 145* , ed. G. Michaud and A. Tutukov (Dordrecht: Kluwer),363
- [56] Heber, U., Reid, I.N. and Werner, K.: 2000, *The Astron. Astrophys.* **363**, 198
- [57] Hubbard, W.B. and Lampe, M.:1969, *Bulletin of the American Astronomical Society* **1**, 193
- [58] Iben, I. Jr and Rood, R.T.: 1970, *The Astrophysical Journal* **161**, 587

- [59] Iben, I. and Tutukov, A.V.: 1986, *The Astrophysical Journal* **311**, 753
- [60] Iben, I.: 1990, *The Astrophysical Journal* **353**, 215
- [61] Iglesias, I. and Rogers, F.: 1996, *The Astrophysical Journal* **464**, 943
- [62] Itoh, N., Mitake, S., Iyetomi, H. and Ichamaru, S.: 1983, *The Astrophysical Journal* **273**, 744
- [63] Itoh, N., Hayashi, H., Nishikawa, A. and Kahyama, Y.: 1996, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **102**, 411
- [64] Jeffery, C.S. and Saio, H.:1998, *M.N.R.A.S* **308**, 221
- [65] Jeffery, C.S., Aerts, C., Dhillon, V.S., Marsh, T.R. and Gänsicke, B.T.:2005, *M.N.R.A.S* **362**, 66
- [66] Jeffery, C.S. and Saio, H.:2006, *M.N.R.A.S* **372**, L48
- [67] Jeffery, C.S. and Saio, H.:2006, *M.N.R.A.S* **371**, 659
- [68] Kilkenney, D., Koen, C., O'Donoghue, D. and Stobie, R.S.: 1997, *M.N.R.A.S* **285**, 640
- [69] Kilkenney, D., O'Donoghue, D., Lynas-Gray, A.E. and van Wyk, F.: 1998, *M.N.R.A.S* **296**, 329
- [70] Kilkenney, D., Koen, C., D., O'Donoghue, D., Van Wyk, F. Larson, K.A., Shobbrook, R., Sullivan, D.J., Burleigh, M.R., Doobie, P.D. and Kawaler, S.D.: 1999, *M.N.R.A.S* **303**, 525
- [71] Kilkenney, D.: 2002, *Radial and Nonradial Pulsations as Probes of Stellar Physics* in IAU Coll. 185, ed C. Aerts, T.R. Bedding and Christensen-Dalsgaard (San Francisco:ASP), 356
- [72] Kilkenney, D., Reed, M., O'Donoghue, D., Kawaler, S.D., Mukadam, A., Kleinman, S.J., Nitta, A., Metcalfe, T.S., Provencal, J.L., Watson, T.K., Sullivan, D.J., Sullivan, T., Shobbrook, R., Jiang, X.J., Joshi, S., Ashoka, B.N., Seetha, S., Leibowitz, P., Ibbecson, P., Mendelson, H., Meištas, E., Kalytis, R., Ališauskas, D., Martinez, P., van Wyk, F., Stobie, R.S., Marang, F., Zola, S., Krzesinski, J., Ogloza, W., Moskalik, P., Silvotti, R., Piccioni, A., Vauclair, G., Dolez, N., Chevreton, M., Dreizler, S., Schuh, S.L., Deetjen, J.L., Solheim, J.-E., González Pérez, J.M., Ulla, A., Østensen, R., Manteigo, M., Suarez, O., Burleigh, M., Kepler, S.O., Karan, A. and Giovannini, O.: 2003, *M.N.R.A.S* **345**, 834
- [73] Kilkenney, D., Stobie, R.S., O'Donoghue, D., Koen, C., Hambly, N., MacGillivray, H. and Lynas-Gray, A.E.: 2006, *M.N.R.A.S* **367**, 1603
- [74] Kippenham Kippenhahn, R., Weigert, A., and Hofmeister, E., 1967 in *Methods in Computational Physics*, 6, 129
- [75] Koen, C., Kilkenney, D., O'Donoghue, D., Van Wyk, F. and Stobie, R.S.: 1997, *M.N.R.A.S* **285**, 645
- [76] Koen, C.: 1998, *M.N.R.A.S* **300**, 567
- [77] Koen, C., Kilkenney, D., O'Donoghue, D., Kilkenney, D., Lynas-Gray, A.E. and Marang, F.: 1998a, *M.N.R.A.S* **296**, 317
- [78] Koen, C., O'Donoghue, D., Pollacco, D. and Nitta, A.: 1998b, *M.N.R.A.S* **300**, 1105

- [79] Koen, C., O'Donoghue, D., Pollacco, D. and Charpinet, S.: 1999a, *M.N.R.A.S* **305**, 28
- [80] Koen, C., O'Donoghue, D., Kilkenney, P., Stobie, R. and Saffer, R.: 1999b, *M.N.R.A.S* **306**, 213
- [81] Koen, C., O'Donoghue, D., Kilkenney and Pollacco, D.L: 2004, *New Astronomy* **9**, 565
- [82] Magni, G. and Mazzitelli, L.:2001, *Astron. Astrophys.* **72**, 134
- [83] Maxted, P.F.L., Heber U., Marsh, T.R. and North, R.C.: 2001, *M.N.R.A.S* **326**, 1391
- [84] McGraw, J.T., Star4rfield S.G., Liebert, J. and Green, R.F.: 1979, *IAU Colloq. No. 53*, ed. H. M. Van Horn and V. Weidemann (Univ. de Rochester, Rochester), 377
- [85] Menguel, J.G., Norris, J. and Gross, P.G.:1976, *The Astrophysical Journal* **204**, 488
- [86] Michaud, G., Bergeron, P. Wesmael, F. and Fontaine, G.:1985, *The Astrophysical Journal* **299**, 741
- [87] Morales-Rueda, L., Maxted, P.F.L, Marsh, T.R., North, R.C. and Heber, U.: 2003, *M.N.R.A.S* **338**, 752
- [88] Morales-Rueda, L., Maxted, P.F.L, Marsh, T.R., Kilkenney, D. and O'Donoghue, D.O.: 2005, *Astronomical Society of the Pacific* , 333
- [89] O'Donoghue, D., Lynas-Gray, A.E., Kilkenney, D., Stobie, R.S., and Koen, C.: 1997, *M.N.R.A.S* **285**, 657
- [90] O'Donoghue, D., Koen, C., Solheim, J.-E., Barstow, A., Dobbie, P.D., O'Brien, M.S., Clemens, J.C., Sullivan, D.J. and Kawaler, S.D.: 1998, *M.N.R.A.S* **296**, 296
- [91] O'Donoghue, D., Koen, C., Lynas-Gray, A.E., Kilkenney, D. and van Wyk, F.: 1998a, *M.N.R.A.S* **296**, 306
- [92] Oreiro, R., Ulla, A., Pérez Hernández, F., Østensen, R, Rodríguez López, C. and MacDonald, J.: 2004, *Astron. Astrophys.* **418**, 243
- [93] Oreiro, R., Ulla, A., Pérez Hernández, F., MacDonald, J., Østensen, R and Rodríguez López, C.: 2005, *Astronomical Society of the Pacific* , 631
- [94] Oreiro, R., Pérez Hernández, F., Østensen, Solheim, J.E., MacDonald, J., and Ulla, A.: 2005, *Astron. Astrophys.* **461**, 585
- [95] Østensen, R., Solheim, J.-E., Heber, U., Silvotti, R., Dreizler, S. and Edelman, H.: 2001a, *Astron. Astrophys.* **368**, 175
- [96] Østensen, Heber, U., Silvotti, R., Solheim, J.-E., Dreizler, S. and Edelman, H.: 2001b, *Astron. Astrophys.* **378**, 466
- [97] O'Toole, S.J., Heber, U., Jeffery, C.S., Dreizler, S. Schuh, S.L., Woolf, V.M., Falter, S., Green, E.M., For, B.-Q., Hyde, E.A., Kjeldsen, H., Mauch, T. and White, B.A.: 2005, *Astrom. Astrophys.* **440**, 667
- [98] O'Toole, S.J. and Heber, U.: 2006, *Astrom. Astrophys.* **452**, 579
- [99] Paczyński, B.:1976, *Structure and Evolution of Close Binaries* in Eggleton P.P., Milton S., Whelans J., eds. Kluwer, Dordrecht, P. 75.

- [100] Randall, S., Fontaine, G., Green, E.M., Kilkenny, D, Crause, L. Cordes, O., O'Toole, S., Kiss, L., For, B.-Q. and Quirion, P.-O.: 2004, *ApandSS* **291**, 465
- [101] Randall, S.K., Matthews, J.M., Fontaine, G., Rowe, J., Kusching, R., Green, E.M., Brassard, P., Chayer, P., Guenther, D.B., Moffat, A.F.J., Rucinski, S., Sasselov, D., Walker, G.A.H. and Weiss, W.W.: 2005, *The Astrophysical Journal* **633**, 460
- [102] Randall, S.K., Fontaine, G., Green, E.M., Brassard, P., Kilkenny, D, Crause, L. Terndrup, D.M., Daane, A., Kiss, L., Jacob, A.P., Bedding, T.R., For, B.-Q. and Quirion, P.-O.: 2005b, *The Astrophysical Journal*
- [103] Randall, S.K., Mahttews, J.M., Fontaine, G., Rowe, J., Kuschnig, R., Green, E.M., Brassard, P., Chayer, P., Guenther, D.B., Moffat, A.F.J., Rucinski, S., Sasselov, D., Walker, G.A.H. and Weiss, W.W.: 2005c, *The Astrophysical Journal* **633**, 460
- [104] Randall, S.K., Fontaine, G., Charpinet, S., Lynas-Gray, A.E., Lopes, I.P., O'Toole, S.J. and Brassard, P.: 2006, *The Astrophysical Journal* **648**, 637
- [105] Randall, S.K., Fontaine, G., Green, E.M., Brassard, P., Kilkenny, D., Crause, L., Terndrup, D.M., Daane, A., Kiss, L.L., Jacob, A.P., Bedding, T.R., For, B.-Q., Quirion, P.-O. and Chayer, P.: 2006, *The Astrophysical Journal* **643**, 1198
- [106] Randall, S.K., Green, E.M., Fontaine, G., Brassard, P., Terndrup, D.M., Brown, N., Fontaine, M., Zacharias, P. and Chayer, P. : 2006, *The Astrophysical Journal* **645**, 1464
- [107] Reed, M.D., Kawaler, S.D. and Kleinman, S.J. : 2000, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series* **203**, 503
- [108] Reed, M.D., Kawaler, S.D., Zola, S., Jiang, X.J., Dreizler, S., Schuh, S.L., Deetjen, J.L., Kalytis, R., Meistas, E., Janulis, R., Alisauskas, D., Krzesinski, J., Vuckovic, M., Moskalik, P., Ogloza, W., Baran, A., Stachowski, G., Krutz, D.W., González Pérez, J.M., Mukadam, A., Watson, T.K., Koen, C., Bradley, P.A., Cunna, M.S., Kilic, M., Klumpe, E.W., Carlton, R.F., Handler, G., Kilkenny, D., Riddle, R., Dolez, N., Vauclair, G., Cheverton, M., Wood, M.A., Grauer, A., Bromage, G., Solheim, J.E., Østensen, R., Ulla, A., Burleigh, M., Good, S., Hürkal, Ö., Anderson and Parkstiene E.: 2004, *M.N.R.A.S* **348**, 1164
- [109] Reed, M.D., Green, E.M., Callera, K., Seitzzahl, I.R., White, B.A., Hyde, E.A., Giovanni, M.K., Østensen, R., Brenowska, A., Jeffery, E.J., Cordes, O., Falter, S., Edelman, H., Dreizler, S and Schuh, S.L.:2004, *The Astrophysical Journal* **607**, 445
- [110] Reed, M.D., Eggen, J.R., Zhou, A.-Y., Terndrup, D.M., Harms, S.L. and Hashier, M.A.: 2006, *M.N.R.A.S* **369**, 1529
- [111] Reimers, D.: 1975, *Mem. Soc. Roy. Liege 6 Ser* **8**, 369
- [112] Renzini, A.: 1977, *in Advanced Stages of Stellar Evolution* ,(Geneva: Geneva Obs.), 149
- [113] Renzini, A.: 1981, *in Effects of Mass Loss on Stellar Evolution* ed C. Chiosi and R. Stalio (Dordrecht, Reidel), 319
- [114] Renzini, A.: 1997, *in Advanced Stages of Stellar Evolution* (Geneva:Geneva Obs.) p.351
- [115] Saffer, R.A., Bergeron, P., Wesemael, F. and Liebert, J.: 1994, *The Astrophysical Journal* **432**, 351

- [116] Schuh, S., Huber, J., Dreizler, S., Heber, U., O'Toole, S.J., Green, E.M. and Fontaine, G.: 2006, *Astron. Astrophys.* **445**, L31
- [117] Silviotti, R., Solheim, J.-E., González Pérez, J., Heber, U. Dreizler, S., Edelman, H., Østensen, R. and Kotak, R.: 2000, *Astron. Astrophys.* **359**, 1068
- [118] Silviotti, R., Bonanno, A., Frasca, A., Bernabei, S., Janulis, R., Østensen, R., Kin, S.-L., Park, B.-G., Guo, J., Liu, Z., Reed, M.D., Patterson, R.S., Gietzen, K.M., Clark, P.J., Wolf, G.W., Lipkin, Y., Formigini, L., Liebowitz, E., Oswalt, T.D., Rudkin, M. and Johnston, K.: 2004a, *Astrophysics and Space Science* **291**, 445
- [119] Silviotti, R., Østensen, R., Heber, U. Solheim, J.-E., Dreizler, S. and Altmman, M.: 2002, *Astron. Astrophys.* **383**, 239
- [120] Solheim, J.-E., Østensen, R., Silvotti, R. and Heber, U.: 2004, *Astrophysics and Space Science* **291**, 419
- [121] Stobie, R.S., Kawaler, S.D., Kilkenny, D., O'Donoghue, D. and Koen, C.: 1997, *M.N.R.A.S* **285**, 651
- [122] Sweigart, A.V.: 1997, *The Astrophysical Journal* **474**, L23
- [123] Tassoul, M.: 1980, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **43**, 469
- [124] Telting, J.H. and Østensen, R.H.: 2004, *Astron. Astrophys.* **419**, 685
- [125] Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H. and Shibahashi, H.: 1989, *Nonradial Oscillation in Stars* University of Tokyo Press 2nd. ed.
- [126] Vuckovic, M., Kawaler, S.D., O'Toole, S., Csubry, Z., Baran, A., Zola, S., Moskalik, P., Klumpe, E.W., Riddle, R., O'Brien, M.S., Mullally, F., Wood, M.A., Wilkat, V., Zhou, A.Y., Reed, M.D., Terndrup, D.M., Sullivam, D.J., Kim, S.L., Chen, W.P, Chen, C.W., Hsaio, W.S., Sanchawala, K., Lee, H.T., Jiang, X.J., Janulis, R., Siwak, M., Ogloza, W., Paparo, M., Bognar, Z., Sodor, A., Handler, G., Lorenz, D., Steininger, B., Silvotti, R., Vauclair, G., Oreiro, R., Østensen, R., Bronowska, A., Castenheira, B.G., Kepler, S.O., Fraga, L., Shipman, H.L., Provencal, J.L. and Childers D.: 2006 *The Astro-ph* 0604330 v1
- [127] Webbink, R. F.: 1984, *The Astrophysical Journal* **277**, 355
- [128] Woudt, P.A., Kilkenny, D., Zeitsman, E., Warner, B., Loaring, N.S., Copley, C., Kniazev, A., Väisänen, P., Still, M., Stobie, R.S., Brugh, E.B., Nordsieck, K.H., Percival, J.W., O'Donoghue, D and Buckley, D.A.H.: 2006, *M.N.R.A.S* **371**, 1497
- [129] Zhou, A.-Y., Reed, M.D., Harms, S., Terndrup, D.M., Zola, S., Gazeas, K.D., Niarchos, P.G., Ogloza, W., Baran, A. and Wolf, G.W.: 2006, *M.N.R.A.S* **367**, 179