



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Tesis de Licenciatura:

*Pulsaciones no-radiales, no-adiabáticas en estrellas
pre-enanas blancas PG1159*

Antonela Monachesi

Director: Dr. Alejandro H. Córscico
Co-Director: Dr. Leandro G. Althaus

LA PLATA, MAYO DE 2006

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivos y motivación	1
1.2. Conceptos básicos de pulsaciones estelares	2
1.2.1. Características principales de los modos p y g	4
1.2.2. Frecuencias características de oscilación	5
1.2.3. Atrapamiento de modos	7
1.2.4. Escalas de tiempo	8
1.3. Evidencia observacional de pulsaciones no-radiales	10
1.3.1. Astrosismología	11
1.3.2. Clases de estrellas pulsantes	12
1.4. Estrellas enanas blancas	14
1.4.1. Características generales de las enanas blancas	14
1.4.2. Propiedades de las enanas blancas pulsantes	16
2. Ecuaciones generales	20
2.1. Ecuaciones de la hidrodinámica	20
2.2. Ecuaciones de oscilación	22
2.2.1. Separación de las coordenadas temporales y angulares	25
2.2.2. Condiciones de borde	30
2.3. Formulación adimensional	31
3. Mecanismos de excitación	35
3.0.1. Zonas de excitación y de amortiguamiento	35
3.0.2. Mecanismo $\kappa - \gamma$	38
3.0.3. Mecanismo ε	40
4. Código numérico	41
4.1. Método iterativo	41
4.1.1. Obtención de las soluciones adiabáticas del problema	49
4.2. Código de pulsaciones no-radiales, no-adiabáticas	50

5. Aplicaciones del Código Numérico: Estrellas PG1159 pulsantes	53
5.1. Características principales de las PG1159s	53
5.2. Detalles del análisis numérico	55
5.3. Resultados del análisis de estabilidad	58
5.3.1. Regiones de inestabilidad en las estrellas PG1159 pulsantes	58
5.3.2. Coeficiente de estabilidad	61
5.3.3. Períodos adiabáticos vs. períodos no-adiabáticos	64
5.3.4. Excitación y amortiguamiento de modos	65
5.3.5. Modelos con difusión	71
6. Conclusiones y proyectos futuros	79

Capítulo 1

Introducción

1.1. Objetivos y motivación

Desde hace algunos años, en nuestro Observatorio se ha comenzado el estudio de las pulsaciones estelares en estrellas enanas blancas. Hasta ahora, todos los cálculos han sido realizados dentro de la aproximación adiabática (Córscico, A.H. 1998, 2003).

En esta Tesis nos proponemos generalizar el código de pulsaciones adiabáticas no-radiales desarrollado por Córscico, A. H.(1998), relajando la condición de adiabaticidad, de manera que permita calcular pulsaciones no-radiales, no-adiabáticas de estrellas pre-enanas blancas y enanas blancas. La importancia de relajar la condición de adiabaticidad se debe a que esta aproximación, si bien es útil para predecir con gran exactitud el valor de los períodos de oscilación de un dado modelo estelar, no proporciona información acerca de cuáles, de los infinitos modos posibles que conforman el espectro de pulsación, pueden llegar a alcanzar amplitudes lo suficientemente grandes como para ser observados en estrellas reales. Y esto es lo que pretendemos analizar aquí.

Luego de la generalización, nos proponemos poner a prueba el código numérico y estudiar la estabilidad pulsacional de las estrellas pre-enanas blancas de tipo espectral PG1159 ($80000 \leq T_{\text{eff}} \leq 180000K$) comparando nuestros resultados con los obtenidos por otros investigadores.

Para cumplir con este objetivo, además de un programa numérico que calcule de manera eficiente los modos de pulsación, es fundamental contar con las herramientas necesarias para elaborar modelos muy detallados de las configuraciones en equilibrio de las estrellas bajo estudio, un punto de crucial importancia en el estudio de estrellas pulsantes. Afortunadamente disponemos de modelos estelares detallados proporcionados por el Grupo de Evolución Estelar y Pulsaciones de nuestro Observatorio, que desde hace más de una década está abocado al estudio de la evolución de estrellas enanas blancas, principalmente a través del empleo de códigos numéricos de evolución estelar elaborados en forma independiente de otros grupos de investigación. En los últimos años se ha incorporado, además, el modelado de las etapas evolutivas que llevan a la formación de enanas blancas y, a través

del mencionado código adiabático de pulsaciones, el estudio de las propiedades oscilatorias¹ de este tipo de estrellas.

Es importante destacar aquí la gran importancia de estudiar la estructura y evolución de estrellas enanas blancas. En primer lugar, estas estrellas constituyen la etapa final más común en la evolución estelar, y ésto las provee de un atractivo intrínseco a los ojos de los investigadores, dado que poseen en su interior un registro de los procesos que experimentan los progenitores de dichas estrellas durante las etapas evolutivas previas. En segundo lugar, un conocimiento más profundo de las propiedades de estas estrellas es deseable para explorar el comportamiento de la materia en condiciones extremas de densidad y temperatura (las cuales no pueden ser obtenidas en laboratorios terrestres).

Existen atractivos adicionales, en un contexto astrofísico más general, como por ejemplo la posibilidad de estimar la edad del disco galáctico local. En efecto, la velocidad de enfriamiento de una enana blanca depende de la composición química de su núcleo. Conocer esta tasa de enfriamiento implica, en principio, conocer sus edades. Si tenemos en cuenta que las enanas blancas más frías son los objetos más antiguos de la Galaxia, entonces sus edades nos informan, en principio, acerca del instante de formación de la primer generación de estrellas en la Vía Láctea. Así, el estudio de las enanas blancas nos permite estimar, en forma indirecta, la edad del disco galáctico local.

1.2. Conceptos básicos de pulsaciones estelares

Muchas estrellas experimentan variaciones periódicas en sus brillos en ciertas etapas de su vida, modificando así sus volúmenes y sus principales características. En muchos casos, dicha variabilidad es una manifestación de la pulsación estelar, por medio de la cual el gas de la estrella experimenta un desplazamiento oscilatorio con alguna frecuencia particular. Dicho desplazamiento provoca la compresión y expansión del gas, lo cual genera perturbaciones en la temperatura. Son estas perturbaciones de temperatura junto con las variaciones del radio estelar las que conducen a la variabilidad periódica observada en el brillo de las estrellas variables.

Las inestabilidades pulsacionales se encuentran en muchas fases de la evolución estelar, para un amplio rango de masas estelares. Debido a que las pulsaciones estelares son auto-oscilaciones de las estrellas, las frecuencias de pulsación contienen información acerca de la estructura interna de las mismas. Así, el análisis de tales inestabilidades nos proporciona una oportunidad única e inigualable de estudiar la constitución interna y los estados evolutivos de este tipo de objetos, información imposible de obtener a través de las técnicas astrofísicas tradicionales (fotometría, espectroscopía), las cuales brindan información sólo de la parte externa de la estrella.

Aunque hasta el momento existen varios cálculos no-lineales, la mayor parte del progreso en nuestro entendimiento acerca de las oscilaciones estelares se hizo suponiendo que las amplitudes de oscilación son pequeñas y por lo tanto se trabajó con la aproximación lineal, simplificando en gran medida los cálculos matemáticos. Lo más importante es que, en la

¹Aquí y a lo largo de toda la Tesis se utilizarán los términos pulsaciones y oscilaciones indistintamente.

mayoría de los casos, las predicciones de la teoría lineal están en un muy buen acuerdo con las observaciones.

Las frecuencias naturales en las que puede oscilar una estrella son llamadas autofrecuencias (σ), ya que la descripción matemática de las pulsaciones estelares nos conduce a un problema de autovalores con dependencia temporal $e^{i\sigma t}$.

Por otro lado, si en el modelo teórico las oscilaciones se asumen adiabáticas, es decir, se supone que no existen ganancias ni pérdidas de calor neto debido a las oscilaciones de los elementos de masa, las pulsaciones mantendrán siempre la misma amplitud, es decir serán estrictamente periódicas. Esto, en términos matemáticos, significa que las autofunciones y autofrecuencias son cantidades reales. Sin embargo, las oscilaciones en estrellas reales son inevitablemente no-adiabáticas, es decir los elementos de masa intercambian cierta cantidad de calor al oscilar. Como consecuencia de ello, en estos casos, existe un lento cambio en la amplitud pulsacional (crecimiento o decrecimiento). Esto significa que las autofunciones y autofrecuencias no son reales sino complejas en la descripción matemática de las oscilaciones no-adiabáticas lineales.

Existen dos tipos de pulsaciones: radiales y no-radiales. El caso más simple de oscilación es el de las pulsaciones radiales, a raíz de las cuales una estrella se expande y contrae manteniendo siempre su forma esférica. Las ondas involucradas en estos modos radiales son esencialmente ondas estacionarias, con un nodo en el centro de la estrella, donde el gas no se mueve, y un antinodo en la superficie. Los modos normales están caracterizados por el número de nodos k en la componente radial del desplazamiento. El valor k es comúnmente llamado orden radial de la pulsación, mientras que la frecuencia angular del modo fundamental y de los k -ésimos armónicos son usualmente denotadas con σ_0 y σ_k , respectivamente.

A diferencia de las pulsaciones radiales, en el caso de las oscilaciones no-radiales la simetría esférica de la estrella no se conserva al oscilar y la dirección del desplazamiento ahora depende de las coordenadas angulares del elemento de masa, con lo cual, éste no sólo oscila en forma radial, sino que al mismo tiempo oscila horizontalmente. Este tipo de oscilación es el más general y será nuestro objeto de estudio pues es el responsable de la variabilidad de estrellas enanas blancas y pre-enanas blancas. Los modos normales están caracterizados por autofunciones que son proporcionales a los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ (Ver Capítulo 2). Necesitamos ahora 3 números para caracterizar los modos normales de pulsación: el orden radial k , el grado armónico ℓ y el orden acimutal m . El orden radial, en este caso, no siempre es exactamente igual al número de nodos de la componente radial del vector desplazamiento, aunque dicha correspondencia se dá en la mayoría de los casos. El grado armónico ℓ es un número entero positivo, y representa el número de contornos en que se divide la superficie estelar al oscilar. El orden acimutal m es un número entero que puede tomar los valores $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$, que se corresponden con el número de raíces de $\cos(m\varphi) = 0$, en la región $0 \leq \varphi \leq \pi$. En este tipo de oscilaciones encontramos que dado un modo normal, tendremos ℓ líneas nodales ² sobre la superficie, de las cuales $|m|$ líneas son perpendiculares al ecuador de la estrella ($\theta = 90$) y $\ell - |m|$ paralelas al mismo. Los

²Las líneas nodales son aquellas en las cuales no hay movimiento.

modos de pulsación con $\ell = |m|$ se llaman **modos sectoriales** para los cuales todas las líneas nodales son líneas de longitud; aquellos con $m = 0$ se llaman **modos zonales**, para los cuales las líneas nodales son líneas de latitud; y aquellos modos que tengan $0 \neq |m| \neq \ell$ son **modos tesorales**, y sus líneas nodales son de latitud y longitud.

Podemos notar aquí que las pulsaciones no-radiales son el caso más general de oscilaciones estelares, ya que las pulsaciones radiales pueden considerarse como un caso especial dentro de éstas, que se da cuando el grado armónico ℓ es igual a 0. Los casos particulares de armónicos $\ell = 1$ y $\ell = 2$ se llaman modos dipolares y modos cuadrupolares, respectivamente.

En el caso general de pulsaciones no-radiales, la frecuencia de oscilación σ depende de k , ℓ y m , pero como veremos en el Capítulo 2, bajo ciertas restricciones, los modos con igual ℓ y k pueden llegar a tener la misma frecuencia pulsacional, independientemente del valor de m . Las oscilaciones de este tipo se llaman degeneradas.

La característica física principal que diferencia las pulsaciones radiales y las pulsaciones no-radiales es que en el último caso, no sólo la presión sino la gravedad puede actuar (a través de la flotación o “buoyancy”) como fuerza restitutiva de las oscilaciones. Esta diferencia conduce a que exista una mayor riqueza de modos en las pulsaciones no-radiales en comparación con las radiales, ya que mientras las oscilaciones radiales tienen un sólo espectro de modos de presión, las oscilaciones no-radiales muestran además un espectro de modos de gravedad. Estos dos tipos de modos se llaman, respectivamente, modos p y modos g .

1.2.1. Características principales de los modos p y g

Hablaremos aquí acerca de las características principales de los dos tipos de modos que pueden existir en una oscilación no-radial, los modos p y los modos g , y que definen una familia de modos llamados modos esferoidales ³.

Como ya dijimos, la fuerza restauradora de los modos p es la fuerza de presión proveniente de la compresibilidad del gas, como en el caso de las pulsaciones radiales. Así, los modos p son el análogo no-radial de los modos radiales, y por lo tanto, son ondas de sonido afectadas por el campo gravitatorio de la estrella. Estos modos se designan usualmente p_k siendo k el orden radial. El modo p_k es considerado como el análogo no-radial de un modo radial de orden $k - 1$. Por otro lado, la fuerza restauradora para los modos g es la fuerza de gravedad que actúa a través de la flotación, y trabaja sólo para perturbaciones sin simetría esférica, por lo tanto no encontramos analogía en los modos radiales. En este caso, los elementos de masa oscilan predominantemente en forma horizontal. De manera similar que para los modos p , los modos g se designan con g_k , donde k es el orden radial. Los modos g son dinámicamente estables ($\sigma^2 > 0$) y por lo tanto oscilatorios sólo en las zonas radiativas y en las regiones más externas de la estrella.

³En presencia de rotación aparece otra clase de modos, llamados modos Rossby o modos- r . Estos modos pertenecen a la familia de modos toroidales. En ausencia de rotación, los modos- r consisten en un movimiento horizontal con frecuencia cero.

Como sabemos, las oscilaciones globales de una estrella tienen un espectro discreto de frecuencias. Las frecuencias [períodos] de los modos p crecen [decrecen] a medida que el número de nodos, o sea el orden radial, crece; mientras que las frecuencias [períodos] de los modos g son menores [mayores] a medida que el número de nodos crece.

Para estrellas de secuencia principal, la zona en la cual se propagan los modos p (denominada P) se encuentra en la envoltura, donde la amplitud de oscilación es grande, mientras que la zona de propagación de los modos g (llamada G) se encuentra en el núcleo. Sin embargo, en el caso de enanas blancas, la ubicación de las zonas de propagación de los diferentes modos es completamente opuesta a lo que acabamos de mencionar y, por lo tanto, los roles de los modos p y g son intercambiados.

Un aspecto importante con respecto a los modos no-radiales es que tanto los modos p como los modos g son soluciones del mismo conjunto de ecuaciones. La transición de bajas a altas frecuencias nos indica que el movimiento de los elementos de masa cambia progresivamente de movimiento horizontal a movimiento puramente radial. Es más, un modo puede tener características tanto de modo p como de modo g . Tales modos son usualmente designados como modos mixtos y pueden aparecer en modelos estelares con alta concentración de masa en el núcleo.

Entre el orden radial más bajo de los modos g y p , para un dado grado armónico ℓ mayor que 1, existe un modo fundamental llamado modo f , cuya autofrecuencia es intermedia entre las de modos p y modos g y cuya autofunción no tiene nodos en la dirección radial. Como este modo fundamental sólo existe para $\ell > 1$ no tiene análogo radial y puede ser considerado como un modo p o un modo g sin nodos, es decir modo p_0 o modo g_0 . En la Figura 1.1 podemos observar los diferentes tipos de modos para el caso de pulsaciones adiabáticas de una polítropa de índice 3. Ellos se encuentran indicados como p_k , f y g_k , siendo k el orden radial. Podemos notar que hay dos secuencias de autovalores. Una de ellas tiende a infinito a medida que k crece, para un dado ℓ (modos p) y la otra tiende a cero en estas mismas circunstancias (modos g). También podemos observar que para un dado k , la frecuencia crece a medida que ℓ lo hace y que los modos f sólo existen para $\ell > 1$. Es importante destacar que el modo f puede adquirir nodos en el caso de modelos estelares con muy alta densidad central.

Debido a que los espectros de modos g y modos p muestran infinitos modos normales correspondientes a los diferentes valores de k y ℓ , podrían encontrarse autofrecuencias no-radiales en todo el espectro de frecuencias. Sin embargo no todas ellas están necesariamente excitadas. Para que un modo sea excitado debe operar algún mecanismo de excitación en la región donde la amplitud de las autofunciones es relativamente grande (ver Capítulo 3).

1.2.2. Frecuencias características de oscilación

Las características cualitativas de las oscilaciones no-radiales, y por lo tanto la clasificación de los diferentes modos, pueden entenderse mejor si hacemos un tratamiento local, donde los coeficientes de las ecuaciones pertinentes (Ver Capítulo 2), son constantes. En esta aproximación obtenemos la siguiente relación de dispersión:

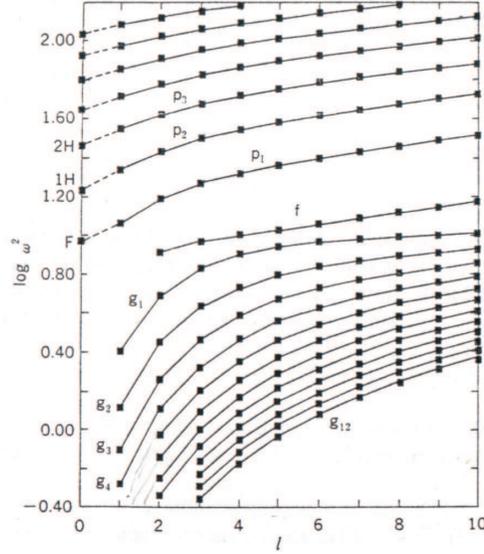


Figura 1.1: El cuadrado de la frecuencia adimensional $w^2 (= \frac{\sigma^2 R^3}{GM})$ en función del grado armónico ℓ para pulsaciones adiabáticas de una polítropa de índice $N=3$. Las pulsaciones radiales corresponden a $\ell = 0$. Se encuentran indicados los diferentes modos de pulsación: p_k , f y g_k , siendo k el orden radial. Podemos notar que hay dos secuencias de autovalores. Una de ellas tiende a infinito a medida que k crece, para un dado ℓ (modos p) y la otra tiende a cero en estas mismas circunstancias (modos g). También podemos observar que para un dado k , la frecuencia crece a medida que ℓ lo hace. (Figura adaptada de Unno et al., 1989).

$$k_r^2 = \frac{(\sigma^2 - L_\ell^2)(\sigma^2 - N^2)}{\sigma^2 c_s^2} \quad (1.1)$$

que relaciona el número de onda radial k_r con la frecuencia σ .

Podemos notar aquí la aparición de dos frecuencias: L_ℓ y N , que caracterizan las propiedades vibratorias locales y son las llamadas frecuencia de Lamb y frecuencia de Brunt-Väisälä, respectivamente. Se encuentran definidas de la siguiente manera:

$$L_\ell^2 \equiv \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} c_s^2 = (k_h c_s)^2 \quad (1.2)$$

$$N^2 \equiv -gA = g \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = g \left(\frac{-g}{c_s^2} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) \quad (1.3)$$

donde c_s es la velocidad del sonido local, definida como $c_s^2 \equiv \Gamma_1 P / \rho$, g es la aceleración gravitatoria local ($g = GM_r / r^2$) y k_h está relacionado con la longitud de onda horizontal. La primera de éstas dos frecuencias caracteriza las propiedades de las ondas de sonido. En efecto, una onda de sonido recorre una longitud de onda $\lambda_h = \frac{2\pi r}{\ell}$ horizontalmente en un período $P = \frac{2\pi}{L_\ell}$. Por otro lado, la frecuencia de Brunt-Väisälä se corresponde con la frecuencia en que una burbuja de gas puede oscilar verticalmente alrededor de su posición

de equilibrio, bajo la acción de la gravedad. Así, la frecuencia de Brunt-Väisälä caracteriza las propiedades de las ondas de gravedad.

La relación de dispersión muestra que, como ya sabíamos, hay dos tipos de oscilaciones posibles: modos p , los cuales se propagan como ondas cuando $\sigma^2 > L_\ell^2, N^2$; y modos g , los cuales se propagan cuando $\sigma^2 < L_\ell^2, N^2$. En ambos casos, k_r es real y la oscilación se propaga en dirección radial. Por otro lado, en las regiones donde $N^2 > \sigma^2 > L_\ell^2$ ó $L_\ell^2 > \sigma^2 > N^2$ el número de onda k_r es puramente imaginario, la autofunción no muestra oscilación espacial y la amplitud se oscilación decae exponencialmente con la distancia, siendo ésta una onda evanescente. Luego, la naturaleza física de un modo y su zona de propagación estarán determinadas por el valor de su propia autofrecuencia en relación a las frecuencias críticas N y L_ℓ .

Como ya dijimos, la frecuencia de Brunt-Väisälä define las características globales del espectro de modos g , que son los que más nos interesan. En el caso de pulsaciones de enanas blancas, el cómputo de esta cantidad requiere un tratamiento numérico especial, sobre todo en las regiones centrales, altamente degeneradas, de estas estrellas (Ver Capítulo 4).

Luego, tendremos que el interior estelar queda dividido en zonas de propagación y en zonas evanescentes.

1.2.3. Atrapamiento de modos

Los modos p y los modos g , responsables de las oscilaciones no-radiales, se propagan en la dirección radial sólo en regiones restringidas dependiendo de las propiedades de las ondas. Cada modo de oscilación posee una zona de propagación o cavidad principal donde está confinada la mayor parte de la energía de oscilación. Los modos que se propagan se tornan ondas estacionarias sólo si poseen frecuencias para las cuales las ondas son reflejadas en los bordes de las cavidades resonantes de tal manera que retornan exactamente en fase con ellas mismas. Dicho de otro manera, las oscilaciones quedan atrapadas en una región de propagación, hecho conocido en la literatura como *mode trapping*. El atrapamiento de modos en regiones P o G es un fenómeno general que se dá en todas las estrellas pulsantes, y por lo tanto es de fundamental importancia en la teoría de oscilaciones no-radiales. En estrellas enanas blancas y pre-enanas blancas pulsantes se produce otro fenómeno de *mode trapping*, debido a la presencia de gradientes de composición química. Para más detalles, ver Córscico, A.H (2002) y Córscico & Althaus (2006), los cuales han realizado un estudio detallado de las propiedades y características del atrapamiento de modos en estrellas PG1159 pulsantes.

Para visualizar la condición de atrapamiento de modos en modelos estelares reales, se construye un diagrama en el cual L_ℓ^2 y N^2 son graficadas como funciones de la coordenada radial r . Dichos diagramas se llaman *diagramas de propagación* (Ver Unno et al. 1989 ; Cox 1980). Los nodos para los modos p y los modos g aparecen, respectivamente en las zonas de propagación de tipo P y de tipo G , donde $k_r > 0$. A partir de los diagramas de propagación se puede visualizar que el comportamiento de L_ℓ^2 no difiere cualitativamente para distintos tipos de estrellas, siendo muy grande su valor en $r = 0$ y decreciente en forma monótona a medida que r crece. Por el contrario, el comportamiento de N^2 cambia

sensiblemente con la evolución estelar.

Por ejemplo, el diagrama de propagación de una enana blanca está caracterizado por valores muy bajos de la frecuencia de Brunt-Väisälä en su núcleo, debido a la fuerte degeneración electrónica que es responsable de los largos períodos de los modos g de este tipo de estrellas. Luego, N crece drásticamente en la envoltura radiativa no-degenerada. Consecuentemente, los modos g no-radiales están selectivamente atrapados en las envolturas químicamente estratificadas de este tipo de estrellas. Por el contrario, los modos p están atrapados en las regiones del núcleo. Esto puede observarse en la Figura 1.2.

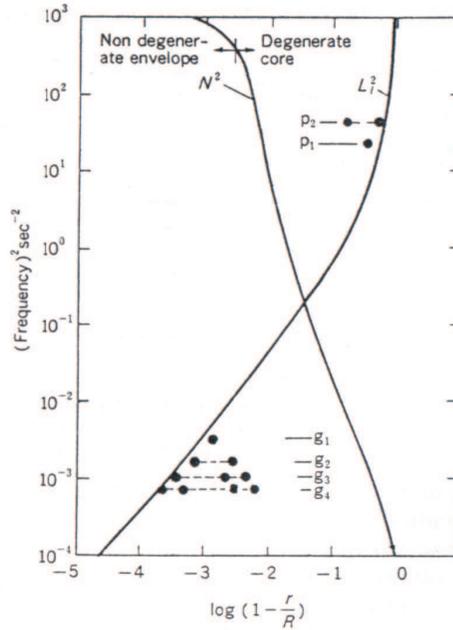


Figura 1.2: Diagrama de propagación para una enana blanca de $1 M_{\odot}$ con $\log(L/L_{\odot}) = -4,2$ y $\log(T_{\text{eff}}) = 3,83$ en el caso de $\ell = 2$, donde el centro estelar está ubicado en el origen (a la derecha) del eje horizontal. Como se observa, el diagrama está caracterizado por valores muy bajos de la frecuencia de Brunt-Väisälä en el núcleo estelar, debido a la fuerte degeneración electrónica que es responsable de los largos períodos de los modos g de este tipo de estrellas. Luego, N crece drásticamente en la envoltura radiativa no-degenerada. Por el contrario, la frecuencia de Lamb toma valores muy grandes en $r = 0$, y luego decrece monótonamente a medida que r crece. La ubicación de los nodos radiales para los modos g y p se encuentran indicados con círculos negros. (Figura adaptada de Hansen, 1980).

1.2.4. Escalas de tiempo

Definiremos aquí las escalas de tiempo que deben ser consideradas a la hora de trabajar con pulsaciones estelares, sobre todo para tener en cuenta el grado de adiabaticidad del problema.

La escala de tiempo de oscilación τ_{osc} está definida como el tiempo que tarda una onda de sonido en viajar desde el centro a la superficie de la estrella. Este tiempo tiene el mismo orden de magnitud que el tiempo de caída libre t_{ff} debido al Teorema de Virial, que describe el equilibrio hidrostático de una estrella, y también puede identificarse con la escala de tiempo dinámica τ_{dyn} .

Por otro lado, la escala de tiempo térmica τ_{th} está definida como el tiempo que tarda la energía térmica (el calor) contenida por encima de un cierto radio r_d en transportarse hasta la superficie (esto es, en ser eliminada de la estrella), siendo r_d la coordenada radial de la región de máxima excitación. Esto es igual al cociente entre el calor contenido en las capas por encima de dicho radio y la luminosidad total de la estrella.

Luego, las dos escalas de tiempo relevantes en pulsaciones estelares son la escala de tiempo térmica τ_{th} y la escala de tiempo dinámica τ_{dyn} , las cuales se expresan de la siguiente manera (Unno et al. 1989), si consideramos una región de extensión radial Δr , densidad ρ y temperatura T :

$$\tau_{th} = \frac{4\pi r^2 \rho \Delta r C_V T}{L_*} \quad y \quad \tau_{dyn} = \frac{\Delta r}{c_s} \quad (1.4)$$

siendo C_V el calor específico por gramo a volumen constante.

El cociente entre estas dos escalas, en una dada región de la estrella, es uno de los parámetros más importantes que gobiernan la no-adiabaticidad (perturbación entrópica) de las oscilaciones estelares. Si escribimos la ecuación de la conservación de la energía adimensional (Ver Capítulo 2) obtenemos $\delta S \propto (\tau_{th}/\tau_{dyn})^{-1}$, lo cual nos indica que para una dada variación de energía la perturbación en la entropía es menor cuanto más grande sea el valor de τ_{th}/τ_{dyn} .

En general, el cociente τ_{th}/τ_{dyn} es muy grande en el interior de una estrella, pero es del orden o cae por debajo de la unidad en la superficie estelar. Luego, la amplitud de la perturbación en la entropía es apreciable sólo cerca de la superficie, donde tendrá lugar un eficiente intercambio de energía en el material atravesado. Cuando el cociente es muy grande, la perturbación entrópica es, en general, tan chica que la parte real de la frecuencia angular es esencialmente la misma que su valor adiabático. En tales casos, podemos usar la aproximación adiabática.

En los casos donde los efectos térmicos y dinámicos están fuertemente acoplados, las oscilaciones tienen propiedades particulares y deben tratarse como casos de oscilaciones fuertemente no-adiabáticas. Esto sucede, por ejemplo, para estrellas con $L/M \geq 10^4 L_\odot/M_\odot$ donde el cociente τ_{th}/τ_{dyn} es tan chico en la envoltura que las pulsaciones atrapadas allí son fuertemente no-adiabáticas. En este caso es difícil identificar modos de oscilación, porque no hay una correspondencia uno a uno entre las autofunciones adiabáticas y no-adiabáticas. Debido a su complejidad, no hay teorías muy desarrolladas acerca de este tipo de oscilaciones no-radiales.

El recíproco de la frecuencia de Brunt-Väisälä, N^{-1} , es también un tipo de escala de tiempo dinámica, pero toma en cuenta el grado de la estabilidad dinámica local y es propia para las perturbaciones de tipo onda-gravedad.

En el caso que analizaremos nosotros de las pre-enanas blancas PG1159 pulsantes, los efectos no-adiabáticos no son muy fuertes, por lo que, como veremos en el Capítulo 4, las soluciones adiabáticas son una muy buena aproximación inicial para la solución no-adiabática en el esquema numérico que emplearemos.

1.3. Evidencia observacional de pulsaciones no-radiales

La teoría de pulsaciones estelares fue originalmente desarrollada para explicar las pulsaciones de las estrellas variables clásicas tales como las Cefeidas y las RR Lira. Estas pulsaciones son explicadas en términos de simples pulsaciones radiales, simétricamente esféricas, donde las variaciones de luz y de velocidad radial observadas son causadas por la alternancia entre expansión y contracción de la estrella. Sin embargo, desde fines de los años 60 y principios de los 70, los fenómenos relacionados con pulsaciones han sido observados en muchas estrellas consideradas hasta el momento como estrellas no-pulsantes y se ha descubierto que muchas de éstas pulsan en forma no-radial. Las oscilaciones de enanas blancas y las oscilaciones de 5 min. del Sol son los ejemplos más conocidos de oscilaciones no-radiales. También se observaron oscilaciones no-radiales en estrellas tempranas de tipo O y B. La característica más importante de las oscilaciones no-radiales en este tipo de estrellas es que dichas oscilaciones son generalmente multiperiodicas, con lo cual hay varios modos de pulsación involucrados en estas estrellas. En efecto, el Sol está oscilando en miles de modos propios no-radiales. También la variabilidad semi-regular en la velocidad radial y las grandes velocidades macroturbulentas observadas en muchas estrellas supergigantes de tipo temprano pueden ser explicadas por la superposición de numerosos modos no-radiales.

Observacionalmente, uno puede distinguir los modos no-radiales de oscilación a través de la duración de los períodos. En el caso de pulsaciones radiales, el período del modo fundamental es más largo que el del armónico más alto. En el caso de oscilaciones no-radiales, sin embargo, el modo f y los modos p tienen períodos similares a aquellos correspondientes a los modos radiales, pero en general los modos g tienen períodos muchos más largos. En las estrellas enanas blancas variables se detectan períodos mucho más largos que los esperados teóricamente para los modos radiales y para los modos f y p no-radiales y es por esto que estas pulsaciones son bien explicadas en términos de modos g no-radiales.

Además de la duración de los períodos hay otras herramientas observacionales que ponen en evidencia las oscilaciones no-radiales, tales como la modulación de la amplitud en las curvas de luz o en la curva de velocidad radial, variaciones características en los perfiles de línea, test de pulsación de Baade, fenómenos dinámicos en la atmósfera estelar y corrimiento Doppler. Para una información detallada de estas evidencias ver Unno et al.(1989).

En una estrella pulsante, el conjunto de modos excitados que alcanzan una amplitud detectable está determinado por la inter-relación entre varios procesos:

- El primer proceso es la excitación (*driving*) de las pulsaciones por medio de algún

dado mecanismo (ver Capítulo 3).

- El segundo factor es la respuesta de la estrella al driving que tiene lugar en alguna región de su interior. Una estrella pulsante es esencialmente una cavidad resonante esféricamente simétrica, capaz de sostener vibraciones en un conjunto de frecuencias propias (modos propios). Esas frecuencias están determinadas por la estructura de la estrella, su masa y luminosidad, perfiles de abundancias químicas y espesores de sus capas superficiales. El conjunto de frecuencias propias de una estrella se puede determinar con gran exactitud a través de la aproximación adiabática
- Finalmente, los períodos que en definitiva se observan están determinados por el mecanismo a través del cual los movimientos internos de oscilación son traducidos a variaciones observables de brillo. Esta es la llamada *función de transferencia*, y está relacionada con fenómenos atmosféricos, los cuales no serán tratados en esta Tesis.

1.3.1. Astrosismología

Como dijimos antes, el Sol es un pulsador no-radial que está oscilando en miles de modos no-radiales. Usando estas oscilaciones uno puede sondear la estructura interna del Sol así como la sismología investiga el interior de la Tierra usando datos de ondas sísmicas. Esta técnica aplicada al Sol se denomina “heliosismología” y en los últimos años ha sido un campo de investigación muy fructífero.

Luego del éxito alcanzado por la heliosismología para estudiar la estructura y evolución del Sol, se pensó que el mismo principio también podría aplicarse a las oscilaciones estelares en general. En este caso el método se llama “astrosismología”.

La astrosismología es una nueva disciplina de estudio que utiliza las oscilaciones estelares (principalmente las no-radiales) para explorar y extraer información acerca de la estructura interna de las estrellas. Obviamente, hacer un enfoque sismológico de estrellas en general es mucho más difícil que hacerlo en el Sol. En la mayoría de los casos, la imagen estelar no puede ser resuelta en una imagen de disco bidimensional y, por lo tanto, el grado de oscilaciones detectables está restringido a $0 \leq \ell \leq 4$. Por otro lado, la superficie estelar está dividida en muchas regiones oscilando éstas en diferentes fases, y la contribución observacional de cada región es entonces cancelada por otras, por lo que la amplitud total de variabilidad de la estrella es demasiado chica como para ser detectada. Más allá de todas estas restricciones, el uso de las oscilaciones estelares para estudiar el interior estelar constituye una herramienta astrofísica muy importante, dado que nos proporciona información que no puede ser obtenida con otras técnicas.

Los períodos de las pulsaciones en variables clásicas han sido usados para extraer información acerca de la estructura de esas estrellas. Aunque la mayoría de las variables pulsantes clásicas presentan sólo un modo simple (el modo fundamental o el primer armónico), el período nos proporciona una medida de la densidad media de la estrella. Algunas de estas estrellas son pulsantes en 2 modos diferentes, y entonces, en este caso, la masa estelar

también puede ser determinada como una información más que proviene de las pulsaciones. De esta manera, un incremento en el número de modos de pulsación observados en una estrella se traduce en un aumento en la cantidad de información que puede, en principio, extraerse.

El desarrollo tecnológico en instrumentación en los últimos años ha conducido a un increíble crecimiento en cuanto a la disponibilidad de datos de alta calidad sobre estrellas pulsantes; especialmente se han podido realizar mediciones de variaciones con muy bajas amplitudes. Actualmente variaciones de luz del orden de unos pocos 10^{-3} mg. son monitoreadas fácilmente. Los requerimientos de la astrosismología impulsan hacia la detección de variaciones de un nivel de 10^{-6} mg., lo cual haría posible el monitoreo de oscilaciones de tipo solar en estrellas distantes. Con estos avances, han sido descubiertas pulsaciones de baja amplitud en muchas estrellas que eran consideradas hasta el momento como estrellas no-variables. La característica más importante de las pulsaciones en estas “nuevas” estrellas pulsantes es que éstas están constituidas de varios modos propios más que los de las variables clásicas.

Exceptuando al Sol, las estrellas que presentan la mayor cantidad de modos son las enanas blancas, de las cuales podemos extraer información muy interesante a partir de sus frecuencias de oscilación, tales como la masa total de la estrella, la luminosidad, el período de rotación y la tasa de enfriamiento. Extraer esta información de otra clase de estrellas es difícil debido a que el número de frecuencias que presentan la mayoría es demasiado bajo y por lo tanto no contienen mucha información intrínseca de la estrella.

Volviendo al caso de las enanas blancas, la cantidad sismológica observable más interesante es la tasa a la cual cambia el período, porque ésto nos proporciona una medida directa de la velocidad de evolución de la estrella. Winget et al.(1983) y Kawaler et al. (1985) hallaron una expresión de la tasa de cambio del período de las estrellas pulsantes enanas blancas y pre-enanas blancas, demostrando que la magnitud de la tasa a la cual cambia el período es inversamente proporcional a la escala de tiempo evolutiva. Esto nos permite sacar conclusiones interesantes acerca de los datos físicos obtenidos a través de los modelos teóricos. Por ejemplo, se pudo testear que la escala de tiempo evolutiva medida para una estrella DOV está en excelente acuerdo con la teoría (Winget, Van Horn & Hansen 1983 , y Kawaler et al. 1985). También, a través de los datos astrosismológicos se pudo hallar una medida de la masa estelar total de la misma estrella DOV (PG1159-035) de $0,60 \pm 0,01 M_{\odot}$, la cual es una medida de la masa con precisión sin precedentes (Kawaler et al. 1985).

1.3.2. Clases de estrellas pulsantes

Las pulsaciones estelares, ya sean radiales o no-radiales, se encuentran en muchas fases de la evolución estelar. Las observaciones de este tipo de estrellas nos indican que existe, entre ellas, un amplio rango de masas, con lo cual éstas ocupan varias regiones a lo largo del diagrama Hertzsprung-Russell (HR).

Presentaremos aquí las clases más importantes de estrellas pulsantes, cuyas ubicaciones pueden observarse en la Figura 1.3. Allí vemos que existen varias clases de estrellas pul-

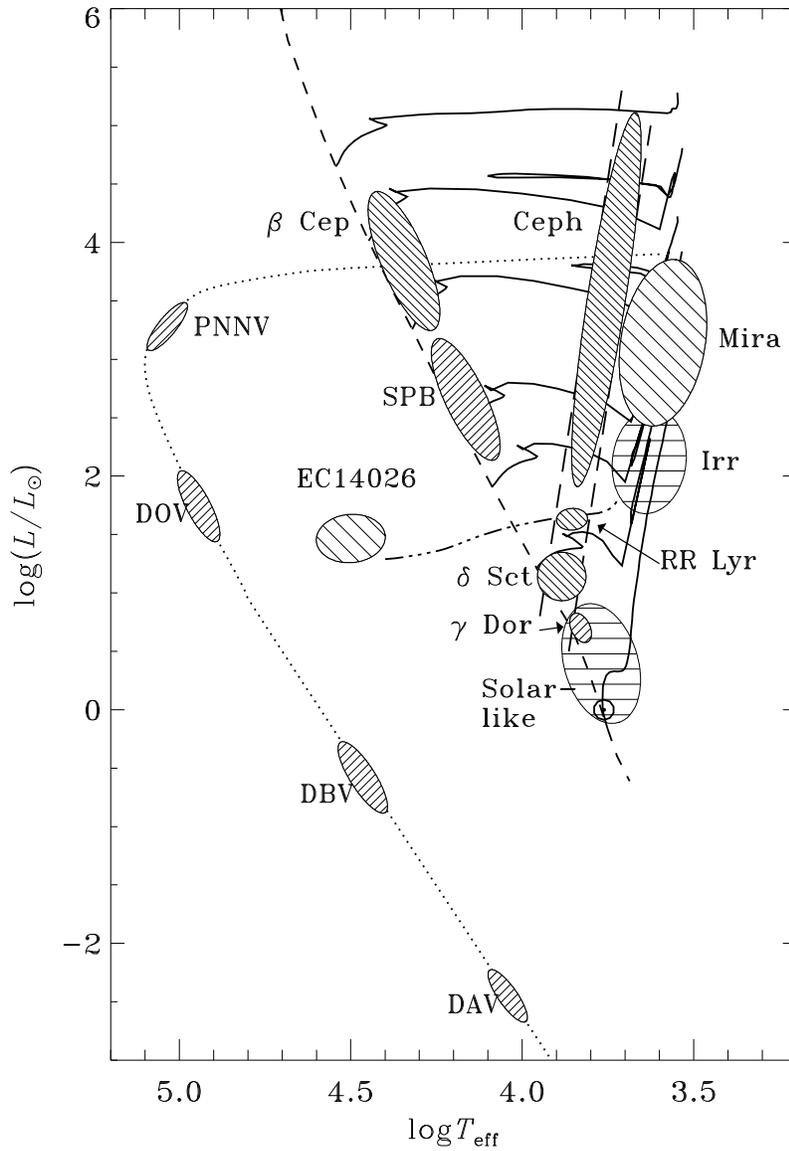


Figura 1.3: Diagrama HR ilustrando la ubicación de las clases de estrellas pulsantes más importantes. La línea de trazos muestra la secuencia principal; las curvas continuas representan los tracks evolutivos de estrellas de masas $1, 2, 3, 4, 7, 12$ y $20 M_{\odot}$, la línea de puntos y trazos es la rama horizontal y la curva punteada es la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas (Adaptado de Christensen-Dalsgaard, 1998).

santes a lo largo de la secuencia principal, desde estrellas oscilantes de tipo solar hasta estrellas β Cephei. Entre las dos líneas diagonales se muestra la “banda de inestabilidad clásica”, que contiene a las variables Cefeidas, las RR Lira y las δ SCuti. En la región más fría del diagrama HR encontramos las variables Mira, las cuales poseen grandes amplitudes, y las variables irregulares, que muestran una caótica variabilidad de brillo. A lo largo de la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas encontramos al menos tres grupos de

estrellas degeneradas variables. Ellas son, en orden de temperatura efectiva decreciente, las estrellas PG1159 variables (incluyen las PNNV, que son los Núcleos de Nebulosas Planetarias Variables, y las DOV, para la cuales no se observan nebulosas planetarias), las estrellas DBV (enanas blancas DB con envoltura de helio) y las estrellas DAV (=ZZ Ceti, enanas blancas DA con envoltura de hidrógeno).

1.4. Estrellas enanas blancas

Dado que en este trabajo estudiaremos las pulsaciones de un tipo particular de estrellas, las pre-enanas blancas, veremos aquí características generales de las estrellas enanas blancas y pre-enanas blancas, y también describiremos brevemente los tipos de estrellas variables dentro de las mismas.

1.4.1. Características generales de las enanas blancas

Las estrellas enanas blancas son el resultado final, en general, de la evolución de estrellas aisladas de masas bajas e intermedias ($M_* \leq 8M_\odot$).

La estructura de una enana blanca consiste, en términos generales, en: un núcleo de materia degenerada muy denso (las densidades promedio características son del orden de $\rho \approx 10^6 - 10^7 \text{ g/cm}^3$) que comprende alrededor del 99% de la masa total de la estrella, rodeado de una envoltura delgada de materia en condiciones no degeneradas y con densidades mucho menores. Dicha estructura es soportada en el núcleo de estas estrellas por la presión ejercida por los electrones altamente degenerados (la existencia de las enanas blancas es una excelente confirmación del principio de exclusión de Pauli). Esta degeneración interna confiere a las estrellas propiedades peculiares; es la responsable de la existencia de una relación inversa entre la masa y el radio de estas estrellas, que como extremo conduce a una masa límite por encima de la cual la enana blanca no puede existir como objeto estable: ésta es la *masa de Chandrasekhar* y su valor es aproximadamente de $1,4M_\odot$. Además, la altísima conductividad térmica de la materia degenerada produce núcleos prácticamente isotérmicos. Otra peculiaridad importante es que las reacciones nucleares juegan un papel secundario como fuente de energía de las enanas blancas. La energía radiada al espacio por las mismas es obtenida principalmente de la energía térmica acumulada en los iones no degenerados de su interior. Es decir, la estrella brilla principalmente a expensas del calor acumulado en los iones durante su historia evolutiva previa (los electrones no contribuyen significativamente) y a medida que la energía térmica es gradualmente perdida por la estrella en forma de radiación, la energía cinética de los iones disminuye y el gas de iones pasa de un estado gaseoso a un estado fluido y luego a un estado sólido. El pasaje del estado fluido a sólido (cristalización) trae aparejada una liberación de calor latente, capaz de frenar considerablemente el enfriamiento de la estrella. Finalmente, la reserva de energía térmica se agota y la estrella, ahora casi completamente cristalizada, deja de brillar.

Los efectos de la degeneración electrónica desaparecen en las envolturas de las enanas blancas. Dichas envolturas son extremadamente delgadas (tanto en masa como en radio)

Cuadro 1.1: Clasificación espectral de estrellas enanas blancas

<i>Tipo Espectral</i>	<i>Características</i>
DA	Líneas de H, sin He I o metales presentes
DB	Líneas de He I solamente, sin H o metales presentes
DC	Espectros continuos sin líneas distinguibles
DO	Líneas intensas de He II, He I o H pueden estar presentes
DZ	Líneas de metales solamente, sin H o He
DQ	Rasgos de C

pero sin embargo, debido a las altas opacidades que presentan, son extremadamente eficientes como reguladoras del flujo de energía emitido por la estrella.

El transporte de energía en la envoltura de una enana blanca puede ser tanto radiativo como convectivo, dependiendo de la fase evolutiva de la estrella. La composición química de las envolturas depende de los detalles del proceso de formación de la enana blanca, pero generalmente están formadas por hidrógeno y/o helio. Las altas gravedades superficiales de las enanas blancas ($\log g \sim 7 - 8$) hacen que la sedimentación gravitatoria sea un proceso muy eficiente en las envolturas de estas estrellas. De esta manera, aún cuando la composición inicial de la envoltura consiste en una mezcla de hidrógeno y helio (más trazos de metales), la sedimentación gravitatoria lleva a la formación, en escalas de tiempo cortas desde el punto de vista de la evolución estelar, de envolturas casi puras de hidrógeno.

El intervalo de luminosidad cubierto por las enanas blancas es muy amplio, reflejando el enorme rango en T_{eff} (de 150000 K a 4000 K). Así, las enanas blancas más calientes alcanzan un valor de $L_* \sim 10^2 - 10^3 L_{\odot}$, mientras que las más frías tienen un valor de $L_* \sim 10^{-4,7} L_{\odot}$.

La determinación observacional de las masas de las enanas blancas muestra una distribución de masas fuertemente centrada en $\approx 0.6 M_{\odot}$ con colas extendiéndose hasta $\approx 0.15 M_{\odot}$ y $\approx 1.2 M_{\odot}$. La mayor parte de las enanas blancas tienen masas muy próximas a la masa promedio, con una dispersión pequeña de $\sim 0,13 M_{\odot}$. Así, a pesar de sus diversos orígenes y luminosidades, las enanas blancas forman una clase marcadamente homogénea de estrellas. Las enanas blancas de baja masa ($M_* \leq 0,45 M_{\odot}$) tienen un núcleo prácticamente puro de helio; aquellas con masas intermedias entre $0.45 M_{\odot}$ y $1 M_{\odot}$ aproximadamente (rango que incluye a la gran mayoría de las enanas blancas) tienen núcleos formados por carbono y oxígeno (en proporciones no del todo bien determinadas por los modelos actuales), y en el caso de enanas blancas de masas mayores es aceptado que sus núcleos están compuestos por oxígeno y neón.

Desde el punto de vista espectroscópico, las enanas blancas se clasifican básicamente en dos tipos: DA, con atmósferas puras de hidrógeno y DB con atmósferas ricas en helio. Pero existen muchas enanas blancas que presentan peculiaridades en la composición química de sus atmósferas y que, por lo tanto, no pueden clasificarse simplemente como DA o DB. El esquema de clasificación espectral más común se presenta en la Tabla 1.1. Es interesante notar que parece existir una “evolución” en el tipo espectral durante la evolución de las enanas blancas. Es decir, algunas enanas blancas DA_s pueden transformarse en DB_s y

viceversa. Los motivos de estos cambios no están del todo claros, pero se cree que una combinación entre la convección que se produce en las envolturas junto con la sedimentación gravitatoria sería responsable de los cambios en la composición química observada en las atmósferas. También es probable que una enana blanca sufra durante su vida episodios de acreción de material interestelar (por ej: nubes moleculares encontradas mientras la enana blanca se mueve en torno al centro galáctico).

La teoría de evolución estelar indica que los progenitores de la mayor parte de las enanas blancas son núcleos de nebulosas planetarias, formadas estas últimas a partir de estrellas de masa baja e intermedia.

1.4.2. Propiedades de las enanas blancas pulsantes

Aproximadamente hablando, la evolución química de las estrellas de masa baja e intermedia finaliza con la quema de helio (o carbono) en el núcleo. Tales estrellas evolucionan por encima de la Rama Asintótica de las Gigantes (AGB) con recurrentes flashes de helio y se apartan de ella cuando la masa de la envoltura cae por debajo de un cierto nivel crítico. A partir de allí, las estrellas evolucionan muy rápidamente a luminosidades aproximadamente constantes y altas temperaturas. Luego de que la fuente de la región nuclear remanente se extingue, las estrellas se dirigen hacia la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas. Durante esta fase evolutiva completa, existe un gran número de oportunidades para los cuales estas estrellas se vuelven pulsacionalmente inestables.

El descubrimiento de variaciones multiperiodicas de estrellas enanas blancas y pre-enanas blancas ha permitido un rápido progreso en el campo de la astrosismología. Para este tipo de estrellas compactas, el rápido progreso es el resultado de una combinación de cuatro circunstancias favorables:

- Su estructura física es relativamente simple.
- Las amplitudes pulsacionales son lo suficientemente grandes como para ser observadas, pero lo suficientemente chicas de modo tal que puedan ser explicadas a partir de un análisis lineal.
- La cantidad de períodos observados en cada objeto proporciona mucha información acerca de la estructura subyacente de los objetos compactos.
- Los períodos son típicamente cortos, de manera que muchos ciclos pueden observarse en una noche, y por lo tanto es posible resolver completamente las curvas de luz en muchas de estas estrellas.

Presentaremos ahora las diferentes clases de estrellas enanas blancas y pre-enanas blancas pulsantes, ordenadas en función decreciente de la temperatura efectiva.

Estrellas variables PG1159 : En la región del diagrama HR donde el track post-AGB se une a la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas, se encuentran las estrellas llamadas PG1159 pulsantes (o GW Vir). Estas estrellas tienen temperaturas efectivas muy altas ($80000K \leq T_{\text{eff}} \leq 180000K$) y muestran espectroscópicamente una fuerte deficiencia de hidrógeno, pero pronunciadas características de C y He y la presencia de O (Werner 1992, Dreizler et al. 1995). Algunas de las PG1159 muestran variaciones de luz fotométricas con períodos que van desde ~ 5 hasta ~ 30 minutos. Tales modos oscilatorios son atribuidos a modos g de bajos valores de ℓ y altos ordenes radiales k .

Las estrellas variables PG1159 que se encuentran rodeadas de nebulosas planetarias son llamadas Núcleos de Nebulosas Planetarias Variables (PNNV), y a aquellas sin indicios de nebulosas planetarias se las conoce como DOV. Los períodos de pulsación de las PNNVs son más grandes en un factor 2 o 3 que los de las DOVs, lo cual nos indica que las PNNVs tienen radios más grandes que las DOVs.

Desde el punto de vista evolutivo, es plausible asignar a las estrellas DOV en las fases tempranas de la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas. Las PNNVs, en contraste, están aún desplazándose hacia altas temperaturas a luminosidades constantes y todavía no han alcanzado la secuencia de enfriamiento.

Hasta el momento se conocen alrededor de 11 estrellas PG1159 pulsantes, de las cuales 6 de ellas son PNNV y 5 DOV.

La región que ocupan las estrellas variables PG1159 sobre el diagrama H-R fue determinada por Werner et al. (1995). Sin embargo, en esta banda de inestabilidad se encuentran, junto con las estrellas variables, objetos no-variables, lo cual indica que la luminosidad y la temperatura efectiva no alcanzan para caracterizar a las estrellas variables PG1159 y debe haber un parámetro adicional desconocido (por ejemplo, la composición química). De hecho, se conocen un par de estrellas espectroscópicamente idénticas, pero una de ellas es variable y la otra no (Werner, 1993). Luego, la banda de inestabilidad de este tipo de estrellas pulsantes no es pura.

Con respecto a la excitación de las pulsaciones de estas estrellas, se cree que el responsable es el mecanismo $\kappa - \gamma$ actuando en zonas de ionización parcial de carbono y oxígeno (Starrfield et al. 1984, 1985). También se ha encontrado que el mecanismo ε puede ser el responsable de que se produzcan pulsaciones en este tipo de estrellas (Kawaler et al. 1986; Kawaler et al. 1988). Sin embargo, los períodos hallados son demasiado cortos con respecto a aquellos observados en estrellas pre-enanas blancas variables (Hine & Nather 1987). Una descripción de estos mecanismos será presentada en el Capítulo 3.

Enanas blancas variables DB (DBV) : Este tipo de estrellas, de las cuales se conocen 8, se encuentran confinadas en un angosto rango de temperaturas efectivas, entre $21500K$ y $24000K$, con luminosidades de $\log(L_*/L_\odot) = -1,3$.

Las incertezas que existen en cuanto a la determinación de T_{eff} , la cual es del orden de $\Delta T_{\text{eff}} = 1000K$, perjudican los análisis pulsacionales, resultando difícil establecer los límites de la banda de inestabilidad. Los períodos observados caen todos dentro de un intervalo de 140 y 1000 segundos. La mayoría de los espectros de potencia de las DBV

no están resueltos por completo debido a que estas estrellas presentan muchas frecuencias y por lo tanto, dichos espectros son bastante complejos. Por otro lado, la excitación de pulsaciones de las estrellas DBV es atribuida al mecanismo $\kappa - \gamma$ actuando en la base de la zona de convección externa (Bradley & Winget, 1994). La excitación de los modos g parece ocurrir, y conducir a resultados consistentes con las observaciones, en las capas superficiales ricas en helio con masas entre 10^{-8} y $10^{-2}M_*$ (Bradley & Winget, 1994). La banda de inestabilidad de las DBVs tampoco es pura. Por el contrario, existen entre un 25 % y un 50 % de estrellas DBV no pulsantes en el dominio de inestabilidad (Beauchamp et al. 1999). En los modelos teóricos, la eficiencia de la convección juega un papel importante en cuanto a la ubicación exacta de la banda de inestabilidad.

Enanas blancas variables DA (DAV o ZZ Ceti) : Estas estrellas enanas blancas variables ricas en hidrógeno se encuentran en la zona más fría de la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas. Se cree que todas las enanas blancas DA oscilan cuando entran en el intervalo de temperatura apropiado, con lo cual la banda de inestabilidad de estas pulsantes es pura. El rango exacto de temperatura efectiva de la banda de inestabilidad es aún tema de debate (principalmente el borde azul, ver Bergeron et al. 1995), pero su dominio se encuentra aproximadamente entre $10000K$ y $13000K$.

Las variabilidades fotométricas de estas estrellas son de baja amplitud ($\leq 0,2$ mag.) y usualmente multiperiodicas, con períodos desde ~ 100 hasta más de 1000 segundos. Algunos de los períodos espaciados muy cerca entre sí son considerados multipletes debido a la rotación estelar lenta.

De los espectros de potencia de estas estrellas no se puede obtener tanta información en comparación con los de las DOV y DBV, ya que sólo un número bajo de modos son excitados en forma simultánea, y con tan pocos modos es problemática su identificación, es decir, la asignación de valores k y ℓ a cada período observado.

Un aspecto importante con respecto a la ubicación del borde azul de la banda de inestabilidad es la influencia de la eficiencia convectiva en los modelos estelares en equilibrio. Aparentemente, sólo zonas de convección muy extendidas dan lugar a bordes azules compatibles con los datos observacionales (Bradley & Winget 1994).

En modelos de estrellas DAV por debajo de $\sim 12000K$, sólo una pequeña fracción de la energía total que pasa a través de la zona convectiva es transportada por difusión de fotones. Por lo tanto, la convección domina localmente. Pero, a pesar de que la escala de tiempo convectiva es más corta que los períodos de oscilación observados en las estrellas ZZ Ceti, los análisis de estabilidad no-radiales son usualmente llevados a cabo despreciando la perturbación del flujo convectivo (aproximación *frozen convection*, ver Capítulo 2).

Es aceptado el mecanismo $\kappa - \gamma$ actuando en las zonas de ionización parcial del hidrógeno como responsable de excitar los modos g pulsacionales en las estrellas DAV (Dolez & Vauclair, 1981 ; Winget et al. 1982). Por otro lado, la región de excitación coincide con la base de la zona convectiva. Brickhill (1991) y Goldreich & Wu (1999) mostraron que existe otro mecanismo posible para la excitación de modos g en las estrellas DAV debido a la acción de la convección superficial en estas estrellas. Este mecanismo es llamado

excitación convectiva (*convective driving*). Aunque aparentemente este último es un agente más importante para excitar modos g que el mecanismo $\kappa - \gamma$, ambos predicen de forma igualmente aceptable el borde azul de la banda de inestabilidad observada, pero ninguno de los dos es capaz de predecir el borde rojo observado (Kanaan 1996).

Capítulo 2

Ecuaciones generales

En este capítulo deduciremos las ecuaciones generales que gobiernan las pulsaciones estelares no-radiales. Durante la derivación de las mismas, no se considerará la presencia de campos magnéticos ni los efectos de rotación de la estrella. Ésto simplifica en gran medida el tratamiento matemático.

Llegaremos a las ecuaciones de oscilación generales no-adiabáticas, las cuales junto con las condiciones de borde, constituyen un problema de autovalores y autofunciones. El autovalor σ es una cantidad compleja $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$, donde σ_R representa la frecuencia de oscilación de un dado modo propio y σ_I mide el crecimiento ($\sigma_I < 0$) o amortiguamiento ($\sigma_I > 0$), a través del tiempo, de la amplitud de dicha oscilación.

Por último, daremos una descripción adimensional de las ecuaciones que gobiernan el problema, que son más convenientes para ser utilizadas en el tratamiento numérico.

2.1. Ecuaciones de la hidrodinámica

Las ecuaciones básicas que describen las configuraciones de un fluido autogravitante (una estrella en nuestro caso particular) son las ecuaciones de la hidrodinámica. A partir de ellas, deduciremos el conjunto de ecuaciones diferenciales cuya solución proporciona las autofunciones y autovalores (autofrecuencias) de oscilación para el modelo estelar considerado. Seguiremos aquí la derivación de las ecuaciones de Unno et al. (1989).

Las ecuaciones hidrodinámicas son la ecuación de continuidad (conservación de la masa):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

la ecuación de conservación de momento¹ :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P - \rho \vec{\nabla} \Phi \quad (2.2)$$

¹Recordemos que no estamos considerando fuerzas externas, es decir, ni campos magnéticos ni viscosidad.

y la ecuación de conservación de la energía:

$$T \frac{dS}{dt} = \varepsilon_N - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \quad (2.3)$$

Aquí, t es el tiempo, ρ es la densidad de masa, \vec{v} es la velocidad del fluido, P es la presión, Φ es el potencial gravitatorio, S es la entropía específica, T es la temperatura, ε_N es la tasa de generación de energía específica nuclear, \vec{F} es el flujo total: $\vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F}_C$, con \vec{F}_R el flujo radiativo y \vec{F}_C el flujo convectivo. Finalmente, $\vec{\nabla}$ es el operador gradiente.

Para completar la descripción de un sistema se necesitan más ecuaciones. Una de ellas es la ecuación de Poisson, que relaciona el potencial gravitatorio generado por una distribución de masa :

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (2.4)$$

donde G es la constante de gravitación y $\vec{\nabla}^2$ es el operador Laplaciano.

La otra ecuación a considerar es la de difusión radiativa para el flujo radiativo:

$$\vec{F}_R = -K \vec{\nabla} T \quad (2.5)$$

donde K es la conductividad radiativa, la cual puede escribirse en términos de la opacidad de Rosseland κ de la siguiente manera:

$$K = \frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \quad (2.6)$$

siendo a la constante de densidad de radiación y c la velocidad de luz.

Para poder resolver este sistema, necesitamos una ecuación de estado que nos proporcione $P(\rho, T)$ y $S(\rho, T)$, y ecuaciones que nos proporcionen la tasa de generación de energía nuclear $\varepsilon_N(\rho, T)$ y la opacidad $\kappa(\rho, T)$ para una dada composición química.

Ahora consideremos un estado en equilibrio, o lo que es lo mismo, no perturbado (indicaremos las correspondientes variables con subíndice 0) simétricamente esférico, para el cual $\vec{v}_0 = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, para toda cantidad física f del problema.

Para dicho estado, las ecuaciones (2.2) - (2.5) se transforman en:

$$-\vec{\nabla} P_0 - \rho_0 \vec{\nabla} \Phi_0 = 0 \quad (2.7)$$

$$\rho_0 \varepsilon_{N_0} - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_0 = 0 \quad (2.8)$$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0 \quad (2.9)$$

$$\vec{F}_0 = -K_0 \vec{\nabla} T_0 + \vec{F}_{C_0} \quad (2.10)$$

2.2. Ecuaciones de oscilación

Para describir las pulsaciones, se considera a la estrella como un medio continuo, y se aplican pequeñas perturbaciones (sin importar el origen de las mismas) alrededor de un estado en equilibrio de la estrella. Debido a que asumiremos que todas las perturbaciones son suficientemente pequeñas, sólo los términos de primer orden en las perturbaciones serán considerados, despreciando así los términos de segundo orden y más altos en las diferentes variables perturbadas. De esta manera, obtendremos ecuaciones de perturbación linealizadas para describir la evolución de las correspondientes perturbaciones.

Las ecuaciones que describan las configuraciones estelares serán expresadas convenientemente en coordenadas esféricas (r, θ, φ) , ya que el estado en equilibrio es simétricamente esférico. Un elemento de masa, cuya posición en equilibrio es \vec{r}_0 , se desplaza de la misma una cantidad $\vec{\xi}$, de modo que en el estado perturbado se encuentra en otra posición \vec{r} :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\xi} \quad (2.11)$$

Ahora veamos lo siguiente: existen dos tipos de variaciones (o perturbaciones) en las cantidades físicas, las variaciones Eulerianas y las Lagrangianas, dependiendo de la descripción usada, a saber:

- En una descripción Euleriana, tanto la cantidad física perturbada como la no perturbada son funciones del punto de observación, y por lo tanto es conveniente usar la *variación Euleriana*, la cual se define como la diferencia entre los valores de la cantidad física en las soluciones perturbadas y sin perturbar, en un dado punto de observación \vec{r} y a un dado tiempo t . Aquí estamos comparando las propiedades de dos elementos de fluido distintos en las dos soluciones y la variación se indica con un prima.
- En una descripción Lagrangiana, en cambio, la cantidad perturbada depende de la posición perturbada de un elemento de fluido y la cantidad sin perturbar depende de la posición sin perturbar del mismo elemento de fluido; por lo tanto es conveniente usar la *variación Lagrangiana*, definida como la diferencia entre la cantidad perturbada y la cantidad sin perturbar del mismo elemento de fluido. Aquí estamos comparando las propiedades del mismo elemento de fluido en las dos soluciones, y la variación se indica con δ .

De esta manera, una cantidad física f puede ser expresada como:

$$f(\vec{r}, t) = f_0(\vec{r}) + f'(\vec{r}, t)$$

o bien

$$f(\vec{r}, t) = f_0(\vec{r}_0) + \delta f(\vec{r}, t)$$

Pero dijimos que en el estado en equilibrio la estrella es simétricamente esférica, por lo tanto f_0 sólo depende de la coordenada radial, y entonces tendremos:

$$f(r, \theta, \varphi, t) = f_0(r) + f'(r, \theta, \varphi, t)$$

o bien

$$f(r, \theta, \varphi, t) = f_0(r_0) + \delta f(r, \theta, \varphi, t)$$

con la condición $f', \delta f \ll f_0$.

Las perturbaciones Lagrangiana y Euleriana de una cantidad cualquiera f se relacionan, a primer orden en el desplazamiento $\vec{\xi}$, de la siguiente manera:

$$f' = \delta f - \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} f_0 \quad (2.12)$$

Por otro lado, las variaciones temporales de las perturbaciones Lagrangiana y Euleriana se identifican como

$$\frac{d\delta f(\vec{r}, t)}{dt} \quad y \quad \frac{\partial f'(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

respectivamente, donde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \quad y \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.13)$$

Notar que, dado que no existe movimiento en el estado en equilibrio ($\vec{v}_0 = 0$), obtenemos la siguiente relación:

$$\vec{v}' = \delta \vec{v} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} = \frac{d\vec{\xi}}{dt} \quad (2.14)$$

El formalismo Euleriano es comúnmente más usado, debido a que tiene la propiedad de poder intercambiar prima y gradiente. Sin embargo, en los casos en que la tasa de generación de energía específica nuclear ε_N o la opacidad κ están involucradas, es conveniente usar el formalismo Lagrangiano ya que, en general, los períodos de oscilación no-radiales son mucho más cortos que las escalas de tiempo de nucleosíntesis y de difusión de partículas; y por lo tanto, la composición química de un elemento de masa se conserva o no cambia significativamente durante las oscilaciones. Ésto nos indica que la dependencia con la composición química de, por ejemplo, $\delta\varepsilon_N$ y $\delta\kappa$ pueden ser ignoradas, lo cual simplifica en gran medida las relaciones termodinámicas entre las perturbaciones de presión, densidad, temperatura y entropía que se necesitan en el tratamiento de las ecuaciones para las oscilaciones no-radiales.

En general, si la composición química no cambia, toda variable termodinámica puede ser considerada como una función de dos variables independientes. Siguiendo la derivación de Unno et al (1989), tomamos la presión P y la entropía específica S como variables independientes. Luego, se introducen las cantidades:

$$\begin{aligned} \kappa_{ad} &= \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln P} \right)_S & \kappa_s &= c_p \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial S} \right)_P \\ \varepsilon_{ad} &= \left(\frac{\partial \ln \varepsilon_N}{\partial \ln P} \right)_S & \varepsilon_s &= c_p \left(\frac{\partial \ln \varepsilon_N}{\partial \ln S} \right)_P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{ad} &= \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_S & \Gamma_1 &= c_p \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \rho} \right)_S \\ v_T &= c_p \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial S} \right)_P & c_p &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P\end{aligned}$$

de manera que las perturbaciones de opacidad y tasa de generación de energía nuclear, así como las perturbaciones de T y ρ pueden representarse de la siguiente manera, como funciones de δP y δS :

$$\frac{\delta \kappa}{\kappa} = \kappa_{ad} \frac{\delta P}{P} + \kappa_s \frac{\delta S}{c_p} \quad (2.15)$$

$$\frac{\delta \varepsilon_N}{\varepsilon_N} = \varepsilon_{ad} \frac{\delta P}{P} + \varepsilon_s \frac{\delta S}{c_p} \quad (2.16)$$

$$\frac{\delta T}{T} = \nabla_{ad} \frac{\delta P}{P} + \frac{\delta S}{c_p} \quad (2.17)$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta P}{P} - v_T \frac{\delta S}{c_p} \quad (2.18)$$

Ahora, luego de escribir cada variable en su forma perturbada y linealizar las ecuaciones (2.1)-(2.5), obtenemos el conjunto de ecuaciones perturbadas en la aproximación lineal; considerando como estado de equilibrio una estrella esféricamente simétrica, no rotante, sin campo magnético ni viscosidad y con $\vec{v}_0 = 0$ ²:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}') \quad (2.19)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} P' - \rho \vec{\nabla} \Phi' - \rho' \vec{\nabla} \Phi \quad (2.20)$$

$$T \frac{d\delta S}{dt} = \delta \varepsilon_N + (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_R) \frac{\delta \rho}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_R) \quad (2.21)$$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi' = 4\phi G \rho' \quad (2.22)$$

$$\vec{F}_R' = -K \vec{\nabla} T' - K \vec{\nabla} T \quad (2.23)$$

$$\frac{\delta F_{R,r}}{F_R} = 4 \frac{\delta T}{T} - \frac{\delta \kappa}{\kappa} - \frac{\delta \rho}{\rho} - \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \left(\frac{d \ln T}{dr} \right)^{-1} \frac{\partial(\delta T/T)}{\partial r} \quad (2.24)$$

Las ecuaciones (2.23) y (2.24) son las perturbaciones Eulerianas y Lagrangianas, respectivamente, del flujo radiativo.

En las ecuaciones anteriores, despreciamos el término $\delta(\rho^{-1} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_C)$. Ésto no se hace porque exista una buena razón física para hacerlo, sino porque aún no existe una adecuada teoría de convección dependiente del tiempo, la cual es necesaria para calcular las

²A partir de aquí omitiremos el subíndice 0 de las cantidades sin perturbar, para simplificar la notación.

perturbaciones del flujo convectivo. Debido a esto, en la mayoría de los estudios acerca de pulsaciones no-radiales, no-adiabáticas la perturbación del flujo convectivo se desprecia, por simplicidad. Este tratamiento es a veces llamado aproximación de “convección congelada” (*frozen convection*).

Sin embargo, hay que ser cuidadosos al usar esta aproximación porque puede causar un efecto ficticio de excitación de modos cerca del borde de la zona convectiva. Por lo tanto hay que tener en cuenta que ésta es una buena aproximación sólo en estrellas para las cuales las zonas de convección son débiles, esto es, estrellas en las cuales la convección transporta poca energía. Esta aproximación no es buena, entonces para estrellas enanas blancas de tipo ZZ Ceti, ya que en estas estrellas la convección juega un rol muy importante. Para las estrellas pre-enanas blancas PG1159, las cuales son estrellas muy calientes, el transporte por convección es despreciable y así la aproximación de *frozen convection* es consistente.

2.2.1. Separación de las coordenadas temporales y angulares

Las ecuaciones diferenciales parciales (2.19)-(2.24) son lineales y homogéneas con respecto al tiempo t y a las coordenadas espaciales \vec{r} para las variables perturbadas. Los coeficientes de estas ecuaciones sólo incluyen cantidades en equilibrio (tales como ρ , T , Φ , etc.) y por lo tanto dependen únicamente de la coordenada radial r .

Se sigue entonces, que el tiempo t puede ser separado y todas las variables pueden ser escritas como proporcionales a $e^{i\sigma t}$, donde σ es la frecuencia angular de oscilación que, como ya dijimos, es en general un valor complejo siendo la parte real de la misma la cantidad que se relaciona con la frecuencia cíclica ν y el período P a través de

$$\nu = \frac{\sigma_R}{2\pi} = \frac{1}{P}$$

Por otro lado, la amplitud de las oscilaciones crece si la parte imaginaria de la frecuencia angular σ es negativa.

De esta manera, para toda cantidad perturbada del problema, representada aquí como f' , tenemos que:

$$f'(r, \theta, \varphi, t) = f'(r, \theta, \varphi)e^{i\sigma t} \quad (2.25)$$

Notar que, con esto, el vector velocidad, para el cual habíamos obtenido la relación (2.14), puede ser escrito como :

$$\vec{v}' = i\sigma\vec{\xi} \quad (2.26)$$

Reemplazando en las ecuaciones de oscilación todas las cantidades perturbadas con expresiones de tipo (2.25), eliminamos la dependencia temporal en dichas ecuaciones.

Por otro lado, la perturbación Euleriana y Lagrangiana de la ecuación de continuidad, y las componentes radial y horizontal de la ecuación de momento perturbada pueden ahora ser escritas, respectivamente, de la siguiente manera:

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{\xi}) \quad , \quad \frac{\delta\rho}{\rho} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi} \quad (2.27)$$

$$\sigma^2 \xi_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r} + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} + \frac{\rho'}{\rho} \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.28)$$

$$\sigma^2 \vec{\xi}_h = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_h P' + \vec{\nabla}_h \Phi' \quad (2.29)$$

con $\vec{\xi}_h = (0, \xi_\theta, \xi_\varphi)$, y donde el gradiente $\vec{\nabla}_h$, que es la componente horizontal del operador gradiente en coordenadas esféricas, está definido como:

$$\vec{\nabla}_h = \frac{1}{r} \left(0, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

Por otro lado, usando la ecuación (2.12), que relaciona los formalismos Lagrangiano y Euleriano, y la ecuación (2.18) podemos escribir:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{P'}{P} - A \xi_r - v_T \frac{\delta S}{c_p} \quad (2.30)$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{P'}{P} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} \xi_r - v_T \frac{\delta S}{c_p} \quad (2.31)$$

donde A es el discriminante de Schwarzschild que se usa para distinguir entre las capas convectivamente estables ($A < 0$) y las capas convectivamente inestables ($A > 0$) (Ledoux & Walraven 1958) :

$$A \equiv \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} \quad (2.32)$$

Ahora, las ecuaciones (2.30) y (2.31) pueden ser utilizadas para eliminar la perturbación en la densidad de todas las ecuaciones diferenciales.

Una vez eliminada la dependencia temporal y la perturbación en la densidad obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$-(\sigma^2 + gA) \xi_r + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r} + \frac{g}{\Gamma_1 P} P' + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} - g v_T \frac{\delta S}{c_p} = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi_r) + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} \xi_r + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{P'}{P} + \frac{1}{\sigma^2 \rho} \vec{\nabla}_h^2 P' + \frac{1}{\sigma^2} \vec{\nabla}_h^2 \Phi' - v_T \frac{\delta S}{c_p} = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right) + \vec{\nabla}_h^2 \Phi' - 4\pi G \rho \left(\frac{P'}{\Gamma_1 P} - A \xi_r - v_T \frac{\delta S}{c_p} \right) = 0 \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} i\sigma T \delta S &= \varepsilon \varepsilon_{ad} \frac{\delta P}{P} + \varepsilon \varepsilon_s \frac{\delta S}{c_p} - \frac{1}{\rho} \left[F_R \frac{\partial \delta F_R / F_R}{\partial r} + \left(\frac{2F_R}{r} + \frac{dF_R}{dr} \right) \frac{\delta F_R}{F_R} + 2F_R \frac{\partial \xi_r / r}{\partial r} \right. \\ &+ \left. 2 \left(\frac{2F_R}{r} + \frac{dF_R}{dr} \right) \frac{\xi_r}{r} \right] - \frac{1}{\rho} \left(\frac{2F_R}{r} + \frac{dF_R}{dr} \right) \vec{\nabla}_h \cdot \vec{\xi}_h - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_h \cdot \vec{F}'_{R,h} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\frac{\delta F_{R,r}}{F_R} = (4\nabla_{ad} - \kappa_{ad})\frac{\delta P}{P} + (4 - \kappa_s)\frac{\delta S}{c_p} + 2\frac{\xi_r}{r} + \vec{\nabla}_h \cdot \vec{\xi}_h + \left(\frac{d \ln T}{dr}\right)^{-1} \frac{\partial(\delta T/T)}{\partial r} \quad (2.37)$$

Luego, examinando el sistema de ecuaciones (2.33)-(2.37), notamos que los coeficientes sólo dependen de r y el único operador diferencial con respecto a las variables angulares θ y φ es $\vec{\nabla}_h^2$, donde

$$\vec{\nabla}_h^2 = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

De esta manera, la dependencia angular puede separarse de la dependencia en r , en cada perturbación, es decir:

$$f'(r, \theta, \varphi, t) = f'(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{i\sigma t}$$

donde Y_ℓ^m es el armónico esférico de grado armónico ℓ y orden acimutal m , el cual está dado por:

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \left[\frac{2\ell + 1}{2\pi} \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!} \right]^{1/2} P_\ell^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

y satisface la relación:

$$\vec{\nabla}_h^2 Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \frac{-(\ell + 1)\ell}{r^2} Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

y, por lo tanto, los Y_ℓ^m son autofunciones del operador $L^2 = r^2 \vec{\nabla}_h^2$ (a veces llamado Legendriano).

Los números cuánticos ℓ y m son números enteros restringidos a $0 \leq |m| \leq \ell$. Se sigue de aquí que los efectos de la dependencia angular entran dentro de las ecuaciones sólo a través de términos proporcionales a $\ell(\ell + 1)$.

Ahora, de la ecuación (2.29) y de la componente horizontal de la ecuación (2.23), se puede ver que:

$$\vec{\xi} = \left(\xi_r(r), \xi_h(r) \frac{\partial}{\partial \theta}, \xi_h(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{i\sigma t} \quad (2.38)$$

$$\vec{F}'_R = \left(F'_{R,r}(r), F'_{R,h}(r) \frac{\partial}{\partial \theta}, F'_{R,h}(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{i\sigma t} \quad (2.39)$$

donde:

$$\xi_h(r) = \frac{1}{\sigma^2 r} \left(\frac{P'(r)}{\rho} + \Phi'(r) \right) \quad y \quad F'_{R,h}(r) = \frac{-K}{r} T'(r)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones puede escribirse como:

$$(N^2 - \sigma^2)\xi_r + \frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dr} + \frac{g}{\rho c_s^2} P' + \frac{d\Phi'}{dr} - g v_T \frac{\delta S}{c_p} = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} - \frac{g}{c_s^2} \xi_r + \frac{1}{\Gamma_1} \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2}\right) \frac{P'}{P} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi' - v_T \frac{\delta S}{c_p} = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' - 4\pi G \rho \left(\frac{P'}{\rho c_s^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r - v_T \frac{\delta S}{c_p} \right) = 0 \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} i\sigma T \delta S = \varepsilon \varepsilon_{ad} \frac{\delta P}{P} &+ \varepsilon \varepsilon_s \frac{\delta S}{c_p} - \frac{1}{\rho} \left[F_R \frac{\partial \delta F_R / F_R}{\partial r} + \left(\frac{2F_R}{r} + \frac{dF_R}{dr} \right) \frac{\delta F_R}{F_R} + 2F_R \frac{\partial \xi_r / r}{\partial r} \right. \\ &+ \left(\frac{4F_R}{r} + 2 \frac{dF_R}{dr} + F_R \frac{\ell(\ell+1)}{r} \right) \frac{\xi_r}{r} - \left(\frac{2F_R}{r} + \frac{dF_R}{dr} \right) l(l+1) \frac{\xi_h}{r} \\ &\left. - \frac{F_R}{d \ln T / d \ln r} \frac{\ell(\ell+1)}{r} \frac{\delta T}{T} \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\frac{\delta F_R}{F_R} = (4\nabla_{ad} - \kappa_{ad}) \frac{\delta P}{P} + (4 - \kappa_s) \frac{\delta S}{c_p} + 2 \frac{\xi_r}{r} - \ell(\ell+1) \frac{\xi_h}{r} + \left(\frac{d \ln T}{dr} \right)^{-1} \frac{d(\delta T / T)}{dr} \quad (2.44)$$

donde vemos que las ecuaciones que describen el problema de las oscilaciones no-radiales, no-adiabáticas, se reducen a un conjunto de ecuaciones diferenciales dependientes de la coordenada radial únicamente.

En dichas ecuaciones, c_s es la velocidad del sonido local, L_ℓ la frecuencia de Lamb y N es la frecuencia de Brunt-Väisälä las cuales están definidas en el Capítulo 1.

Con respecto a las ecuaciones (2.40)-(2.44), vamos a seguir aquí la derivación de Unno et. al (1998), por lo que haremos un cambio de variables, introduciendo la perturbación de la luminosidad en lugar de la del flujo. Sea la perturbación de la luminosidad igual a:

$$\frac{\delta L_R}{L_R} = \frac{2\xi_r}{r} + \frac{\delta F_R}{F_R} \quad (2.45)$$

donde $L_R = 4\pi r^2 F_R$ es la luminosidad radiativa.

Así, el conjunto de ecuaciones diferenciales cuya solución es la parte radial (las autofunciones) de las oscilaciones lineales no-radiales, no-adiabáticas están dadas por las ecuaciones:

$$(N^2 - \sigma^2) \xi_r + \frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dr} + \frac{g}{\rho c_s^2} P' + \frac{d\Phi'}{dr} - g v_T \frac{\delta S}{c_p} = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} - \frac{g}{c_s^2} \xi_r + \frac{1}{\Gamma_1} \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2}\right) \frac{P'}{P} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi' - v_T \frac{\delta S}{c_p} = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' - 4\pi G \rho \left(\frac{P'}{\rho c_s^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r - v_T \frac{\delta S}{c_p} \right) = 0 \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}
i\sigma T\delta S = \delta\varepsilon_N & - \frac{d\delta L_R}{dM_r} + \frac{\ell(\ell+1)}{d\ln T/d\ln r} \frac{F_R}{\rho r} \frac{\delta T}{T} \\
& + \ell(\ell+1) \left(\frac{\xi_h}{r} \frac{dL_r}{dM_r} - \frac{\xi_r}{r} \frac{L_R}{4\pi r^3 \rho} \right)
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\frac{\delta L_R}{L_R} = (4\nabla_{ad} - \kappa_{ad}) \frac{\delta P}{P} + (4 - \kappa_s) \frac{\delta S}{c_p} + 4 \frac{\xi_r}{r} - \ell(\ell+1) \frac{\xi_h}{r} + \frac{d(\frac{\delta T}{T})/d\ln r}{d\ln T/d\ln r} \tag{2.50}$$

Estas ecuaciones (2.46)-(2.50) son las ecuaciones básicas para una oscilación lineal, no-radial y no-adiabática presentadas por Unno et. al (1998), siendo las 6 variables: P' , T' , δS , ξ_r , Φ' y F_r' .

Resolviendo este sistema de ecuaciones, junto con las condiciones de borde, que presentaremos aquí mismo, obtenemos las autofunciones, que proporcionan la amplitud relativa de las pulsaciones dentro de la estrella, y obtenemos también el autovalor σ .

En una aproximación adiabática se supone que no hay intercambio de calor entre las distintas regiones del fluido al oscilar, con lo cual la entropía específica se conserva ($\delta S = 0$) durante las oscilaciones. La condición de adiabaticidad se cumple principalmente en las regiones internas de la estrella, pero no en las regiones próximas a la superficie estelar. En esta aproximación las ecuaciones se vuelven considerablemente más simples, ya que las ecuaciones (2.49) y (2.50) no son necesarias para la resolución del problema, y podemos reemplazarlas por la relación adiabática:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta P}{P} \tag{2.51}$$

Como ya hemos mencionado, en la descripción matemática del problema de oscilaciones no-radiales, no-adiabáticas, tanto las autofunciones como los autovalores son complejos. Es decir, que el sistema de ecuaciones que gobiernan las oscilaciones lineales, no-adiabáticas, no-radiales es de 6^{to} orden espacial en variables complejas, o de 12^{avo} orden espacial en variables reales³. Esto se debe a que la ecuación linealizada de la conservación de la energía (2.49) incluye dentro de sus coeficientes un número complejo, debido a que la ecuación involucra una derivada temporal de primer orden.

Luego, como la descripción matemática del problema de oscilaciones adiabáticas no incluye esta última ecuación y, por ende, no tiene términos complejos, todas las autofrecuencias y autovalores del problema son puramente reales. Se sigue entonces que el sistema de ecuaciones que gobierna las oscilaciones estelares adiabáticas es de 4^{to} orden espacial en variables reales.

Como última discusión acerca de las ecuaciones halladas, es importante notar que el orden acimutal m de los armónicos esféricos no aparece en ninguna de ellas y tampoco

³En nuestro método numérico, resolveremos el sistema de ecuaciones de 6^{to} orden en variables complejas.

en las condiciones de borde (como veremos más adelante). Este hecho nos indica que los autovalores de este tipo de oscilaciones son $2\ell + 1$ veces degenerados con respecto a m ; esto es, los $2\ell + 1$ modos con igual k y ℓ oscilan todos con la misma frecuencia σ , sin importar el m . Dicha degeneración se debe a la ausencia de perturbaciones tales como rotación y campos magnéticos, que provocan apartamientos de la simetría esférica en los modelos en equilibrio. En efecto, si la estrella rota, la fuerza de Coriolis y la centrífuga afectarán los modos de pulsación. Tendremos, en este caso, que la fuerza centrífuga modifica las frecuencias de oscilación, pero no genera un nuevo tipo de onda. En cambio, la fuerza de Coriolis no sólo modifica los modos p , g y f de pulsación, sino que genera un nuevo tipo de modos: los modos r . En una estrella rotante, entonces, la degeneración en m es destruída totalmente.

Un campo magnético también destruye la degeneración en m , pero sólo parcialmente; cada frecuencia de un dado ℓ se divide en $\ell + 1$ subniveles correspondientes al valor absoluto de m : $|m| = 0, 1, \dots, \ell$. Gautschy & Saio (1995) mencionan que, en general, debido a la presencia de campos magnéticos, los modos g sufren corrimientos en la frecuencia más importantes que los que sufren los modos p .

2.2.2. Condiciones de borde

Como ya hemos mencionado, las 6 ecuaciones diferenciales en variables complejas (2.46)-(2.50) junto con 6 condiciones de borde conforman un problema de autovalores con un autovalor complejo σ . Aquí, discutiremos tres condiciones de borde internas y tres condiciones de borde externas para cerrar el sistema.

En el interior de una estrella, la escala de tiempo térmica es muy grande, en comparación con los períodos de pulsación, y por lo tanto la condición de adiabaticidad se cumple satisfactoriamente para las oscilaciones que se produzcan allí. Las ecuaciones apropiadas para el caso de aproximación adiabática son: (2.46)-(2.48) (reemplazando en ellas la cantidad δS por el valor 0) y (2.51). Luego, tenemos que cerca del origen, es decir $r \sim 0$, las cantidades que aparecen en dichas ecuaciones se comportan de la siguiente manera: $g \sim 0$, $L_\ell^2 \propto r^{-2}$, $\rho \sim \text{constante}$, $c_s^2 \sim \text{constante}$, $N^2 \sim 0$ y $N^2/g \sim 0$. Con todo esto, tenemos que las condiciones de borde internas para las variables mecánicas Φ' , ξ_r y P' son :

$$\Phi' \propto r^\ell \quad , \quad \xi_r \propto r^{\ell-1} \quad \text{y} \quad P' \propto r^\ell$$

Usando estas relaciones, las ecuaciones (2.46)-(2.48) pueden reducirse a :

$$\xi_r - \frac{1}{\sigma^2 r} \left(\frac{P'}{\rho} + \Phi' \right) = 0 \quad (2.52)$$

y

$$\frac{d\Phi'}{dr} = \frac{\ell\Phi'}{r} \quad (2.53)$$

La tercera condición de borde central será:

$$\delta S = 0 \quad (2.54)$$

Veamos qué pasa en la superficie estelar, donde $r = R_*$, siendo R_* el radio de la estrella, y donde no puede considerarse la aproximación adiabática. Como el borde externo de una estrella no está bien definido, pueden aparecer ciertas dificultades para imponer las condiciones de borde externas en el problema oscilatorio. Sin embargo, asumiremos que la presión y la densidad cerca de la superficie decrecen pronunciadamente hacia afuera, con lo cual la condición de borde mecánica en la superficie para la perturbación en la presión es :

$$\delta P = 0 \quad a \quad r = R_* \quad (2.55)$$

Si la presión de radiación no es despreciable en la superficie, esta última aproximación no puede ser considerada. En tal caso es necesario un tratamiento más cuidadoso, y el reemplazo de $\delta P = 0$ por $\delta P_{gas} = 0$ como condición de borde externo sería más apropiado.

La condición de borde para la perturbación del potencial gravitatorio se obtiene de imponer la condición de continuidad en la superficie:

$$\frac{d\Phi'}{dr} + (\ell + 1)\frac{\Phi'}{r} = 0 \quad a \quad r = R_* \quad (2.56)$$

Y por último, veamos la condición de borde térmica en la superficie, que es la condición de borde externa más difícil de determinar. Esto se debe a que un correcto tratamiento de la misma involucra la resolución de la ecuación de transporte radiativo incluyendo ésta perturbaciones debido a las oscilaciones no-radiales. Como esto es muy difícil de tratar, es común usar la aproximación de Eddington, donde $F = 2\pi J$, siendo J la intensidad media. Con esta aproximación, se cumple la condición de no existencia de flujo radiativo incidente en la superficie.

Como la intensidad media en la superficie de la estrella está dada por $J = \sigma_{rad}T^4/\pi$, obtenemos la siguiente ecuación como tercera condición de borde externa :

$$\frac{\delta F_R}{F_R} = 4\frac{\delta T}{T} \quad (2.57)$$

Finalmente, podemos verificar que el índice acimutal m no aparece en las condiciones de borde, como lo habíamos anticipado, y efectivamente las 6 ecuaciones con las 6 condiciones de borde conforman un problema de autovalores degenerado con respecto a m .

2.3. Formulación adimensional

Las ecuaciones (2.46)-(2.50) aplicadas a modelos estelares generales deben resolverse en forma numérica. Para un análisis numérico del problema, es más adecuado escribir el sistema de ecuaciones en forma adimensional, para lo cual debemos primero definir las variables también en un modo adimensional.

Las nuevas variables dependientes del problema (autovalor y autofunciones del problema) se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{\xi_r}{r}, & y_2 &= \frac{1}{gr} \left(\frac{P'}{\rho} + \Phi' \right) \left[= \frac{\sigma^2 r \xi_h}{g r} \right], \\
y_3 &= \frac{1}{g r} \Phi', & y_4 &= \frac{1}{g} \frac{d\Phi'}{dr}, \\
y_5 &= \frac{\delta S}{c_p}, & y_6 &= \frac{\delta L_R}{L_R}, \\
\omega^2 &= \sigma^2 \frac{R_*^3}{G M_*},
\end{aligned}$$

donde y_1, y_2, y_3, y_4 son las variables introducidas en 1971 por Dziembowski para resolver el problema adimensional de las pulsaciones adiabáticas. Luego, Saio & Cox (1980) agregaron las variables y_5 y y_6 para el caso no-adiabático. La última variable aquí definida w^2 es el autovalor (autofrecuencia) adimensional.

Ahora, sea la variable independiente :

$$x = \frac{r}{R_*} \quad (2.58)$$

donde R_* es el radio estelar en equilibrio e introduciendo las variables recién definidas, el sistema de ecuaciones diferenciales (2.46)-(2.50) se reescribe de la siguiente manera (Unno et al. 1989):

$$x \frac{dy_1}{dx} = (V_g - 3) y_1 + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} - V_g \right] y_2 + V_g y_3 + v_T y_5 \quad (2.59)$$

$$x \frac{dy_2}{dx} = (c_1 \omega^2 - A^*) y_1 + (A^* - U + 1) y_2 - A^* y_3 + v_T y_5 \quad (2.60)$$

$$x \frac{dy_3}{dx} = (1 - U) y_3 + y_4 \quad (2.61)$$

$$x \frac{dy_4}{dx} = UA^* y_1 + UV_g y_2 + [\ell(\ell+1) - UV_g] y_3 - U y_4 - Uv_T y_5 \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned}
x \frac{dy_5}{dx} &= V \left[\nabla_{ad} (U - c_1 \omega^2) - 4(\nabla_{ad} - \nabla) + c_2 \right] y_1 + \\
&+ V \left[\frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \omega^2} (\nabla_{ad} - \nabla) - c_2 \right] y_2 + V c_2 y_3 + \\
&+ V \nabla_{ad} y_4 + V \nabla (4 - \kappa_s) y_5 - V \nabla y_6
\end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned}
x \frac{dy_6}{dx} = & \left[\ell(\ell+1) \frac{(\nabla_{ad} - \nabla)}{\nabla} - \varepsilon_{ad} c_3 V \right] y_1 + \\
& + \left[\varepsilon_{ad} c_3 V - \ell(\ell+1) \left(\frac{\nabla_{ad}}{\nabla} + \frac{c_3}{c_1 \omega^2} \right) \right] y_2 + \\
& + \left[\ell(\ell+1) \frac{\nabla_{ad}}{\nabla} - \varepsilon_{ad} c_3 V \right] y_3 + \\
& + \left[c_3 \varepsilon_s - \frac{\ell(\ell+1)}{V \nabla} - i \omega c_4 \right] y_5 - \frac{d \ln L_R}{d \ln r} y_6
\end{aligned} \tag{2.64}$$

donde los coeficientes de las ecuaciones diferenciales están definidos por:

$$V \equiv \frac{-d \ln P}{d \ln r} = \frac{GM_r \rho}{rP} \tag{2.65}$$

$$V_g = \frac{V}{\Gamma_1} = -\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{d \ln r} = \frac{g r}{c^2} = \frac{g r \rho}{\Gamma_1 P} \tag{2.66}$$

$$U = \frac{d \ln M_r}{d \ln r} = \frac{4\pi \rho r^3}{M_r} \tag{2.67}$$

$$c_1 = \left(\frac{r}{R} \right)^3 \frac{M_*}{M_r} \tag{2.68}$$

$$A^* = \frac{r}{g} N^2 = r \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) \tag{2.69}$$

$$v_T = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P = \frac{\chi_T}{\chi_\rho} \tag{2.70}$$

con las compresibilidades χ_T y χ_ρ dadas por

$$\chi_T = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho \tag{2.71}$$

$$\chi_\rho = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T \tag{2.72}$$

También:

$$\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln p} \tag{2.73}$$

$$c_2 = (\kappa_{ad} - 4\nabla_{ad}) V \nabla + \nabla_{ad} \left(\frac{d \ln \nabla_{ad}}{d \ln r} + V \right) \tag{2.74}$$

$$c_3 = \frac{4\pi r^3 \rho \varepsilon_N}{L_R} \quad (2.75)$$

y

$$c_4 = \frac{4\pi r^3 \rho T c_p}{L_R} \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \equiv \frac{\tau_{th}}{\tau_{dyn}} \quad (2.76)$$

siendo τ_{th} y τ_{dyn} la escala de tiempo térmica y la escala de tiempo dinámica respectivamente, definidas en el Capítulo 1. Las cantidades ∇_{ad} , ε_{ad} , ε_s , ε_N , κ_{ad} y c_p están definidas en la sección 2.2 de este mismo Capítulo.

Las condiciones de borde para el centro de la estrella ($x = 0$), que estaban dadas por (2.52)-(2.54), son escritas ahora como:

$$c_1 \omega^2 y_1 - \ell y_2 = 0 \quad (2.77)$$

$$\ell y_3 - y_4 = 0 \quad (2.78)$$

$$y_5 = 0 \quad (2.79)$$

Por otro lado, las condiciones de borde para la superficie estelar ($x = 1$), que estaban dadas por (2.55)- (2.57) son:

$$\left\{ 1 + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - 4 - \omega^2 \right] \frac{1}{V} \right\} y_1 - y_2 + \left\{ 1 + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - \ell - 1 \right] \frac{1}{V} \right\} y_3 = 0 \quad (2.80)$$

$$(\ell+1) y_3 + y_4 = 0 \quad (2.81)$$

$$(2 - 4\nabla_{ad} V) y_1 + 4\nabla_{ad} V (y_2 - y_3) + 4 y_5 - y_6 = 0 \quad (2.82)$$

Y, por último, la condición de normalización usual en la superficie estelar (dada la naturaleza homogénea del sistema de ecuaciones diferenciales) es

$$y_1 - 1 = 0. \quad (2.83)$$

Este sistema de ecuaciones es el que utilizaremos para resolver el problema numérico de pulsaciones estelares no-radiales, no-adiabáticas para un determinado conjunto de modelos estelares.

Capítulo 3

Mecanismos de excitación

En este capítulo describiremos brevemente los mecanismos de excitación que actúan en ciertas regiones de las estrellas pulsantes y que son los responsables de que surjan inestabilidades pulsacionales. Gracias a estos mecanismos de excitación, algunos modos de oscilación son seleccionados, entre todos los posibles dentro de los espectros de modos p y modos g , para mantener una amplitud finita y poder ser observados.

Los mecanismos de excitación de las oscilaciones no-radiales en las estrellas variables enanas blancas y pre-enanas blancas fueron muy investigados, y se ha confirmado que este tipo de estrellas es realmente inestable frente a modos g no-radiales debido al mecanismo $\kappa - \gamma$. También el mecanismo ε fue investigado para explicar las pulsaciones de las pre-enanas blancas. Aunque existen numerosos tipos de mecanismos de excitación, aquí explicaremos particularmente los dos mecanismos de excitación mencionados, ya que son los que corresponden a las estrellas que queremos analizar.

Para hablar de ello, primero tenemos que identificar las zonas dentro de una estrella en donde estos mecanismos son efectivos, y qué efectos influyen para que esto suceda. Hablaremos también del coeficiente de estabilidad y su relación con la integral del trabajo.

3.0.1. Zonas de excitación y de amortiguamiento

Dentro de una estrella pulsante podemos identificar dos tipos de regiones llamadas regiones de excitación (*driving*) y regiones de amortiguamiento (*damping*). Veamos cómo identificarlas.

En una estrella, la energía generalmente fluye a expensas de un gradiente de temperatura desde las regiones centrales hacia la superficie de manera suave y sin impedimentos. Por supuesto, aparecen constantemente pequeñas perturbaciones aleatorias que tienden a dificultar el transporte de la radiación. La situación es estable siempre que tales perturbaciones sean rápidamente amortiguadas, restaurándose el equilibrio.

Cantidades tales como las derivadas de la opacidad y la temperatura afectan el equilibrio local. En general, si un elemento de gas en una estrella es comprimido, su temperatura crece y su opacidad decrece. El incremento de la temperatura tiende a facilitar la salida de la radiación hacia las regiones que rodean a dicho elemento, mientras que el decrecimiento

de la opacidad disminuye la eficiencia con la cual la radiación es absorbida. A partir de la primera ley de la termodinámica, un incremento de la temperatura acompañado por una pérdida neta de calor implica que el material que rodea al elemento en cuestión realiza trabajo sobre dicho elemento de gas. Un argumento similar indica que durante una expansión también se realiza trabajo sobre el elemento que se expande. Así, cualquier perturbación inicial será rápidamente amortiguada. El requerimiento de que una región pierda calor durante una compresión y gane calor durante una expansión es el criterio fundamental de estabilidad. Cuando sucede lo contrario, y el elemento de masa realiza trabajo sobre el material en sus inmediaciones durante compresión y expansión, cualquier perturbación microscópica puede crecer lo suficiente como para ser observable en una estrella pulsante.

En definitiva, una región que gana calor durante la fase de máxima compresión es una región de excitación y, por el contrario, una región que pierde calor en la fase de máxima compresión es una región de amortiguamiento. Luego, la estabilidad o inestabilidad de una estrella pulsante surge de la “competencia” entre los efectos de excitación y amortiguamiento.

Es útil introducir aquí la integral de trabajo W , la cual se define como el cambio de la energía total E producido por una estrella simétricamente esférica de radio R_* , sobre un período de pulsación (Unno et al., 1989):

$$W = \oint \frac{dE}{dt} dt = \oint dt \int_0^{M_*} \left(\varepsilon_N - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot F \right) dM_r - \oint dt \int_{r=R_*} P \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (3.1)$$

donde E indica la energía total de la estrella:

$$E = \int_0^{M_*} \left(\frac{1}{2} \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \Phi + U \right) dM_r \quad (3.2)$$

y está compuesta por la energía cinética, potencial e interna.

Para el caso que estamos trabajando nosotros, la integral de trabajo sólo está dada por el primer término en el lado derecho de la ecuación 3.1, ya que consideramos que la presión se hace cero en la superficie de la estrella. Así,

$$\begin{aligned} W &= \oint dt \int_0^{M_*} \left(\varepsilon_N - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot F \right) dM_r \\ &= \oint dt \int_0^{M_*} T \frac{dS}{dt} dM_r \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dado que la ecuación linealizada de la conservación de la energía nos dice:

$$T \frac{d\delta S}{dt} = \delta \left(\varepsilon_N - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot F \right) \quad (3.4)$$

se deriva la siguiente forma de integral de trabajo, que es más conveniente para el análisis de estabilidad desde un punto de vista lineal:

$$W = \oint dt \int_0^{M_*} \frac{\delta T}{T} \delta \left(\varepsilon_N - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot F \right) dM_r \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) establece que el cambio en la energía oscilatoria de una estrella es causado por los procesos no-adiabáticos en el interior y por el flujo de onda saliente a la superficie.

Notemos que el trabajo diferencial dW/dr (el integrando de la ecuación (3.5)) proporciona la cantidad neta de energía localmente ganada (o perdida) por el material desplazado durante un ciclo de pulsación. Un valor positivo de dW/dr en una dada localización en el modelo indica que esta región contribuye localmente a la excitación, mientras que un valor negativo contribuye al amortiguamiento de la oscilación. En estos términos, $W(r)$ es la suma de las contribuciones locales. Un valor positivo de $W(R_*)$ (o sea $W(r)$ en la superficie) indica que el modo es globalmente excitado y la estrella es pulsacionalmente inestable.

La integral de trabajo está relacionada con la tasa de crecimiento σ_I de la amplitud de oscilación, la cual es la parte imaginaria de la frecuencia σ , de la siguiente manera:

$$\sigma_I = -\frac{1}{2} \frac{W(R_*)/E_W}{\Pi} \quad (3.6)$$

donde Π indica el período.

El signo de σ_I nos indicará si la estrella es pulsacionalmente estable o no, ya que tendremos estabilidad pulsacional (oscilaciones amortiguadas) cuando $\sigma_I > 0$, mientras que la estrella será inestable pulsacionalmente (oscilaciones crecientes) cuando $\sigma_I < 0$. Es por esto que σ_I es a veces llamado coeficiente de estabilidad.

Como veremos en el Capítulo 4, la integral de trabajo será considerada en el análisis numérico para el cálculo de los modos de oscilación no-radiales no-adiabáticos, debido a que permite obtener la ubicación de las zonas de excitación y amortiguamiento en el interior estelar. Si dW/dr es graficada como una función de la posición en el interior estelar, un valor positivo de la misma indica una zona de excitación, y un valor negativo indica una zona de amortiguamiento.

Existen varias expresiones alternativas de W que son físicamente equivalentes. Por ejemplo, en el Capítulo 4 veremos que para el análisis numérico la forma de W es diferente a la presentada aquí (3.5).

Por último, y antes de pasar a explicar los mecanismos de excitación, veamos qué relación existe entre el agente de excitación y los períodos observados cuando una estrella experimenta pulsaciones. En general, ninguna estrella responde a la excitación en cualquier período arbitrario; el rango de variaciones observadas está restringido por el mecanismo de excitación. Cox (1980) demostró que el período de oscilación de un modo está determinado aproximadamente por la escala de tiempo térmica de la zona de excitación:

$$\Pi \approx \tau_{\text{th}}(r_d) = \frac{\int_{M_{rd}}^{M_*} C_V T dM_r}{L_*} \approx \frac{C_V T M_{dz}}{L_*} \quad (3.7)$$

donde C_V es el calor específico por gramo a volumen constante, y M_{r_d} es la masa interior a r_d , la coordenada radial de la región de máxima excitación. En la ecuación (3.7), la aproximación a la derecha es válida si en la región por encima de la zona de excitación la temperatura y el calor específico son aproximadamente constantes (M_{dz} es la masa por encima de la zona de excitación). Notemos que τ_{th} no es otra cosa que el cociente entre el contenido de calor en la región por encima de la zona de excitación y la luminosidad estelar. Justamente, la ecuación proporciona el tiempo aproximado que le toma a la estrella radiar hacia afuera (a través de su luminosidad L_*) la energía contenida en las capas por encima de la región de excitación. Aunque Cox derivó esta relación para pulsaciones radiales, Winget (1981) mostró que es aplicable también a pulsaciones no-radiales.

La idea básica implícita en la ecuación (3.7) es que la energía debe ser modulada de acuerdo a la tasa a la cual ésta puede ser bloqueada y liberada por la zona de excitación. Consideremos la cuestión acerca de cuándo una dada zona puede excitar pulsaciones cerca de un cierto período:

- Si la zona de excitación es muy poco profunda, entonces la escala de tiempo térmica es más corta que el período de pulsación ($\Pi \gg \tau_{th}(r_d)$). Cualquier exceso de calor es radiado hacia afuera antes de que la compresión crezca significativamente. Así, la zona de excitación no puede hacer trabajo para crear una oscilación mecánica en la escala de tiempo en cuestión.
- Si la zona de excitación es muy profunda ($\Pi \ll \tau_{th}(r_d)$), entonces el exceso de calor producido durante la contracción no es radiado lo suficientemente rápido durante la expansión.

Por supuesto, esta relación es aproximada, y existen otros factores que podrían intervenir para limitar las pulsaciones a otros períodos que no son los que predice la relación (3.7).

3.0.2. Mecanismo $\kappa - \gamma$

Bajo ciertas circunstancias, el comportamiento de la opacidad cambia comparado con lo que describimos más arriba. Si la opacidad (κ) crece durante una compresión, entonces el calor fluyendo a través de un elemento de masa es atrapado más eficientemente. Dentro de las regiones donde esto se cumple, se realiza trabajo sobre el material circundante. Así, estas regiones pueden ayudar a desestabilizar la estrella. Sin embargo, otras regiones, donde se requiere trabajo para comprimir y expandir el material, tienden a amortiguar tal desestabilización. Una inestabilidad global aparece sólo cuando el trabajo realizado por las regiones de excitación sobrecompensa el trabajo realizado sobre las regiones de amortiguamiento a lo largo de un ciclo de pulsación. En este caso, el flujo de calor puede realizar trabajo mecánico, y este trabajo es convertido en las pulsaciones que se observan en las estrellas.

Este mecanismo de excitación de las pulsaciones se denomina mecanismo κ . Una región dentro de una estrella excitará pulsaciones a través de este mecanismo si las derivadas de la opacidad satisfacen la siguiente condición (Ver Cox, 1980):

$$\frac{d}{dr} \left[\kappa_T + \frac{\kappa_\rho}{(\Gamma_3 - 1)} \right] > 0. \quad (3.8)$$

donde

$$\kappa_T = \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T} \right)_\rho$$

$$\kappa_\rho = \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln \rho} \right)_T$$

y

$$\Gamma_3 - 1 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S.$$

Aquí S representa la entropía específica, κ es la opacidad en cm^2/g , y las variables r , ρ y T tienen su significado usual. Es importante destacar aquí que la condición (3.8) es una condición necesaria, y no suficiente, para que se exciten pulsaciones.

La ecuación (3.8) se satisface muy frecuentemente cuando alguna especie química dentro de una estrella está parcialmente ionizada. En particular, κ_T usualmente crece en la porción más caliente (región interna) de una zona de ionización parcial y decrece en la porción más fría (región externa). Así, la parte interna de una región de ionización puede excitar pulsaciones mientras que la parte externa tiende a amortiguarlas. El exponente adiabático $\Gamma_3 - 1$ es siempre positivo pero usualmente alcanza un mínimo cuando el material está parcialmente ionizado. Esta intensificación del mecanismo κ se llama mecanismo γ . Físicamente, el mecanismo γ representa la conversión de una parte del trabajo de compresión en ionización adicional de la especie química en cuestión. Esto tiende a comprimir más el elemento de gas, ayudando a la inestabilidad. La liberación de esta energía de ionización durante la fase de expansión también tiende a incrementar la perturbación. Dado que los mecanismos κ y γ ocurren juntos, la inestabilidad causada por efectos de la opacidad y la ionización se conoce como mecanismo $\kappa - \gamma$.

Las pulsaciones de las variables Cefeidas y RR Lira, por ejemplo, son excitadas a través del mecanismo $\kappa - \gamma$ operando dentro de una región donde el He I (helio neutro) y el He II (helio una vez ionizado) tienen abundancias similares. Esta misma zona de ionización parcial es la fuente de inestabilidad de las enanas blancas DBVs (Winget et al. 1983). Las variaciones observadas en enanas blancas ZZ Ceti han sido atribuidas durante mucho tiempo a la ionización parcial del H (Winget et al. 1982). Sin embargo, recientemente Goldreich & Wu (1999) han demostrado que las pulsaciones de las ZZ Ceti pueden ser excitadas a través de un mecanismo distinto relacionado con regiones convectivas eficientes. Por otra parte, las pulsaciones en estrellas GW Vir o PG1159 pulsantes han sido explicadas

en términos de una combinación de ionización parcial del C y el O a través del mecanismo $\kappa - \gamma$ (Saio 1996; Gautschy 1997; Quirion et al. 2004; Gautschy, Althaus & Saio 2005).

3.0.3. Mecanismo ε

La dependencia de la tasa de generación de energía nuclear con respecto a la temperatura y densidad (ambas positivas) siempre tiene un efecto desestabilizante y ambas contribuyen positivamente a la integral de trabajo. Esta excitación es llamada mecanismo ε . Físicamente, ésto puede entenderse como sigue:

En la fase de compresión, los valores de temperatura y por lo tanto la tasa de generación de energía nuclear son sistemáticamente más altos que en el estado de equilibrio, por lo que la materia gana energía térmica. Durante la expansión, la tasa de generación de energía nuclear cae por debajo del valor en el equilibrio y la materia pierde energía térmica. Esta fase particular de pérdida y ganancia de energía conduce a un crecimiento gradual de las amplitudes de las perturbaciones.

El mecanismo ε trabaja igual tanto para oscilaciones radiales como no-radiales, excepto que la condición de atrapamiento de oscilación en el interior es más favorable para algunos modos g por lo que este mecanismo no es muy importante para la pulsación radial porque la amplitud de oscilación es mucho más chica en el interior que en la envoltura. La importancia del mecanismo ε , entonces, se enfatiza para los modos g no-radiales sin restricción alguna con respecto a un tipo de modelo estelar.

Modos g inestables excitados por este mecanismo han sido encontrados para modelos de núcleos de nebulosas planetarias (Kawaler, Winget, Hansen & Iben, 1986, Kawaler, 1988), de enanas blancas calientes (De Gregoria, 1977) y de enanas blancas acretantes (Sienkiewicz, 1980). Sin embargo, si bien se obtienen modos g inestables, éstos tienen períodos demasiado cortos con respecto a aquellos observados en estrellas pre-enanas blancas variables (Hine & Nather 1987).

Capítulo 4

Código numérico

En este Capítulo describiremos brevemente las características principales del código numérico con el cual analizamos la estabilidad de estrellas pre-enanas blancas.

Describiremos las técnicas numéricas empleadas en nuestro programa para calcular los modos pulsacionales no-radiales, no-adiabáticos de modelos estelares esféricamente simétricos. También explicaremos la obtención de los modos no-radiales adiabáticos, que nos servirán como una primera solución aproximada para los modos no-adiabáticos.

También incluiremos algunas cantidades relevantes en cuanto al cálculo de modos pulsacionales en estrellas enanas blancas y pre-enanas blancas.

4.1. Método iterativo

Para encontrar y calcular los modos de pulsaciones no-radiales, no-adiabáticas de un dado modelo estelar debemos resolver numéricamente un sistema de seis ecuaciones diferenciales en variables complejas con las condiciones de borde adecuadas para el centro y la superficie estelar. En el análisis numérico, es más conveniente usar las variables y las ecuaciones adimensionales.

Para resolver el sistema de ecuaciones (2.59) -(2.64) usamos el método de relajación usualmente llamado Método de Henyey (Henyey, Forbes & Gould, 1964), el cual es muy útil para calcular evolución estelar (Kippenhahn, Weigert & Hoffmeister, 1967) y también puede ser aplicado al problema de autovalores de pulsaciones estelares.

El método se basa en el siguiente procedimiento. Dividimos el modelo en equilibrio en un número finito de capas esféricas concéntricas. Esto es equivalente a dividir el dominio de la variable independiente x en N puntos ($x_n, n = 1, 2, \dots, N$) y tener, de esta manera, a la estrella dividida en $N - 1$ capas. En nuestro tratamiento, definimos $x_1 = 1$ como la superficie estelar y $x_N = 0$ como el punto central del modelo.

Luego, reemplazamos el sistema de ecuaciones (2.59) -(2.64) por ecuaciones en diferencias finitas:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{x^{j+1} - x^j} = f_i([y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, x]^{j+1/2}, \lambda) \quad (4.1)$$

con $i = 1, \dots, 6$; $j = 1, \dots, N - 1$; $\lambda = w^2$ y donde, para una dada cantidad Λ

$$\Lambda^{j+1/2} = \frac{\Lambda^j + \Lambda^{j+1}}{2} \quad (4.2)$$

siendo Λ^j el valor de la cantidad Λ en el punto j .

Ahora, podemos hacer:

$$(y_i^{j+1} - y_i^j) - (x^{j+1} - x^j) f_i(y_k^{j+1/2}, x^{j+1/2}, \lambda) = 0 \quad i, k = 1, \dots, 6; j = 1, \dots, N - 1 \quad (4.3)$$

y llamar a una nueva función G como

$$G_i^j(y_k^{j+1/2}, x^{j+1/2}, \lambda) = (y_i^{j+1} - y_i^j) - (x^{j+1} - x^j) f_i(y_k^{j+1/2}, x^{j+1/2}, \lambda) \quad i, k = 1, \dots, 6 \quad ; \quad j = 1, \dots, N - 1 \quad (4.4)$$

donde, obviamente $G_i^j = 0$ si y_k^j y λ conforman la solución del sistema de ecuaciones. Luego, tenemos:

$$G_1^j = (y_1^{j+1} - y_1^j) - (x^{j+1} - x^j) \left\{ (V_g^{j+1/2} - 3) y_1^{j+1/2} + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{c_1^{j+1/2} \omega^2} - V_g^{j+1/2} \right] y_2^{j+1/2} + V_g^{j+1/2} y_3^{j+1/2} + v_T^{j+1/2} y_5^{j+1/2} \right\} \frac{1}{x^{j+1/2}}$$

$$G_2^j = (y_2^{j+1} - y_2^j) - (x^{j+1} - x^j) \left\{ (c_1^{j+1/2} \omega^2 - A^{*j+1/2}) y_1^{j+1/2} + (A^{*j+1/2} - U^{j+1/2} + 1) y_2^{j+1/2} - A^{*j+1/2} y_3^{j+1/2} + v_T y_5^{j+1/2} \right\} \frac{1}{x^{j+1/2}}$$

$$G_3^j = (y_3^{j+1} - y_3^j) - (x^{j+1} - x^j) \left\{ (1 - U^{j+1/2}) y_3^{j+1/2} + y_4^{j+1/2} \right\} \frac{1}{x^{j+1/2}}$$

$$G_4^j = (y_4^{j+1} - y_4^j) - (x^{j+1} - x^j) \left\{ U^{j+1/2} A^{*j+1/2} y_1^{j+1/2} + U^{j+1/2} V_g^{j+1/2} y_2^{j+1/2} + [\ell(\ell+1) - U^{j+1/2} V_g^{j+1/2}] y_3^{j+1/2} - U^{j+1/2} y_4^{j+1/2} - U^{j+1/2} v_T^{j+1/2} y_5^{j+1/2} \right\} \frac{1}{x^{j+1/2}}$$

$$G_5^j = (y_5^{j+1} - y_5^j) - (x^{j+1} - x^j) \left\{ V^{j+1/2} [\nabla_{ad}^{j+1/2} (U^{j+1/2} - c_1^{j+1/2} \omega^2) - 4 (\nabla_{ad}^{j+1/2} - \nabla^{j+1/2}) + c_2^{j+1/2}] y_1^{j+1/2} + V^{j+1/2} \left[\frac{\ell(\ell+1)}{c_1^{j+1/2} \omega^2} (\nabla_{ad}^{j+1/2} - \nabla^{j+1/2}) - c_2^{j+1/2} \right] y_2^{j+1/2} + V^{j+1/2} c_2^{j+1/2} y_3^{j+1/2} + V^{j+1/2} \nabla_{ad}^{j+1/2} y_4^{j+1/2} + V^{j+1/2} \nabla^{j+1/2} (4 - \kappa_s^{j+1/2}) y_5^{j+1/2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -V^{j+1/2} \nabla^{j+1/2} y_6^{j+1/2} \left. \right\} \frac{1}{x^{j+1/2}} \\
G_6^j = & (y_6^{j+1} - y_6^j) - (x^{j+1} - x^j) \left\{ \left[\ell(\ell+1) \frac{(\nabla_{ad}^{j+1/2} - \nabla^{j+1/2})}{\nabla^{j+1/2}} - \varepsilon_{ad}^{j+1/2} c_3^{j+1/2} V^{j+1/2} \right] \right. \\
& \cdot y_1^{j+1/2} + \left[\varepsilon_{ad}^{j+1/2} c_3^{j+1/2} V^{j+1/2} - \ell(\ell+1) \left(\frac{\nabla_{ad}^{j+1/2}}{\nabla^{j+1/2}} + \frac{c_3^{j+1/2}}{c_1^{j+1/2} \omega^2} \right) \right] y_2^{j+1/2} + \\
& + \left[\ell(\ell+1) \frac{\nabla_{ad}^{j+1/2}}{\nabla^{j+1/2}} - \varepsilon_{ad}^{j+1/2} c_3^{j+1/2} V^{j+1/2} \right] y_3^{j+1/2} + \left[c_3^{j+1/2} \varepsilon_s^{j+1/2} \right. \\
& \left. - \frac{\ell(\ell+1)}{V^{j+1/2} \nabla^{j+1/2}} - i \omega c_4^{j+1/2} \right] y_5^{j+1/2} - \left. \frac{d \ln L_R}{d \ln r} \Big|_{j+1/2} y_6^{j+1/2} \right\} \frac{1}{x^{j+1/2}}
\end{aligned}$$

Las condiciones de borde externas pueden ser expresadas como (Unno et al. 1989):

$$y_1^1 \left\{ 1 + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\lambda} - 4 - \lambda \right] \frac{1}{V^1} \right\} - y_2^1 + y_3^1 \left\{ 1 + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\lambda} - \ell - 1 \right] \frac{1}{V^1} \right\} = 0 \quad (4.5)$$

$$(\ell+1)y_3^1 + y_4^1 = 0 \quad (4.6)$$

$$(2 - 4\nabla_{ad} V^1) y_1^1 + 4\nabla_{ad} V^1 (y_2^1 - y_3^1) + 4 y_5^1 - y_6^1 = 0 \quad (4.7)$$

$$y_1^1 - 1 = 0 \quad (4.8)$$

donde la última ecuación es la condición de normalización. Podemos escribirlas como:

$$S_1 = y_1^1 \left\{ 1 + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\lambda} - 4 - \lambda \right] \frac{1}{V^1} \right\} - y_2^1 + y_3^1 \left\{ 1 + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\lambda} - \ell - 1 \right] \frac{1}{V^1} \right\} = 0 \quad (4.9)$$

$$S_2 = (\ell+1)y_3^1 + y_4^1 = 0 \quad (4.10)$$

$$S_3 = (2 - 4\nabla_{ad}^1 V^1) y_1^1 + 4\nabla_{ad}^1 V^1 (y_2^1 - y_3^1) + 4 y_5^1 - y_6^1 = 0 \quad (4.11)$$

$$S_4 = y_1^1 - 1 = 0 \quad (4.12)$$

Las condiciones de borde centrales pueden ser expresadas como (Unno et al. 1989):

$$c_1^N \omega^2 y_1^N - \ell y_2^N = 0 \quad (4.13)$$

$$\ell y_3^N - y_4^N = 0 \quad (4.14)$$

$$y_5^N = 0 \quad (4.15)$$

Y podemos escribirlas como:

$$C_1 = c_1^N \omega^2 y_1^N - \ell y_2^N = 0 \quad (4.16)$$

$$C_2 = y_3^N - y_4^N = 0 \quad (4.17)$$

$$C_3 = y_5^N = 0 \quad (4.18)$$

De esta manera, tenemos un sistema de $6(N - 1)$ ecuaciones en diferencias finitas que surgen de las seis ecuaciones diferenciales lineales (2.59) - (2.64). Estas ecuaciones en diferencia finitas son entonces consideradas como ecuaciones algebraicas lineales para $6N + 1$ incógnitas (y_i^n y λ). Las seis condiciones de borde (tres en el centro y tres en la superficie) más la condición de normalización en el punto más externo de la grilla, junto con las $6(N - 1)$ ecuaciones algebraicas en diferencia, conforman un sistema de $6N + 1$ ecuaciones algebraicas con $6N + 1$ incógnitas. Así, los autovalores w^2 y las autofunciones correspondientes, $y_i(x_n)$ son obtenidas en forma simultánea, y de aquí la ventaja de este método con respecto a otros.

Con el objeto de resolver el sistema de ecuaciones mencionado, suponemos ahora que tenemos una solución aproximada para el sistema y queremos mejorarla iterativamente. Si esta solución no se aleja demasiado de la solución exacta del sistema podemos entonces desarrollar las ecuaciones en las correcciones para los valores de las autofunciones para cada punto de la grilla y también para el autovalor λ , manteniendo sólo los términos de primer orden. De esta manera obtenemos un sistema lineal de ecuaciones en el cual las incógnitas son las correcciones δy_i , $\delta \lambda$.

Presentamos aquí el sistema algebraico de ecuaciones para las correcciones a primer orden, el cual puede ser expresado en forma compacta como:

$$\frac{\partial S_k}{\partial y_1^1} \delta y_1^1 + \cdots + \frac{\partial S_k}{\partial y_6^1} \delta y_6^1 + \frac{\partial S_k}{\partial \lambda} \delta \lambda = -S_k \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial G_i^j}{\partial y_1^j} \delta y_1^j + \cdots + \frac{\partial G_i^j}{\partial y_6^j} \delta y_6^j + \frac{\partial G_i^j}{\partial y_1^{j+1}} \delta y_1^{j+1} + \cdots + \frac{\partial G_i^j}{\partial y_6^{j+1}} \delta y_6^{j+1} + \frac{\partial G_i^j}{\partial \lambda} \delta \lambda = -G_i^j \quad (4.20)$$

$$i = 1, 2, \dots, 6 \quad j = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$\frac{\partial C_l}{\partial y_1^N} \delta y_1^N + \cdots + \frac{\partial C_l}{\partial y_6^N} \delta y_6^N + \frac{\partial C_l}{\partial \lambda} \delta \lambda = -C_l \quad l = 1, 2, 3 \quad (4.21)$$

Aquí, δy_i^j son pequeñas correcciones a las autofunciones y_i en el punto j y $\delta \lambda$ es la corrección al autovalor λ . S_k , G_i^j , C_l son los valores de las ecuaciones en diferencia evaluadas

en la solución a ser mejorada iterativamente. Obviamente, en la solución exacta ellas deben ser 0.

Ahora debemos resolver el sistema de ecuaciones. A priori, éste parece ser demasiado grande como para resolverlo usando la inversa de la matriz. Pero muchos elementos en los coeficientes de la matriz son cero. En efecto, esta gran matriz tiene elementos no nulos sólo en bloques localizados sobre la diagonal y en la última columna (correspondiente a las derivadas con respecto al autovalor). Haciendo uso de esta propiedad característica, utilizamos un algoritmo específico para invertir la matriz y el problema se resuelve de una manera mucho más sencilla.

Para resolver el primer bloque de la matriz (superficie estelar), evaluamos las ecuaciones (4.19) para $k = 1, 2, 3, 4$ y la ecuación (4.20) para $i = 1, \dots, 6$ y $j = 1$.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial S_1}{\partial y_6} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial S_4}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial S_4}{\partial y_6} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial G_1^1}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_1^1}{\partial y_6} & \frac{\partial G_1^1}{\partial y_1^2} & \cdots & \frac{\partial G_1^1}{\partial y_4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_6^1}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_6^1}{\partial y_6} & \frac{\partial G_6^1}{\partial y_1^2} & \cdots & \frac{\partial G_6^1}{\partial y_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y_1^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta y_6^1 \\ \delta y_1^2 \\ \delta y_2^2 \\ \delta y_3^2 \\ \delta y_4^2 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial S_1}{\partial \lambda} & -S_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{\partial S_4}{\partial \lambda} & -S_4 \\ -\frac{\partial G_1^1}{\partial y_5^2} & -\frac{\partial G_1^1}{\partial y_6^2} & -\frac{\partial G_1^1}{\partial \lambda} & -G_1^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_6^1}{\partial y_5^2} & -\frac{\partial G_6^1}{\partial y_6^2} & -\frac{\partial G_6^1}{\partial \lambda} & -G_6^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y_5^2 \\ \delta y_6^2 \\ \delta \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Ahora, ponemos la “incógnita” de este primer bloque como combinación lineal de δy_5^2 , δy_6^2 , $\delta \lambda$, 1. Definimos aquí a los vectores U_s , V_s , W_s y X_s ($s = 1, \dots, 6N - 8$), los cuales contienen los coeficientes de dicha combinación, de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \delta y_1^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta y_6^1 \\ \delta y_1^2 \\ \vdots \\ \delta y_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 & W_1 & X_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 & X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{10} & V_{10} & W_{10} & X_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y_5^2 \\ \delta y_6^2 \\ \delta \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Insertando esta última expresión en el sistema (4.22) y cancelando el vector (4 x 1) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial y_1^1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial S_1}{\partial y_6^1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial S_4}{\partial y_1^1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial S_4}{\partial y_6^1} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial G_1^1}{\partial y_1^1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_1^1}{\partial y_6^1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial y_1^2} & \cdots & \frac{\partial G_1^1}{\partial y_4^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_6^1}{\partial y_1^1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_6^1}{\partial y_6^1} & \frac{\partial G_6^1}{\partial y_1^2} & \cdots & \frac{\partial G_6^1}{\partial y_4^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & V_1 & W_1 & X_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 & X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{10} & V_{10} & W_{10} & X_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial S_1}{\partial \lambda} & -S_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{\partial S_4}{\partial \lambda} & -S_4 \\ -\frac{\partial G_1^1}{\partial y_5^2} & -\frac{\partial G_1^1}{\partial y_6^2} & -\frac{\partial G_1^1}{\partial \lambda} & -G_1^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_6^1}{\partial y_5^2} & -\frac{\partial G_6^1}{\partial y_6^2} & -\frac{\partial G_6^1}{\partial \lambda} & -G_6^1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Resolviendo los cuatro sistemas lineales que quedan aquí, podemos calcular de manera sencilla los elementos de los vectores U_s , V_s , W_s y X_s .

Ahora, evaluando la ecuación (4.20) y luego de algunas manipulaciones algebraicas, podemos expresar un bloque general de la matriz para $i = 1, \dots, 6$; $j = 2, \dots, N - 2$ (interior estelar) y obtendremos:

$$\begin{pmatrix} \delta y_5^j \\ \delta y_6^j \\ \delta y_1^{j+1} \\ \delta y_2^{j+1} \\ \delta y_3^{j+1} \\ \delta y_4^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{6j-1} & V_{6j-1} & W_{6j-1} & X_{6j-1} \\ U_{6j} & V_{6j} & W_{6j} & X_{6j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{6j+4} & V_{6j+4} & W_{6j+4} & X_{6j+4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y_5^{j+1} \\ \delta y_6^{j+1} \\ \delta \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

donde los coeficientes $U_{6j-1}, \dots, X_{6j+4}$ se calculan resolviendo:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^j & \beta_1^j & \frac{\partial G_1^j}{\partial y_1^{j+1}} & \frac{\partial G_1^j}{\partial y_2^{j+1}} & \frac{\partial G_1^j}{\partial y_3^{j+1}} & \frac{\partial G_1^j}{\partial y_4^{j+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_6^j & \beta_6^j & \frac{\partial G_6^j}{\partial y_1^{j+1}} & \frac{\partial G_6^j}{\partial y_2^{j+1}} & \frac{\partial G_6^j}{\partial y_3^{j+1}} & \frac{\partial G_6^j}{\partial y_4^{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{6j-1} & V_{6j-1} & W_{6j-1} & X_{6j-1} \\ U_{6j} & V_{6j} & W_{6j} & X_{6j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{6j+4} & V_{6j+4} & W_{6j+4} & X_{6j+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial G_1^j}{\partial y_5^{j+1}} & -\frac{\partial G_1^j}{\partial y_6^{j+1}} & -\epsilon_1^j & -\gamma_1^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_6^j}{\partial y_5^{j+1}} & -\frac{\partial G_6^j}{\partial y_6^{j+1}} & -\epsilon_6^j & -\gamma_6^j \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

donde los coeficientes $\alpha_i^j, \beta_i^j, \epsilon_i^j, \gamma_i^j$ con $i = 1, \dots, 6$ y $j = 2, \dots, N-2$ están definidos como:

$$\begin{aligned} \alpha_i^j &= \frac{\partial G_i^j}{\partial y_5^j} + U_{6j-5} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_1^j} + U_{6j-4} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_2^j} + U_{6j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_3^j} + U_{6j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_4^j} \\ \beta_i^j &= \frac{\partial G_i^j}{\partial y_6^j} + V_{6j-5} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_1^j} + V_{6j-4} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_2^j} + V_{6j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_3^j} + V_{6j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_4^j} \\ \epsilon_i^j &= \frac{\partial G_i^j}{\partial \lambda} + W_{6j-5} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_1^j} + W_{6j-4} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_2^j} + W_{6j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_3^j} + W_{6j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_4^j} \\ \gamma_i^j &= G_i^j + X_{6j-5} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_1^j} + X_{6j-4} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_2^j} + X_{6j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_3^j} + X_{6j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial y_4^j} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Finalmente, para el punto central del modelo tenemos que evaluar (4.20) para $i = 1, \dots, 6$; $j = N-1$ y (4.21) para $l = 1, 2, 3$. Usando la ecuación (4.25) con $j = N-2$ para

tener las correcciones δy_1^{N-1} , δy_2^{N-1} , δy_3^{N-1} , δy_4^{N-1} en términos de δy_5^{N-1} , δy_6^{N-1} , $\delta\lambda$, 1, y luego de ciertas manipulaciones algebraicas obtenemos el siguiente sistema, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{N-1} & \beta_1^{N-1} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial y_1^N} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial y_6^N} & \epsilon_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_6^{N-1} & \beta_6^{N-1} & \frac{\partial G_6^{N-1}}{\partial y_1^N} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_6^{N-1}}{\partial y_6^N} & \epsilon_6^{N-1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial C_1}{\partial y_1^N} & \cdots & \cdots & \frac{\partial C_1}{\partial y_6^N} & \frac{\partial C_1}{\partial \lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{\partial C_3}{\partial y_1^N} & \cdots & \cdots & \frac{\partial C_3}{\partial y_6^N} & \frac{\partial C_3}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y_5^{N-1} \\ \delta y_6^{N-1} \\ \delta y_1^N \\ \vdots \\ \delta y_6^N \\ \delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_1^{N-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ -\gamma_6^{N-1} \\ -C_1 \\ \vdots \\ -C_3 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

donde los coeficientes α_i^{N-1} , β_i^{N-1} , γ_i^{N-1} , ϵ_i^{N-1} , se calculan usando (4.27) con $j = N - 1$; $i = 1, \dots, 6$. Luego, aplicando la matriz inversa a éste último sistema matricial de ecuaciones (4.28) se obtienen las soluciones para el punto más central de la grilla, es decir, obtenemos las correcciones para las autofunciones en el centro de la estrella ($j = N$) junto con la corrección al autovalor y dos de las correcciones correspondientes al punto siguiente externo de la grilla $N - 1$ (δy_5^{N-1} y δy_6^{N-1}). Estas dos últimas correcciones halladas sirven como “enganche” entre los puntos N y $N - 1$, ya que a partir de éstas, y resolviendo la ecuación (4.25) obtenemos el resto de las soluciones para el punto $N - 1$. Con el mismo procedimiento, obtenemos sucesivamente las soluciones evaluando (4.25) con valores de j sucesivos decrecientes ($j = N - 2, \dots, 2$). Para la superficie, una vez calculadas a través de (4.25) las correcciones δy_5^2 y δy_6^2 ($j = 2$), calculamos las correcciones que faltan con (4.23), completando de esta manera las correcciones para el autovalor y las autofunciones para el modelo completo.

Insertando las soluciones halladas en las ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_i^n &= \bar{y}_i^n + \delta y_i^n & i &= 1, \dots, 6; & n &= 1, \dots, N \\ \lambda &= \bar{\lambda} + \delta\lambda \end{aligned} \quad (4.29)$$

obtenemos los valores corregidos para y_i^n y λ , siendo \bar{y}_i^n y $\bar{\lambda}$ las soluciones aproximadas a nuestro problema que asumimos conocidas y con las que comenzamos el método iterativo.

A menos que el sistema de ecuaciones sea lineal en todas las variables dependientes y_i^n y λ , las soluciones y_i^n y λ corregidas no serán las soluciones verdaderas de las ecuaciones (4.1), (4.5)-(4.8) y (4.13)-(4.15) sino que simplemente son mejores aproximaciones. Como el sistema de ecuaciones para las oscilaciones no-radiales, no-adiabáticas no es lineal en términos del autovalor ω (frecuencia de oscilación), tenemos que iterar el proceso hasta

que todas las correcciones δy_i^n y $\delta \lambda$ sean lo suficientemente chicas, dependiendo de un cierto valor de tolerancia predeterminado en el programa numérico (se pide que el valor absoluto de las correcciones sea menor que la tolerancia para detener la iteración).

Como vimos, para utilizar el método de iteración es necesario comenzar con autofunciones y autovalores aproximados a la solución verdadera. La convergencia del método depende de cuán buenas sean las soluciones iniciales. Existen varios métodos para encontrar una buena solución inicial en este tipo de problemas (Ver Unno et al.1980). En nuestro caso, hemos elegido las soluciones adiabáticas reales como soluciones aproximadas del problema no-adiabático. Esto es, hicimos corresponder a la parte real de las cuatro primeras autofunciones la solución adiabática, considerando nulas las respectivas partes imaginarias, mientras que a las dos últimas autofunciones iniciales las consideramos cero. La parte real del autovalor inicial se corresponde con el autovalor adiabático. Luego, nuestra solución aproximada está dada por:

$$\begin{aligned}
 \bar{y}_1 &= y_1(ad) + i0 & \bar{y}_2 &= y_2(ad) + i0 & \bar{y}_3 &= y_3(ad) + i0 \\
 \bar{y}_4 &= y_4(ad) + i0 & \bar{y}_5 &= 0 + i0 & \bar{y}_6 &= 0 + i0 \\
 \bar{\lambda} &= \lambda(ad) + i0 & & & &
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

4.1.1. Obtención de las soluciones adiabáticas del problema

Para hallar las soluciones adiabáticas, las cuales serán las soluciones iniciales para comenzar a trabajar con el método iterativo recién explicado, usamos el código adiabático de pulsaciones (A.H. Córscico 1998), el cual está acoplado al código de evolución estelar desarrollado por el Grupo de Evolución Estelar y Pulsaciones del Observatorio de La Plata (Ver Althaus et al. 2005, y referencias dentro del mismo). Dicho código evolutivo calcula la evolución de estrellas de masas bajas e intermedias, desde la Secuencia Principal de Edad Cero (ZAMS), pasando por la etapa de pulsos térmicos y nebulosas planetarias hasta llegar finalmente al estadio de enana blanca; con lo cual disponemos de modelos de enanas blancas y pre-enanas blancas que han sido calculados de manera autoconsistente considerando la historia evolutiva previa de la estrella. Es importante destacar que los cálculos pulsacionales adiabáticos están basados en modelos evolutivos de enanas blancas y pre-enanas blancas construídos en base a una muy detallada descripción física del problema.

Ahora, describiremos brevemente cómo el código de pulsación y evolución funcionan juntos. Primero, se elige un intervalo de T_{eff} así como también el rango de períodos a ser considerados. El código evolutivo calcula los modelos hasta que el primer borde del intervalo en T_{eff} elegido es alcanzado. A partir de aquí, el programa llama a la rutina que busca los modos adiabáticos de pulsación (a través del método del discriminante, ver Unno et al. 1989), la cual comienza a barrer el intervalo de períodos considerado. Cuando un modo es encontrado, el programa genera una solución aproximada para las autofunciones

y el autovalor adiabáticos, la cual es entonces mejorada iterativamente mediante el método de tipo Henyey. Una vez que el cálculo del modo es terminado, el programa comienza a buscar modos nuevamente, y esto se repite hasta que el rango de períodos haya sido completado. Así, el programa ha terminado de calcular los modos correspondientes al intervalo de frecuencias para el primer modelo evolutivo considerado. A continuación, el código evolutivo genera el modelo estelar correspondiente a la siguiente T_{eff} y el programa llama a la rutina de pulsaciones adiabáticas, pero esta vez sin realizar una búsqueda de modos, ya que utiliza los modos ya calculados (autovalores y autofunciones de cada modo) para el modelo anterior como soluciones iniciales del método iterativo, la cual será mejorada iterativamente hasta obtener los modos para el modelo considerado. El proceso entero es repetido automáticamente hasta que se complete el rango de T_{eff} considerado.

Finalmente, estas soluciones adiabáticas son usadas en nuestro código de pulsaciones no-adiabáticas como soluciones iniciales aproximadas.

4.2. Código de pulsaciones no-radiales, no-adiabáticas

El código numérico, escrito en FORTRAN 77, está compuesto de un programa principal, el cual contiene básicamente las llamadas a las rutinas que calcularán los modos no-radiales, no-adiabáticos.

Lo primero que hace el programa es tomar un dado modelo estelar, para el cual se le han calculado los modos adiabáticos, y contar el número de modos adiabáticos que hay, luego leer los mismos. En nuestro programa esta lectura del conjunto de modos adiabáticos está hecha desde el centro de la estrella hasta la superficie. Luego de leer los modos adiabáticos y calcular todos los parámetros físicos relevantes para el cálculo de modos no-adiabáticos (a partir de los datos del modelo que fueron calculados con el código de evolución), se llama a una rutina, la cual calcula los modos no-adiabáticos.

Para calcular los modos no-adiabáticos, se utiliza el método iterativo explicado en la sección 4.1, de la siguiente manera. Una vez leídos los modos adiabáticos, los cuales se calculan según lo explicado en la sección anterior, el programa utiliza a los mismos como soluciones aproximadas a las soluciones no-adiabáticas y comienza el proceso iterativo. Esto se hace hasta completar el número de modos adiabáticos que se encuentran para un modelo estelar dado. Cuando el programa finalizó la iteración de todos los modos adiabáticos de un dado modelo estelar, continúa con el siguiente modelo que se encuentra dentro de la secuencia de modelos considerados, iterando nuevamente los respectivos modos adiabáticos. Y así sucesivamente hasta completar la secuencia de modelos estelares.

Recordar que las soluciones adiabáticas fueron calculadas para una cierta secuencia de modelos evolutivos, debido a que el código de pulsaciones adiabáticos está acoplado al código de evolución estelar. Por lo tanto, nuestros modos no-adiabáticos se corresponden con esos mismos modelos. Es decir, la elección de los modelos que utilizaremos para estudiar las pulsaciones ya fue realizada al calcular los modos adiabáticos, y aquí sólo resta iterar esta solución hasta hallar los modos no-adiabáticos.

El código de pulsación nos proporciona (para cada modelo estelar) la autofrecuencia adi-

mensional w_k , siendo k el orden radial del modo, y las autofunciones $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$. A partir de estas cantidades, el código computa los períodos de pulsación (P_k) no-adiabáticos.

Para determinar cuáles de todos los modos calculados por el código son pulsacionalmente inestables, se calcula el llamado *coeficiente de estabilidad normalizado*, que está definido como:

$$\eta = -\sigma_I/\sigma_R \quad (4.31)$$

siendo $\sigma_I = \Im(\sigma)$ y $\sigma_R = \Re(\sigma)$. Dicho coeficiente se obtiene como solución de las ecuaciones de pulsaciones no-adiabáticas. Este coeficiente nos permite determinar cuáles modos son inestables (es decir, modos con $\eta > 0$).

Nuestro código numérico también calcula la integral de trabajo. Como fue explicado en el Capítulo 3, dicha integral es importante debido a que nos indica las zonas de excitación y de amortiguamiento dentro de la estrella. En este caso, para trabajar numéricamente utilizamos la expresión de la integral de trabajo de Lee & Bradley (1993) :

$$W(r) = \pi \int_0^r \rho T C_P \Im \left(\frac{\delta T^*}{T} \frac{\delta S}{C_P} \right) r^2 dr \quad (4.32)$$

A partir de la integral de trabajo $W(r)$ es posible calcular una tasa de crecimiento integral, w (trabajo diferencial), según

$$w = \frac{1}{4\pi} \frac{W(R_*)}{E_{\text{kin}}} \quad (4.33)$$

donde R_* es el radio estelar y E_{kin} es la energía cinética de oscilación normalizada, dada por:

$$E_{\text{kin}} = \frac{\sigma_R^2}{2} \int_0^{R_*} |\vec{\xi}|^2 \rho r^2 dr \quad (4.34)$$

siendo $\vec{\xi}$ el autovector desplazamiento (complejo) y $\sigma_R = \Re(\sigma)$.

Usualmente se cumple que $w \approx \eta$.

Otra cantidad que es escrita en el programa numérico de modo diferente al mostrado anteriormente es la frecuencia de Brunt-Väisälä. La prescripción que debe emplearse para evaluar la frecuencia de Brunt-Väisälä (N) en enanas blancas y pre-enanas blancas está dada por el *tratamiento de Ledoux modificado* (ver Tassoul et al. 1990). Este tratamiento es esencial para evitar los ruidos numéricos típicos que aparecen cuando se emplea la expresión básica para N , que tienen origen en la alta degeneración electrónica en el núcleo de una enana blanca o pre-enana blanca. En este tratamiento numérico los efectos de cualquier cambio en composición (gradientes de composición química) sobre N están contenidos casi exclusivamente en el término de Ledoux B ; este hecho hace que el método sea particularmente útil para inferir la influencia relativa que cada gradiente de composición tiene sobre las propiedades de atrapamiento de modos de un dado modelo estelar. De hecho, cada región de transición química produce una clara y distintiva característica en N , la cual es generalmente responsable de las propiedades de atrapamiento de modos del modelo.

Específicamente, la frecuencia de Brunt-Väisälä se calcula según:

$$N^2 = \frac{g^2 \rho}{p} \frac{\chi_T}{\chi_\rho} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla + B) \quad , \quad B = -\frac{1}{\chi_T} \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{X_i} \frac{d \ln X_i}{d \ln p} \quad (4.35)$$

siendo

$$\chi_T = \left[\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right]_\rho \quad \chi_\rho = \left[\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right]_T \quad \chi_{X_i} = \left[\frac{\partial \ln p}{\partial \ln X_i} \right]_{\rho, T, X_{j \neq i}} \quad (4.36)$$

La cantidad X_i representa la abundancia fraccional de la especie química i .

A modo explicativo, presentamos en la Figura 4.1 el siguiente esquema, el cual resume de qué manera trabaja el código numérico de pulsaciones no-radiales, no-adiabáticas.

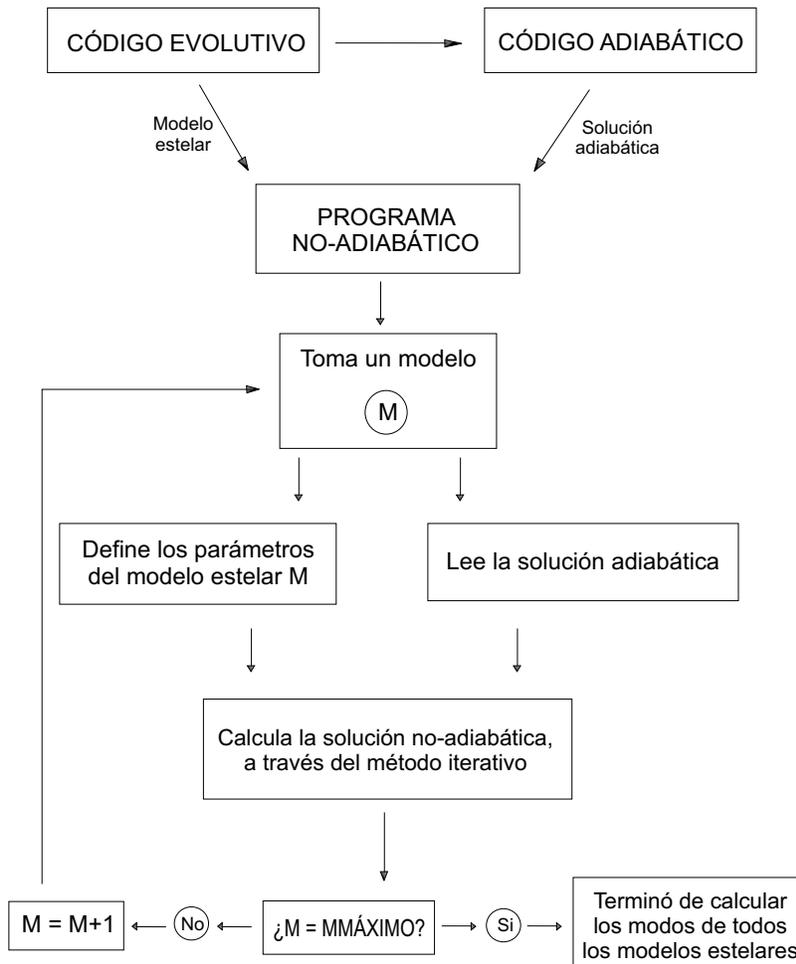


Figura 4.1: Diagrama esquemático que indica el flujo de cómo trabaja el código de pulsaciones no-radiales, no-adiabático.

Capítulo 5

Aplicaciones del Código Numérico: Estrellas PG1159 pulsantes

En este Capítulo presentaremos los resultados obtenidos al aplicar el código de pulsaciones no-radiales, no-adiabáticas a modelos de estrellas pre-enanas blancas (PWDs) PG1159 pulsantes. Primero daremos una breve descripción acerca de las principales características de este tipo de estrellas, y luego mostraremos lo que obtuvimos al realizar el análisis de estabilidad.

Queremos enfatizar que nuestro objetivo aquí no es hacer un estudio exhaustivo de las propiedades de estabilidad pulsacional de las estrellas PG1159. En lugar de esto, nuestra intención es aplicar nuestro código numérico a este tipo de estrellas y evaluar su funcionamiento.

5.1. Características principales de las PG1159s

La familia de estrellas pre-enanas blancas PG1159 está definida espectroscópicamente por el dominio de líneas He II, C IV y O VI (algunas veces se observan también líneas de N V) y una fuerte deficiencia de hidrógeno. En porcentaje, las especies químicas dominantes en la superficie son: helio con un $\sim 42\%$, carbono con $\sim 43\%$ y oxígeno con $\sim 15\%$ (Werner et al. 1997) lo cual caracteriza la composición química superficial bastante inusual de este tipo de estrellas.

Se conocen aproximadamente 32 miembros de esta familia, de los cuales casi la mitad se encuentran inmersos en una nebulosa planetaria. El rango típico de temperaturas efectivas de las estrellas PG1159 se da entre $80000 \leq T_{\text{eff}} \leq 180000K$ y sus gravedades superficiales se encuentran entre $5,5 \leq \log g \leq 8,0$.

Evolutivamente, se cree que estas estrellas son las descendientes de estrellas post-AGB que, luego de experimentar un pulso térmico muy tardío (VLTP) al comienzo de la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas (WDs), retornan a la AGB y finalmente evolucionan en los centros de nebulosas planetarias como estrellas PWDs deficientes en hidrógeno en el escenario llamado *born-again* (Fujimoto 1977; Schönberner 1979; Iben et

al. 1983). Cálculos evolutivos recientes del escenario *born-again*, incorporando *overshooting* convectivo reproducen muy bien la composición atmosférica de las estrellas PG1159 (Herwing et al. 1999, Althaus et al. 2005).

Las estrellas pulsantes PG1159 (o GW Vir) constituyen una de las más cautivantes clases de estrellas variables ya que representan la conexión evolutiva entre las estrellas frías y muy luminosas de la AGB, y las estrellas calientes dentro del grupo de estrellas compactas WDs. Desde el descubrimiento de su estrella prototipo PG1159-035 (McGraw et al. 1979), las estrellas GW Vir han sido el foco de numerosas observaciones y estudios teóricos. Actualmente se conocen once estrellas variables de este tipo, seis de las cuales están asociadas a nebulosas planetarias (llamadas usualmente PNNV: Núcleos de Nebulosas Planetarias Variables) y tienen bajas gravedades superficiales ($\log g < 7$), y altas luminosidades. Los otros objetos, para los cuales no se encuentran nebulosas en los alrededores, son a veces llamadas estrellas DOV o estrellas GW Vir “desnudas” (*naked*) y tienen altos valores de gravedades superficiales ($\log g > 7$) y bajas luminosidades.

Este tipo de estrellas variables tienen bajas amplitudes de pulsación, y son pulsadoras multiperiodicas. Los períodos observados ocupan un rango de 5 a 30 minutos. Debido a estas largas duraciones en los períodos, las pulsaciones deben atribuirse a modos g de orden radial intermedio-alto.

Un problema asociado con las estrellas GW Vir está relacionado con el mecanismo de excitación para las pulsaciones y, en particular, la composición química de la zona de excitación. En los trabajos pioneros con respecto a este tema (Starrfield et al. 1983,1984,1985; Stanghellini et al. 1991) se encontró que las pulsaciones en modos g con períodos de ~ 500 s podían ser excitadas en los modelos PG1159 por el mecanismo κ asociado con la ionización parcial de carbono y oxígeno; pero a pesar de haber hallado el mecanismo desestabilizante correcto, los períodos de los modos excitados eran demasiado cortos en relación a los períodos observados en este tipo de estrellas. Sumado a esto, sus modelos requerían que para que una región sea capaz de excitar pulsaciones debía tener muy poco helio. Éste último requerimiento conduce a la suposición de la existencia de un gradiente en la composición química, de manera de compatibilizar la pobreza en helio que tendría que haber en la zona de excitación dentro de la envoltura, con las capas atmosféricas ricas en helio. Más recientemente, y en claro desacuerdo con las conclusiones de los trabajos citados previamente, los cálculos de Saio (1996), Gautschy (1997), Quirion et al. (2004) y Gautschy et al. (2005) demostraron que las pulsaciones en modos g en el rango de períodos observados en estrellas GW Vir podrían ser excitadas sin ningún inconveniente en modelos de estrellas PG1159 con una composición química uniforme en la envoltura, compatible con las abundancias fotosféricas observadas.

A continuación presentamos la Tabla (5.1) que muestra parámetros conocidos de ocho estrellas PG1159 pulsantes, adaptada de Quirion et al. (2004), donde los datos han sido extraídos de los siguientes trabajos:

^a Werner et al.(1997), Miksa et al. (2002)

^b Dreizler & Heber (1998)

^c O’Brien et al. (1998)

^d Winget et al. (1991)

Cuadro 5.1: Parámetros de ocho estrellas PG1159 pulsantes

<i>Nombre</i>	T_{eff}^a [$10^3 K$]	$\log g^a$	M^b [M_{\odot}]	<i>Períodos observados</i> [s]
PG 0122+200	80	7,5	0,50	336 – 612 ^c
PG 1159-035	140	7,0	0,53	430 – 840 ^d
PG1707+427	85	7,5	0,52	336 – 942 ^e
RXJ 2117+3412	170	6,0	0,70	694 – 1530 ^f
PG 2131+066	95	7,5	0,55	339 – 598 ^g
HS 2324+3944	130	6,2	0,55	2005 – 2569 ^h
K1-16	140	6,4	0,50	1500 – 1700 ⁱ
NGC 246	150	5,7	0,70	1460 – 1840 ^j

^e Fontaine et al. (1991)

^f Vauclair et al. (2002)

^g Kawaler et al. (1995)

^h Silvotti et al. (1999)

ⁱ Grauer et al. (1987)

^j Ciardullo & Bond (1996)

5.2. Detalles del análisis numérico

Los modelos estelares utilizados para el análisis de estabilidad de estrellas PG1159 fueron calculados con el código de evolución mencionado en el Capítulo 4 y están descritos en Althaus et al. (2005). Dicho código contiene todos los requerimientos necesarios para generar la evolución de enanas blancas post-AGB deficientes en hidrógeno, teniendo en cuenta un tratamiento completo y detallado de los procesos físicos que conducen a la formación de tales estrellas.

Debido a este afortunado hecho, nuestro análisis de pulsación está basado en modelos estelares evolutivos que tienen en cuenta la evolución completa de la estrella progenitora. Althaus et al. (2005) calculan la evolución de una estrella desde la Secuencia Principal de Edad Cero (ZAMS) cuya masa inicial es de $2,7M_{\odot}$ y cuya composición química inicial es la solar ($X = 0,705$, $Y = 0,275$, siendo X e Y las abundancias químicas del hidrógeno y del helio, respectivamente). Dicha estrella pasa por los estadios de quema de hidrógeno y helio en el núcleo y se dirige hasta el extremo de la AGB donde tienen lugar los pulsos térmicos de helio. Luego de experimentar 10 pulsos térmicos y como resultado de una fuerte pérdida de masa, el progenitor abandona la AGB y evoluciona hacia altas T_{eff} , donde experimenta un último pulso térmico (VLTP) durante la fase temprana de la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas, obteniendo aquí el episodio *born-again* (Blöcker 2001), donde la mayor parte de envoltura de hidrógeno residual es consumida. Luego de la ocurrencia de un doble loop en el diagrama HR, la ahora estrella deficiente en hidrógeno, de $0,59M_{\odot}$ evoluciona a luminosidad casi constante hacia el dominio de las estrellas PG1159 con una composición química superficial rica en helio, carbono y oxígeno (${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$) =

(0.306,0.376,0.228). Esto está en buen acuerdo con los datos de abundancias superficiales observadas en las estrellas pulsantes PG1159 (Dreizler & Heber 1998, Werner 2001). En la Figura 5.1 graficamos el perfil de abundancias químicas para un modelo con $\log T_{\text{eff}} = 4,95$ y $\log L/L_{\odot} = 1,23$ en el cual la estrella, que corresponde al grupo de GW Vir de baja luminosidad, ya se encuentra en la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas. Dicho perfil químico es representativo de toda la secuencia de modelos estelares empleados aquí.

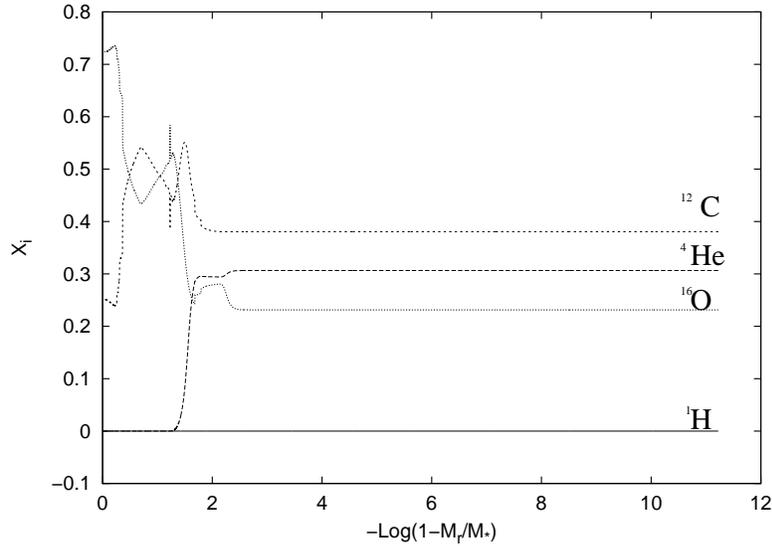


Figura 5.1: Perfil de abundancias químicas (X_i) para uno de nuestros modelos calculados, considerando una estrella de masa $0,59M_{\odot}$; $\log(T_{\text{eff}}) = 4,95$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,23$. Podemos observar que las abundancias permanecen constantes desde $-\text{Log}(1 - M_r/M_*) \sim 2$ hasta la superficie. En particular en dicha región el helio alcanza un valor de $\sim 0,3$.

Las opacidades radiativas utilizadas fueron las dadas por las tablas de OPAL, las cuales son las opacidades más nuevas disponibles y pueden dar cuenta de un amplio rango de metalicidades, incluyendo las composiciones ricas en oxígeno y carbono (Iglesias & Rogers 1996) y complementadas, a bajas temperaturas, con las opacidades moleculares dadas por Alexander & Ferguson (1994). Con respecto a las opacidades, es importante mencionar que a partir de la nueva generación de datos de opacidad (las opacidades de OPAL) surgieron estudios sobre la influencia de las mismas en cuanto a la excitación de las pulsaciones de las GW Vir (Saio 1996 ; Gautschy 1997), encontrando resultados diferentes a los que se conocían previamente basados en opacidades desactualizadas. En particular, se encontró que no es necesaria la existencia de un gradiente en la composición química entre la zona de excitación y la superficie, como se creía hasta entonces. Esto es, no es necesario que la zona de excitación sea pobre en helio para que las estrellas PG1159 pulsen.

De toda la secuencia evolutiva recién explicada, para estudiar y analizar la estabilidad de las estrellas PG1159 consideramos la secuencia de modelos de $0,59M_{\odot}$ que van desde las fases tempranas de evolución a luminosidad constante (un poco antes de que se alcance el máximo en la T_{eff} para estas estrellas, siendo $T_{\text{eff}}^{\text{max}} \approx 176500K$) hasta el comienzo

de la secuencia de enfriamiento de las WDs, esto es, cuando los modelos evolucionan a aproximadamente radio constante. Es decir, sólo consideramos la secuencia de modelos estelares que corresponden al rango de T_{eff} entre $180000K \geq T_{\text{eff}} \geq 80000K$, los cuales comprenden 313 modelos estelares.

Los mismos modelos evolutivos de estrellas PG1159 empleados en esta Tesis fueron estudiados en el trabajo de Gautschy et al. (2005). Esta afortunada circunstancia nos permitirá comparar nuestros resultados con los de aquellos autores. Las diferencias que obtengamos serán debidas exclusivamente al empleo de códigos de pulsación diferentes. Dicha comparación nos servirá para tener una idea acerca del funcionamiento de nuestro código.

Para nuestro análisis, hemos computado períodos de modos g no-adiabáticos en el rango de $150 \leq P[s] \leq 2000$ y sólo consideramos modos no-adiabáticos dipolares, esto es modos de grado armónico $\ell = 1$. Esto último se debe a que los períodos observados en las estrellas PG1159 pulsantes han sido identificados con $\ell = 1$ y sólo se observó una estrella con períodos identificados con $\ell = 2$. Por otro lado, Gautschy et al.(2005) hicieron un análisis para $\ell = 2$, el cual no presenta diferencias cualitativas en cuanto a los resultados obtenidos para modos con $\ell = 1$.

Dado que el transporte de energía convectivo no es muy importante en las envolturas de las estrellas PG1159, hemos despreciado completamente los efectos de la convección en el análisis computacional de la estabilidad.

En nuestro estudio, sólo analizamos el mecanismo $\kappa-\gamma$, por lo que no vamos a considerar el mecanismo ε explicado en el Capítulo 3 como posible mecanismo de excitación de este tipo de estrellas. Es decir, no nos interesa detectar inestabilidades debidas al mecanismo ε , y esto se debe a que las predicciones teóricas obtenidas considerando dicho mecanismo no coinciden con lo observado porque predicen modos inestables de períodos muy cortos (Hine & Nather 1987). Para ello, en nuestro código numérico forzamos a cero los términos nucleares en las ecuaciones de estabilidad: ε_N , ε_{ad} y ε_s .

Para resolver el sistema de ecuaciones de pulsaciones no-radiales, no-adiabáticas con el método ya explicado en el Capítulo 4, hemos empleado ~ 2800 puntos para dividir el dominio de la variable x (recordar que $x = \frac{r}{R_*}$). Con respecto al método iterativo que calcula los modos no-adiabáticos, los criterios de tolerancia adoptados para decidir si seguimos iterando o cortamos el proceso son : $\epsilon_1 = 1 \times 10^{-10}$, que controla las máximas correcciones en el autovalor y en las autofunciones, y $\epsilon_2 = 1 \times 10^{-15}$, que controla que las funciones (4.4), (4.9)-(4.12) y (4.16)-(4.18), definidas en el Capítulo 4 sean aproximadamente nulas (recordar que si estas funciones eran nulas estábamos en presencia de la solución exacta del problema). Con estas tolerancias, observamos que el método converge a las soluciones no-adiabáticas en aproximadamente 7 u 8 iteraciones.

Por último y antes de pasar al análisis de estabilidad, mostramos en la Figura 5.2 un diagrama de propagación, que muestra las frecuencias de Lamb (L_ℓ) y de Brunt-Väisälä (N) en función de $-\text{Log}(1 - \frac{M_r}{M_*})$. La Figura corresponde al mismo modelo considerado en la Figura 5.1 y está caracterizado por $\log(T_{\text{eff}}) = 4,95$ y $\log(L/L_\odot) = 1,23$.

Este modelo se encuentra en los inicios de la secuencia de enfriamiento de las WDs. Podemos observar que la frecuencia de Brunt-Väisälä muestra valores mayores en las re-

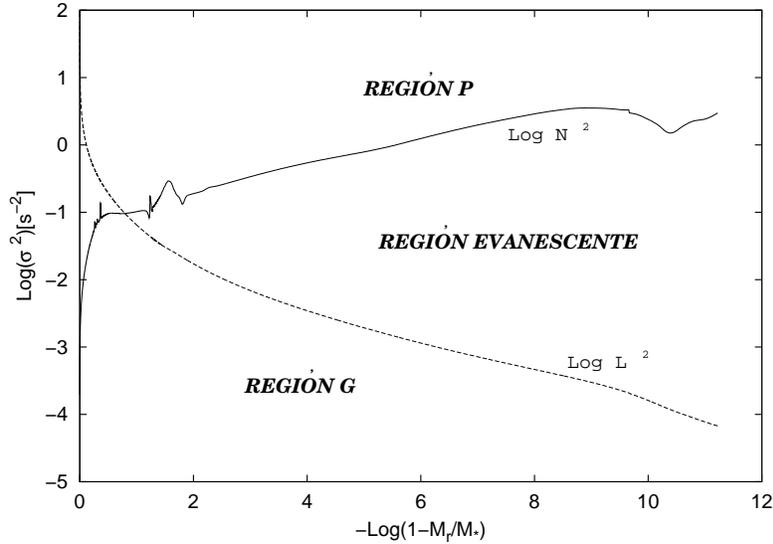


Figura 5.2: Diagrama de propagación correspondiente a una estrella de masa $0,59M_{\odot}$; $\log(T_{\text{eff}}) = 4,95$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,23$. La curva sólida muestra la frecuencia de Brunt-Väisälä (N) y la curva de trazos indica la frecuencia de Lamb (L_{ℓ}), para $\ell = 1$. Podemos observar que la frecuencia de Brunt-Väisälä muestra valores mayores en las regiones más externas de la estrella que en las regiones centrales de la misma. De esta manera, las regiones de propagación P y G, en donde los modos p y g respectivamente pueden propagarse, están claramente separadas. Entre ambas regiones, se encuentra la región evanescente, en la cual no puede haber propagación de modos.

giones más externas de la estrella que en las regiones centrales de la misma, y de esta manera las regiones de propagación P y G, en donde los modos p y g respectivamente pueden propagarse, están marcadamente divididas. La región evanescente corresponde, como lo hemos mencionado en el Capítulo 1, a las regiones donde el número de onda radial k_r es imaginario y por lo tanto los modos no se propagan aquí. Como era de esperar, el comportamiento que encontramos se asemeja a lo que ocurre en el caso de una enana blanca.

5.3. Resultados del análisis de estabilidad

5.3.1. Regiones de inestabilidad en las estrellas PG1159 pulsantes

Lo primero que hicimos para estudiar la estabilidad de estas estrellas es averiguar en qué regiones, dentro de la secuencia evolutiva considerada ($180000K \geq T_{\text{eff}} \geq 80000K$) existe inestabilidad pulsacional. Para ello, empleamos la secuencia de modelos estelares para los cuales obtuvimos previamente las soluciones adiabáticas, y calculamos los modos no-adiabáticos. Basándonos en el criterio del coeficiente de estabilidad normalizado, encontramos cuáles de los modos son inestables.

En la Figura 5.3 mostramos el track evolutivo en el diagrama HR, en donde las regiones de inestabilidad están indicadas con curvas gruesas. También graficamos los diagramas $P - \log(L/L_{\odot})$ y $P - \log(T_{\text{eff}})$, los cuales se muestran en la Figura 5.4. Allí las regiones oscuras son las que nos indican los períodos inestables. Claramente se puede observar de estos diagramas que los modos dipolares muestran dos regiones de inestabilidad separadas en una zona de alta luminosidad (baja gravedad superficial) y baja luminosidad (alta gravedad superficial). Para la zona de alta luminosidad, encontramos un rango de períodos inestables entre 800 y 2000 s, los cuales son compatibles con los períodos observados en las estrellas PNNV. La inestabilidad en esta región finaliza a $T_{\text{eff}} \approx 173000K$, cerca de la máxima temperatura efectiva que la estrella alcanza en su evolución. Dado que nuestros cálculos evolutivos comienzan a partir de una T_{eff} para la cual ya existe inestabilidad, no encontramos un límite de baja temperatura efectiva (borde rojo) en esta zona de inestabilidad. Por otra parte, debido a que restringimos nuestros cálculos de pulsaciones a un período máximo de 2000 s, tampoco encontramos un borde superior en la región de inestabilidad para los períodos.

En la zona de baja luminosidad, la inestabilidad comienza cuando la estrella alcanza una $T_{\text{eff}} \approx 117000K$. Para todo este rango de temperaturas, la estrella ya se encuentra en la secuencia de enfriamiento de enanas blancas. Los períodos alcanzados en la zona de baja luminosidad se encuentran comprendidos entre 150 y 800 s, los cuales están en buen acuerdo con los períodos observados de las estrellas GW Vir *naked*. Observando la Figura 5.4 vemos que tampoco hay un borde rojo de la región de inestabilidad, con lo cual ésta continúa hacia bajas temperaturas efectivas. Así, no hay amortiguamiento de las pulsaciones en modos g a lo largo de la secuencia de enfriamiento de las WDs. Más adelante veremos que cuando la difusión es tenida en cuenta en nuestros modelos, esta última región de inestabilidad mostrará un borde rojo definido sobre el plano $P - \log(T_{\text{eff}})$.

Veamos cuál es el comportamiento del espectro de períodos a medida que la estrella evoluciona. Los períodos de pulsación decrecen en los estados para los cuales el modelo se está aproximando a su máxima T_{eff} . Esto es debido a que la estrella está sufriendo una rápida contracción, en particular en las capas externas y los efectos de contracción conducen a un decrecimiento en los períodos de pulsación (Winget et al. 1983). Cuando el modelo ya ha entrado en su fase de enfriamiento, los períodos crecen a partir de $\log(T_{\text{eff}}) \sim 5,1$ en respuesta al decrecimiento de la frecuencia de Brunt-Väisälä en el interior de la estrella. De esta manera, en esta fase el comportamiento que se observa es el típico de las estrellas enanas blancas pulsantes, con períodos en aumento a medida que la temperatura efectiva decrece.

Los rangos de períodos excitados con su correspondiente distribución binomial en el plano $P - \log(L/L_{\odot})$ (períodos cortos excitados a bajas luminosidades y períodos largos excitados a altas luminosidades), pueden ser explicados a través del argumento demostrado por Cox(1980), que fue mencionado en el Capítulo 3, el cual nos dice que sólo los períodos comparables a la escala de tiempo térmica en la región de excitación pueden ser inestables. La siguiente integral se extiende sobre la masa de la envoltura por encima de la región de

excitación de las pulsaciones M_{dz} :

$$\Pi \approx \tau_{th}(r_d) = \frac{\int_{M_{rd}}^{M_*} C_V T dM_r}{L_*} \approx \frac{C_V T M_{dz}}{L_*} \quad (5.1)$$

donde C_V es el calor específico por gramo a volumen constante, y M_{rd} es la masa interior a r_d , la coordenada radial de la región de máxima excitación. Esta relación define el período de pulsación Π para el cual las circunstancias son óptimas para la excitación pulsacional. Ahora, de $\frac{C_V T M_{dz}}{L_*}$, tenemos que el producto del numerador sobrecompensa siempre el cambio en luminosidad en el denominador. Esto es debido principalmente al decrecimiento en la masa de la envoltura que se encuentra por encima de la región de excitación, a medida que la estrella evoluciona hacia la secuencia de enfriamiento de las WDs. Por ejemplo, a $\log(T_{eff}) = 5,06$, M_{dz} a altas luminosidades es 630 veces más grandes que a bajas luminosidades. Así, la fase de alta luminosidad “prefiere” períodos más largos para pulsar que los de la fase de baja luminosidad.

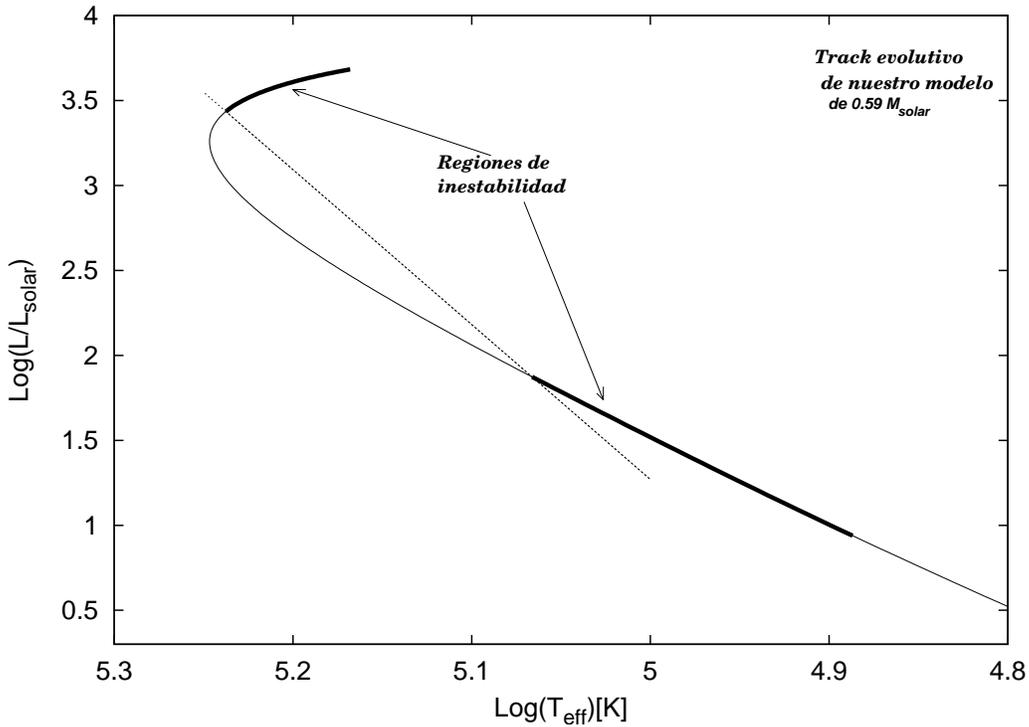


Figura 5.3: Track evolutivo de modelos de estrellas PG1159 en el diagrama HR. Las curvas gruesas indican las regiones de inestabilidad pulsacional en modos g con $\ell = 1$. El borde azul (límite de alta temperatura) de estas regiones de inestabilidad está indicado con la curva punteada y podemos ver que puede aproximarse con una recta.

Inspeccionando ahora el track evolutivo (Figura 5.3), se observa un límite de alta temperatura efectiva (borde azul) sobre el diagrama HR, el cual puede ser aproximado por una

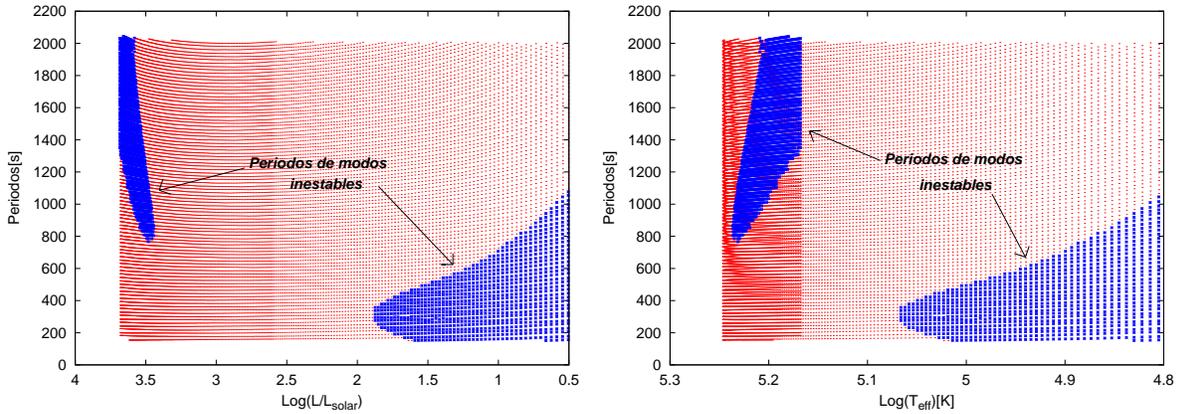


Figura 5.4: Períodos calculados para toda la secuencia evolutiva de modelos considerados. Los períodos de los modos inestables ocupan las regiones oscuras en ambos diagramas. El panel izquierdo muestra los períodos inestables en el plano $P\text{-}\log(L/L_{\odot})$, donde se puede observar cómo éstos evolucionan a medida que la luminosidad decrece, y el panel derecho muestra lo mismo pero en el plano $P\text{-}\log(T_{\text{eff}})$. Podemos ver que hay dos regiones de inestabilidad divididas en largos períodos-alta luminosidad y cortos períodos-baja luminosidad.

línea recta y difiere del borde azul de la “banda clásica de inestabilidad” (en particular la pendiente tiene signo opuesto). Este borde azul, así como la división en dos dominios de pulsación de las estrellas PG1159 en largos períodos-altas luminosidades, cortos períodos-bajas luminosidades coinciden con los resultados obtenidos por Saio (1996) y Gautschy (1997), y más recientemente por Gautschy et al. (2005). En las Figuras 5.5 y 5.6 mostramos los resultados obtenidos por Gautschy et al. (2005). La primera de dichas figuras muestra lo que Gautschy et al.(2005) obtuvieron al graficar $P\text{-}\log(T_{\text{eff}})$. El resultado para el modelo estelar de $0,59M_{\odot}$ está indicado en el mismo gráfico con el valor de la masa, y es la curva de trazos-dos puntos. En la Figura 5.6 se observa lo que dichos autores obtuvieron al graficar las secuencias evolutivas de cuatro modelos estelares con las zonas de inestabilidad. Aquí, el track del modelo estelar correspondiente $0,59M_{\odot}$ es la tercera de las curvas, partiendo de la izquierda hacia la derecha. En esta figura también está indicado el borde azul para $\ell = 1$. Podemos ver el excelente acuerdo con lo que obtuvimos nosotros.

Para comparar lo que obtuvimos con las estrellas PG1159 pulsantes espectroscópicamente calibradas, graficamos en la Figura 5.7 el track evolutivo y las regiones de inestabilidad sobre el plano $\log(T_{\text{eff}}) - \log g$. Las zonas evolutivas donde se hallaron modos g inestables se encuentran indicadas con curvas gruesas. También mostramos las estrellas PG1159 pulsantes observadas. Puede observarse que el acuerdo general entre las observaciones y nuestro modelo es razonablemente bueno.

5.3.2. Coeficiente de estabilidad

Luego de haber obtenido todos los períodos de oscilación de los modos no-adiabáticos, analizamos cuáles de los modos inestables hallados son más inestables. Ésto se encuentra

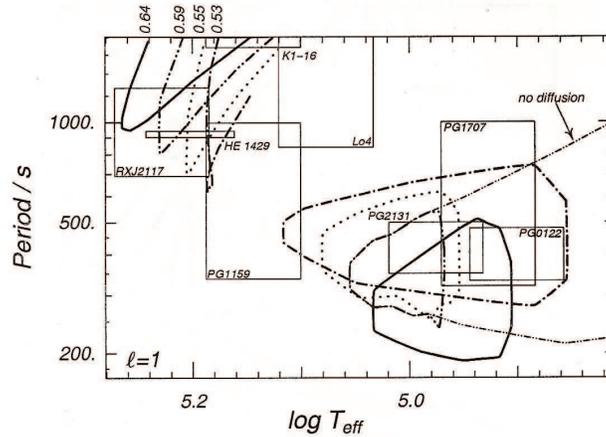


Figura 5.5: Diagrama $P\text{-}\log(T_{\text{eff}})$ obtenido por Gautschy et al.(2005) para $\ell = 1$, el cual muestra los períodos inestables. En esta figura el modelo correspondiente a la secuencia de $0.59M_{\odot}$ es el indicado con curvas de trazos-dos puntos. También están indicados, para la zona de baja temperatura efectiva, los resultados obtenidos con y sin difusión para este mismo modelo. Podemos observar que en el caso sin difusión no se encuentra borde rojo de inestabilidad. Las curvas continuas, de puntos y de trazo-punto indican lo que se obtuvo al analizar las secuencias evolutivas correspondientes a las masas 0.64 , 0.55 y $0.53 M_{\odot}$.

reflejado en los valores que adquiere el coeficiente de estabilidad normalizado η , definido en el Capítulo 4. Cuanto más grande y positivo sea este coeficiente, más inestables serán los modos.

Con este objetivo, elegimos algunos modelos y graficamos para ellos los coeficientes de estabilidad en función de los períodos. De esta manera, analizamos para qué valores de los períodos este coeficiente alcanza un máximo. Para observar la diferencia cualitativa entre las dos regiones de inestabilidad, graficamos seis modelos de la región de inestabilidad de alta luminosidad y seis de la de baja luminosidad. Los resultados obtenidos se observan en la Figura 5.8, donde especificamos la temperatura efectiva de cada modelo considerado. En dicha figura, el panel izquierdo nos indica los resultados obtenidos para los seis modelos de la región de alta luminosidad. Encontramos que los valores de η en esta región se hallan entre $10^{-8} \leq \eta \leq 10^{-4}$ y podemos ver que a medida que la temperatura efectiva aumenta (y por lo tanto la estrella evoluciona), el máximo en el coeficiente de estabilidad normalizado disminuye en magnitud y los modos inestables son aquellos con períodos cada vez más cortos. En particular, podemos ver que en el modelo de menor temperatura el coeficiente de estabilidad normalizado aún no ha alcanzado su máximo valor, lo que nos estaría indicando que existen modos más inestables de los hallados que alcanzan períodos más largos, pero debido a nuestra restricción impuesta en el máximo de los períodos calculados no los encontramos. Los modos más inestables en la región de alta luminosidad alcanzan los períodos más largos y la inestabilidad va decayendo a medida que nos acercamos a la temperatura efectiva máxima de nuestra secuencia de modelos, ya que los valores del

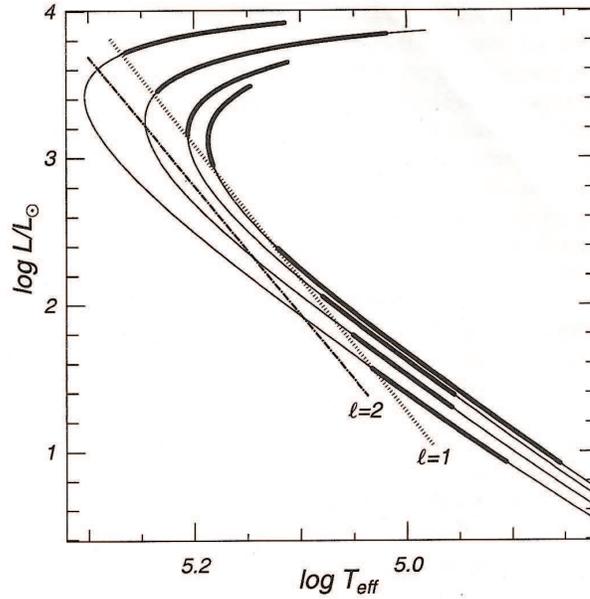


Figura 5.6: Ubicación de las cuatro secuencias evolutivas obtenidas por Gautschy et al. (2005) dentro del diagrama HR. Las curvas gruesas indican las regiones de inestabilidad. El borde azul para $\ell = 1$ está indicado con una curva punteada y el track del modelo estelar correspondiente $0,59M_{\odot}$ es la tercera de las curvas, partiendo de la izquierda hacia la derecha.

coeficiente de estabilidad son cada vez menores.

Por otro lado, el panel derecho en la Figura 5.8 nos muestra lo obtenido en la región inestable de baja luminosidad. Los valores alcanzados aquí por η se encuentran en el rango $10^{-10} \leq \eta \leq 10^{-4}$. En dicha figura observamos que a medida que va descendiendo la temperatura efectiva (la estrella aquí se encuentra en la secuencia de enfriamiento de las WDs), el coeficiente de estabilidad va tomando valores cada vez más grandes y los modos excitados tienen períodos cada vez más largos. Por lo tanto, contrariamente a lo que obtuvimos para la región de alta luminosidad, aquí los modos tienden a ser cada vez más inestables a medida que la estrella evoluciona, convirtiéndose en estrella pulsante con períodos cada vez más largos (aunque como ya vimos, la duración de los períodos en esta etapa de la evolución es siempre más corta que en la otra región de inestabilidad). Resumiendo, en la región de alta luminosidad los modos con mayor inestabilidad alcanzan los máximos períodos y se encuentran a las menores temperaturas del modelo. Y en la región de baja luminosidad los modos con mayor inestabilidad también alcanzan los mayores períodos de esta zona, a las mínimas temperaturas efectivas de nuestro modelo.

El análisis que acabamos de hacer justifica las dos regiones divididas de inestabilidad halladas.

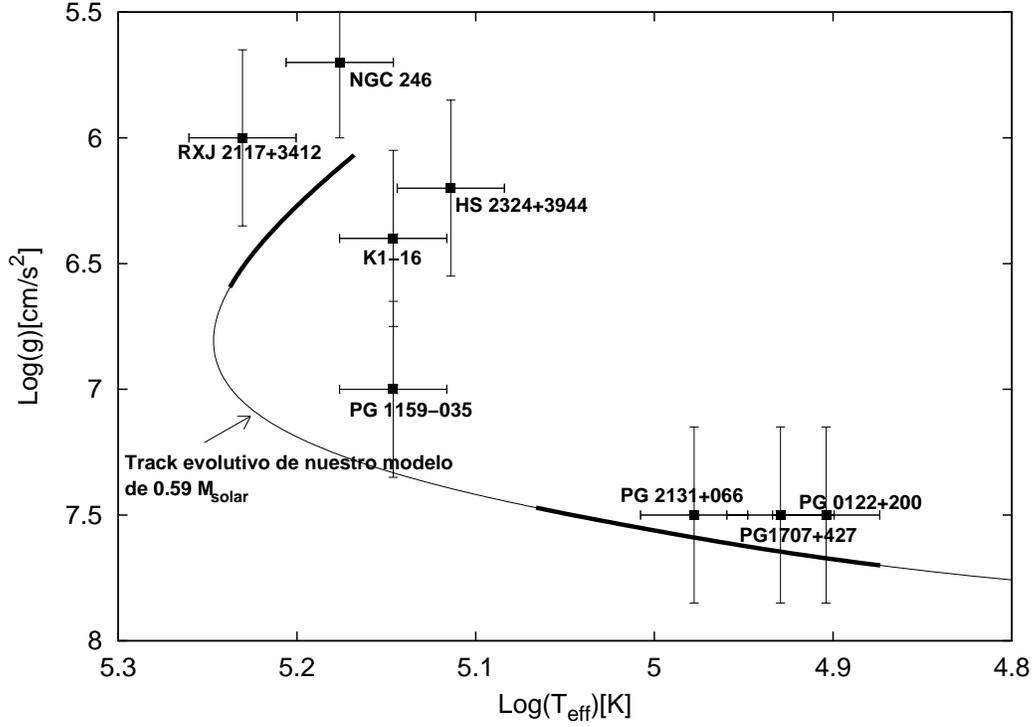


Figura 5.7: Track evolutivo sobre el plano $\log(T_{\text{eff}}) - \log g$. A lo largo del track, las regiones con modos g inestables están graficadas con curvas gruesas. Los símbolos con barras de error representan las estrellas PG1159 pulsantes observadas. Puede observarse que el acuerdo general entre las observaciones y nuestro modelo es razonablemente bueno. (Datos tomados de Werner et al. 1997 y Miksa et al. 2002)

5.3.3. Períodos adiabáticos vs. períodos no-adiabáticos

Una forma de verificar la consistencia de nuestros cálculos es comparar los períodos adiabáticos con los no-adiabáticos. Debido a que nuestro problema es débilmente no-adiabático, deberíamos obtener una gran similitud entre ambos conjuntos de períodos. Recordar que el período no-adiabático se obtiene a partir de la expresión:

$$P_{noa} = \frac{2\pi}{\sigma_R}$$

siendo σ_R la parte real de la autofrecuencia σ .

Para realizar la comparación, graficamos en la Figura 5.9 el logaritmo de la diferencia relativa entre los períodos adiabáticos y los períodos no-adiabáticos, en función del orden radial k . Lo que se observa es que la diferencia relativa en casi todos los casos se encuentra entre 0.01 (esto es, si el $P_{ad} = 200$ s. la diferencia con el P_{noa} es de 2 s.) y 0.001 (diferencia de 0.2 segundos en el ejemplo anterior), observando en algunos casos una diferencia de hasta 0.0001. Ésto nos demuestra que ambos conjuntos de períodos son muy similares, lo cual nos indica que la convergencia de los modos adiabáticos a los modos no-adiabáticos es muy buena, no obstante utilizar como solución aproximada del método iterativo los modos

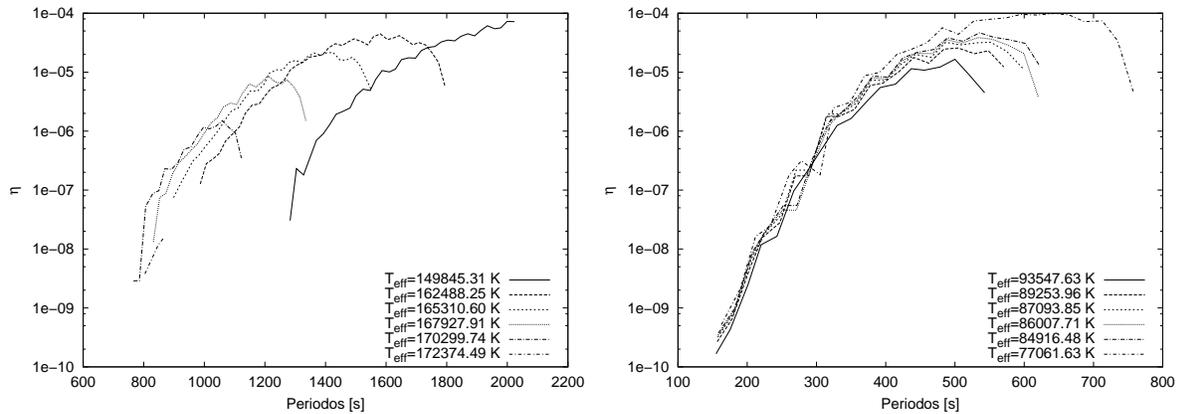


Figura 5.8: Coeficiente de estabilidad normalizado en función de los períodos. El panel de la izquierda nos indica lo obtenido para seis modelos que corresponden a la región de inestabilidad de altas luminosidades, con las temperaturas efectivas de estos modelos especificadas en el gráfico, y el panel de la derecha corresponde a seis modelos de la zona de baja luminosidad; también sus temperaturas efectivas están indicadas en el gráfico. Puede observarse que en ambos paneles los modos más inestables son los de períodos más largos correspondientes a sus respectivas regiones.

adiabáticos (forzando de esta manera que las autofunciones y_5 e y_6 sean 0 en el inicio del proceso).

Sólo en unos pocos casos obtuvimos un mal acuerdo entre ambos períodos. Ésto se debe al hecho de que, a veces, la solución adiabática de un cierto orden radial k converge a la solución no-adiabática correspondiente a otro k . Esto último se debe a que la solución aproximada que estamos utilizando en nuestro programa no es del todo apropiada en algunos pocos casos.

5.3.4. Excitación y amortiguamiento de modos

Hasta aquí hemos hablado de las regiones de inestabilidad en el diagrama HR y en el de $P\text{-}\log(T_{\text{eff}})$, y de los períodos de los modos inestables, pero todavía no dijimos nada acerca del mecanismo de excitación .

Como ya hemos indicado, el análisis de estabilidad fue realizado considerando que la excitación de los modos g inestables se debe al mecanismo $\kappa - \gamma$, el cual es el mecanismo actualmente aceptado como agente desestabilizador en estrellas PG1159. También recordemos que las pulsaciones en estos modelos son naturalmente excitadas sin necesidad de invocar gradientes en la composición química, como se suponía en trabajos anteriores (Starrfield et al. 1983,1984,1985 ; Stanghellini et al.1991).

Para observar los detalles de los procesos de excitación y amortiguamiento, elegimos dos modelos representativos de la zona de inestabilidad a altas luminosidades y dos modelos representativos de la zona de baja luminosidad. Graficamos para cada uno de ellos la derivada de la integral del trabajo (dW/dr), la opacidad (κ) y la función $C\kappa$ en función de la coordenada $-\log(1 - \frac{M_r}{M_*})$ para todos los modos del modelo, donde

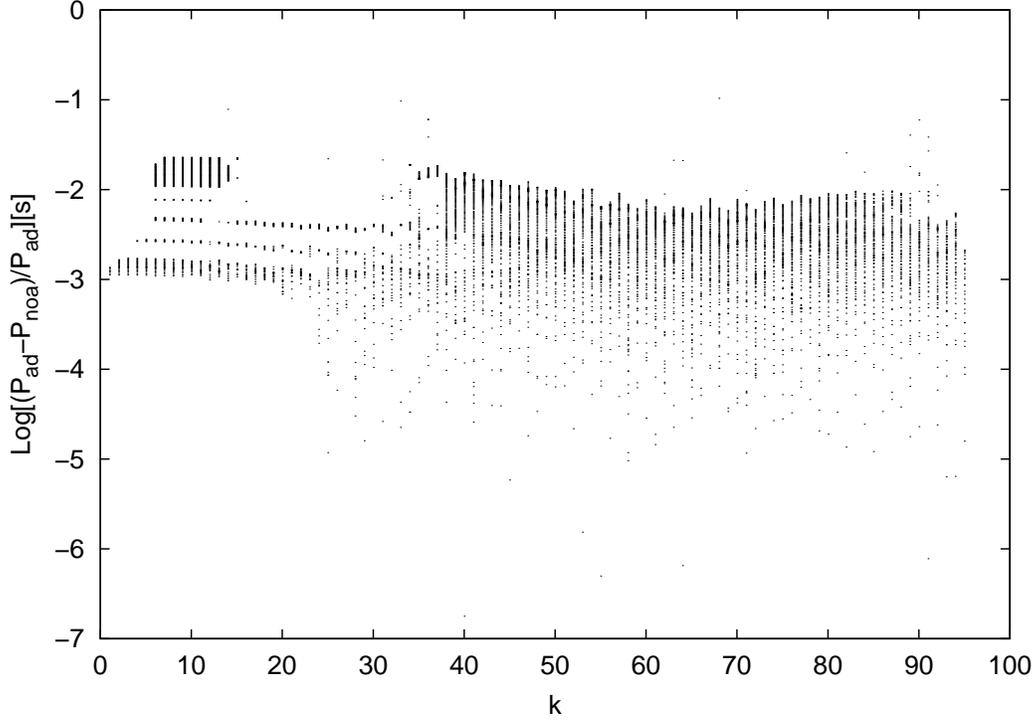


Figura 5.9: Logaritmo de la diferencia relativa entre los períodos adiabáticos y no-adiabáticos en función del orden radial k , para todos los modelos considerados en la secuencia evolutiva. Podemos observar que ambos conjuntos de períodos son muy similares.

$$C\kappa = \kappa_T + \frac{\kappa_\rho}{(\Gamma_3 - 1)} \quad (5.2)$$

la cual, como sabemos, debe verificar $dC\kappa/dr > 0$ para que la región en cuestión excite pulsaciones.

La elección de la coordenada espacial como una función de la masa fraccional $-\log(1 - \frac{M_r}{M_*})$ se debe a que ésta coordenada amplifica la región superficial de la estrella, que es donde sabemos que son excitados los modos g de nuestros modelos. Notemos que un valor 0 de esta coordenada nos indica la ubicación del centro estelar y un valor 2 nos indica la zona de transición entre el núcleo y la envoltura. Veamos que para $-\log(1 - \frac{M_r}{M_*}) = 4$, la masa interior al radio r es de $M_r = (1 - 10^{-4})M_* = 0,9999M_*$, es decir debajo de ese r tenemos casi toda la masa de la estrella; y a valores mayores de la coordenada amplificadora más nos acercamos a la superficie estelar. Debido a que en nuestros modelos de estrellas GW Vir las capas más profundas que $-\log(1 - \frac{M_r}{M_*}) \sim 4$ y más externas que $-\log(1 - \frac{M_r}{M_*}) \sim 12$ no contribuyen ni al amortiguamiento ni a la excitación de los modos, restringimos el valor de esta variable al rango [4-12] a la hora de mostrar nuestros resultados.

En la Figura 5.10 se indica la ubicación de los modelos considerados caracterizados por las siguientes luminosidades y temperaturas efectivas:

Modelo a: $T_{\text{eff}} = 150216K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 3,66$
 Modelo b: $T_{\text{eff}} = 160000K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 3,59$
 Modelo c: $T_{\text{eff}} = 98925K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,49$
 Modelo d: $T_{\text{eff}} = 79353K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,01$

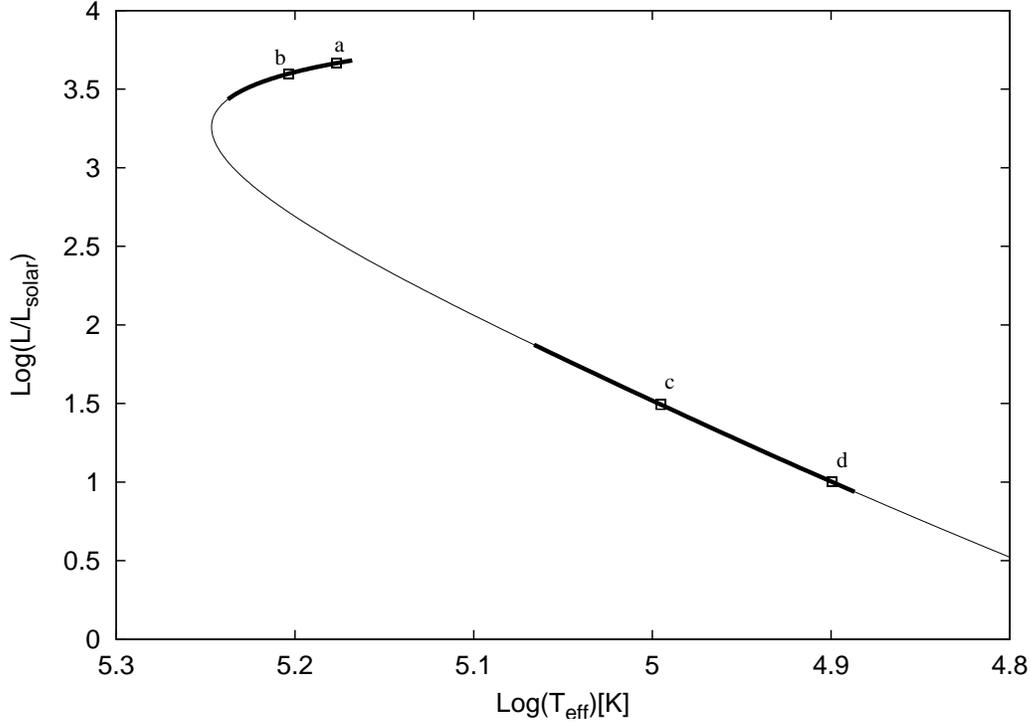


Figura 5.10: Ubicación en el track evolutivo de los modelos a analizar. Dichos modelos, indicados con las letras *a*, *b*, *c* y *d*, están caracterizados por las siguientes temperaturas efectivas y luminosidades. Modelo a: $T_{\text{eff}} = 150216K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 3,66$; Modelo b: $T_{\text{eff}} = 160000K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 3,59$; Modelo c: $T_{\text{eff}} = 98925K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,49$ y Modelo d: $T_{\text{eff}} = 79353K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,01$.

En la Figura 5.11 hemos graficado dW/dr (paneles superiores), κ (paneles centrales) y $C\kappa$ (paneles inferiores) para los dos modelos que se encuentran en el rango de inestabilidad de alta luminosidad (Modelos *a* y *b*). Sabemos que un valor positivo de la derivada de la integral de trabajo nos da la cantidad de energía localmente ganada por el material desplazado durante un ciclo de pulsación, y por lo tanto nos está indicando una región de excitación, mientras que un valor negativo de esta cantidad nos indica la energía localmente perdida por el material desplazado durante un ciclo de pulsación, por lo cual esta región estará contribuyendo al amortiguamiento del modo.

Observamos que en ambos modelos, la región de excitación indicada por la derivada de la integral del trabajo (es decir, sus valores positivos) está claramente asociada con el máximo valor alcanzado (el pico) en el perfil de la opacidad.

También se observa en estos gráficos que en la misma región donde se verifica la característica mencionada anteriormente (dW/dr positiva asociada al pico en la opacidad) la

función $C\kappa$ es creciente, lo cual indica que su derivada en esta región es positiva, y ésto satisface la condición requerida en la opacidad para excitar modos. En ambos modelos, los picos en la opacidad se dan en $-\log(1 - \frac{M_r}{M_*}) \sim 8$, esto es en la parte externa de la estrella.

Por otro lado, si la región de valores positivos en la derivada de la integral de trabajo sobrecompensa la región de los valores negativos, el modo será globalmente excitado. Ésto es lo que sucede en nuestros dos modelos, en particular en el Modelo *a*. Esto último se debe a que, como ya hemos indicado, los modos en este rango de altas luminosidades tienen una inestabilidad mayor cuanto menor es la temperatura.

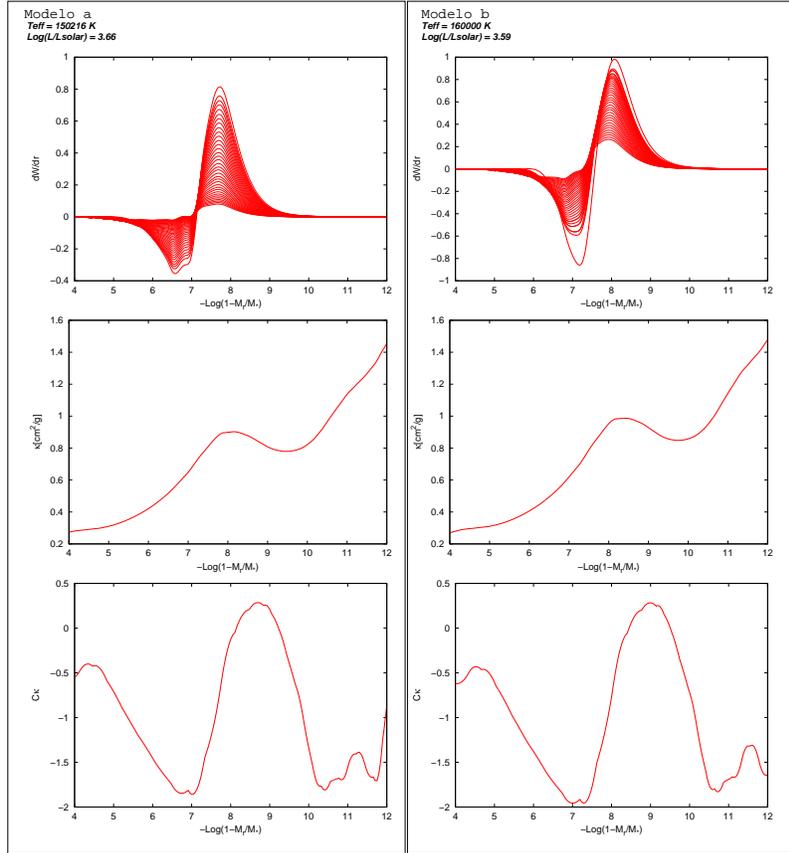


Figura 5.11: Gráficos de dW/dr (paneles superiores), κ (paneles centrales) y $C\kappa$ (paneles inferiores) para los Modelos *a* y *b* indicados en la Figura 5.10. Se puede observar en ambos modelos que los valores positivos de los paneles superiores están asociados a los picos en la opacidad y a valores positivos de la derivada de la función $C\kappa$. Dichas características se observan en la región de la estrella donde $-\log(1 - \frac{M_r}{M_*}) \sim 8$, esto es, en la parte externa de la misma.

Pasemos a analizar ahora la Figura 5.12 que corresponde a los dos modelos elegidos de la zona de baja luminosidad (Modelos *c* y *d*). Lo que observamos aquí es que tenemos cualitativamente las mismas características, esto es: valores positivos de la derivada de W asociados al pico en la opacidad y a una función $C\kappa$ creciente. Lo que podemos observar aquí es que los dos picos en la opacidad son más pronunciados y alcanzan valores mucho

más grandes que en los casos anteriores. Entre estos dos picos, el pico en el Modelo *d* (el de menor temperatura en este caso), es mayor que el primero. También en el segundo de estos modelos se observa que la suma de las contribuciones positivas en la derivada de W es mayor a la del modelo anterior, por lo que los modos aquí son más inestables (esto está en acuerdo con lo que obtuvimos al analizar el coeficiente de estabilidad normalizado).

Una diferencia importante en cuanto a los modos inestables de esta región de bajas luminosidades con respecto a los de altas luminosidades es que aquí la inestabilidad se da en una región aún más externa de la estrella, hacia la superficie. Notemos que el pico en la opacidad se observa en $-\log(1 - \frac{M_r}{M_*}) \sim 10$. Es decir, las características de las funciones en estos modelos son cualitativamente iguales a las anteriores, pero corridas hacia una región más exterior de la estrella. Esto es debido a un corrimiento hacia afuera en el perfil interno de temperaturas del modelo, como resultado de su evolución.

Hemos visto, entonces, que los modos g se excitan en una región comprendida entre $-\log(1 - \frac{M_r}{M_*}) \sim 8$ y $-\log(1 - \frac{M_r}{M_*}) \sim 10$. Entre esta región (la cual está caracterizada por una abundancia de He de $\sim 30\%$) y la superficie, no existen gradientes de composición química. Ésto también está en acuerdo con Gautschy et al. (2005).

Ya verificamos en qué regiones de la estrella se excitan los modos inestables, y vimos que ellas cumplían con los requisitos necesarios para que el mecanismo que actúe en la zona de inestabilidad sea el mecanismo κ , inducido éste por el pico en la opacidad originado por la ionización parcial del C y O. También observamos que la integral del trabajo nos sirvió para encontrar las zonas de excitación de los modos inestables.

A continuación, analizamos cómo van variando estas mismas funciones (dW/dr , κ , $C\kappa$) cuando la estrella pasa de su fase de inestabilidad a estabilidad (en la región de altas luminosidades), y cuando pasa de ser estable a ser inestable (en la región de bajas luminosidades). Para ello, tomamos tres modelos de la zona de alta luminosidad : uno de ellos se encuentra en el régimen de inestabilidad (Modelo *a*), el siguiente modelo se halla en el límite entre las regiones (Modelo *b*) y el tercero se encuentra ya en la región estable (Modelo *c*). Luego, tomamos tres modelos de la zona de baja luminosidad, donde el primero de ellos se encuentra en la zona estable (Modelo *d*), el segundo en el límite (Modelo *e*) y el tercero en la región de inestabilidad (Modelo *f*).

En la Figura 5.13 se indica la ubicación de los modelos utilizados en el track evolutivo y a continuación les presentamos las características de dichos modelos.

Modelo a: $T_{\text{eff}} = 149473K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 3,67$

Modelo b: $T_{\text{eff}} = 172374K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 3,44$

Modelo c: $T_{\text{eff}} = 176219K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 3,30$

Modelo d: $T_{\text{eff}} = 134392K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 2,22$

Modelo e: $T_{\text{eff}} = 116465K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,87$

Modelo f: $T_{\text{eff}} = 84916K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,15$

Podemos ver en la Figura 5.14 cómo va variando la integral del trabajo al pasar de la región inestable a estable. Se ve claramente que ya en el Modelo *b* (modelo en el límite de inestabilidad), comienza a ser más pronunciada la región de amortiguamiento, compensando a la de excitación, por lo que el límite ya tiende a que el modelo sea más estable que inestable. En el último de los tres gráficos, el modelo es totalmente estable, y la compen-

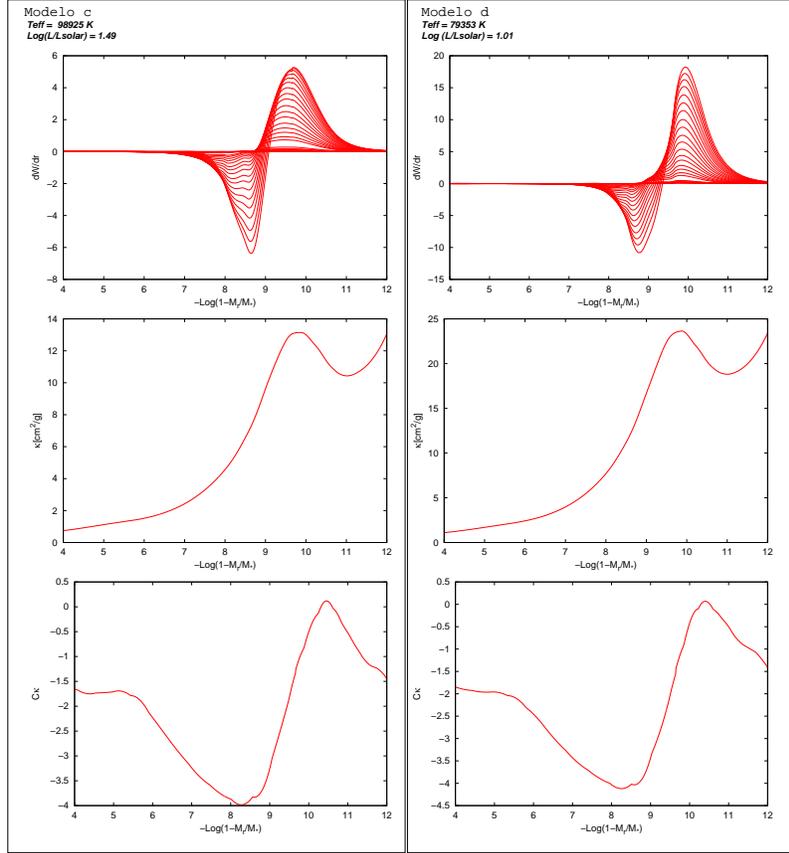


Figura 5.12: Ídem a la Figura 5.11, pero para los Modelos *c* y *d* indicados en la Figura 5.10. Aquí también se puede observar que los valores positivos de los paneles superiores están asociados a los picos en la opacidad y a valores positivos de la derivada de la función $C\kappa$. En estos modelos, las características mencionadas se observan en una región más exterior de la estrella, donde $-\log(1 - \frac{M_r}{M_s}) \sim 10$.

sación de la región de amortiguamiento por sobre la de excitación nos indica que el modelo es globalmente estable.

En la Figura 5.15 observamos qué ocurre cuando nos acercamos a bajas luminosidades, pasando de un régimen estable a uno inestable. Para el modelo que se encuentra en la región estable (Modelo *d*) y el modelo en el límite de inestabilidad (Modelo *e*) no encontramos mayores diferencias. La derivada de la integral de trabajo es muy similar, acusando un leve crecimiento de la parte que toma valores positivos para el modelo límite, lo cual muestra la tendencia del modelo hacia la inestabilidad. En cuanto a los picos en la opacidad, éste toma un mayor valor en el modelo límite, aunque tampoco en demasía, y las funciones $C\kappa$ presentan las mismas características.

Con respecto al tercer modelo (Modelo *f*), aquí se nota claramente una mayor eficiencia desestabilizante de la zona de excitación, en comparación con el efecto estabilizador de la zona de amortiguamiento. El pico en la opacidad es mucho más pronunciado alcanzando valores de hasta un factor 2-3 mayor que en los otros casos. Por otro lado, el comportamiento

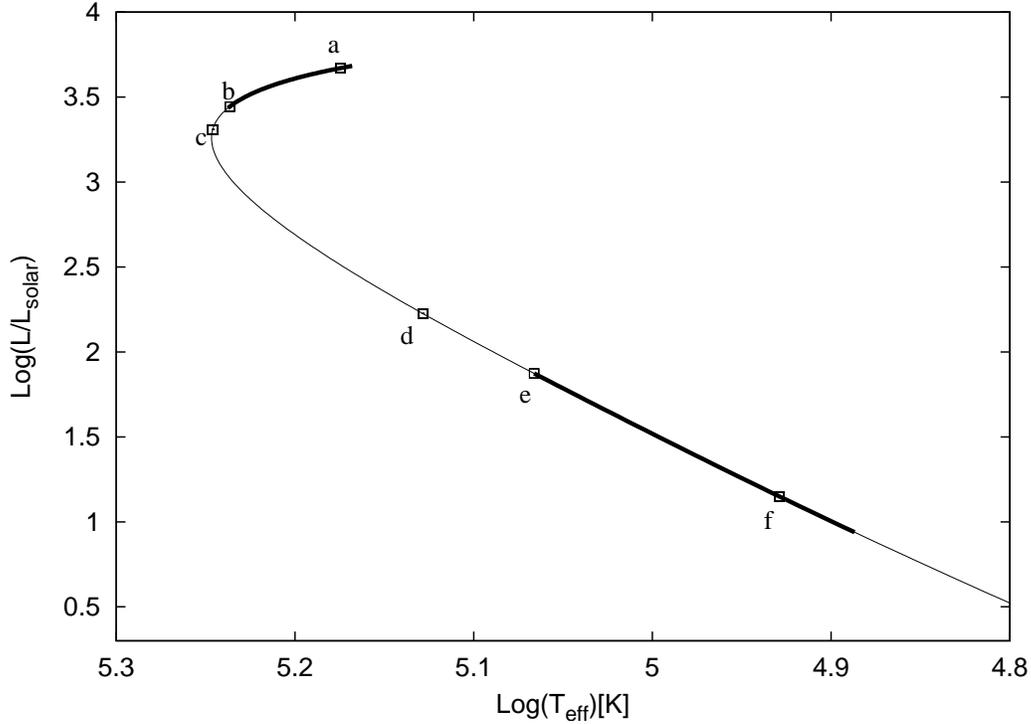


Figura 5.13: Ubicación de los modelos considerados para analizar la transición de fase inestable [estable] - estable [inestable], dentro de la secuencia evolutiva. Dichos modelos, indicados en la secuencia evolutiva con las letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*, están caracterizados por las siguientes temperaturas efectivas y luminosidades. Modelo *a*: $T_{\text{eff}} = 149473K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 3,67$; Modelo *b*: $T_{\text{eff}} = 172374K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 3,44$; Modelo *c*: $T_{\text{eff}} = 176219K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 3,30$; Modelo *d*: $T_{\text{eff}} = 134392K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 2,22$; Modelo *e*: $T_{\text{eff}} = 116465K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,87$ y Modelo *f*: $T_{\text{eff}} = 84916K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,15$.

de la función $C\kappa$ es similar a los casos anteriores.

A partir de este análisis, encontramos que la transición de inestabilidad a estabilidad a altas luminosidades, es más abrupta que el paso de estabilidad a inestabilidad a bajas luminosidades.

5.3.5. Modelos con difusión

Hasta aquí, los modelos evolutivos considerados fueron calculados sin considerar la difusión de los elementos químicos. Ahora, queremos ver qué sucede con las pulsaciones de estas estrellas GW Vir cuando actúa la difusión química. Como veremos, las especies químicas más pesadas (C, O) se “hunden” hacia el interior de la estrella, mientras que el He, siendo un elemento más liviano, comienza a “flotar” hacia la superficie. Esto es debido al *settling* (“asentamiento”) gravitacional.

Lo que hicimos fue evolucionar toda la secuencia de modelos incorporando la difusión de elementos en $T_{\text{eff}} = 88176K$ ($\log(T_{\text{eff}}) \sim 4,95$, $\log(L/L_{\odot}) = 1,23$)

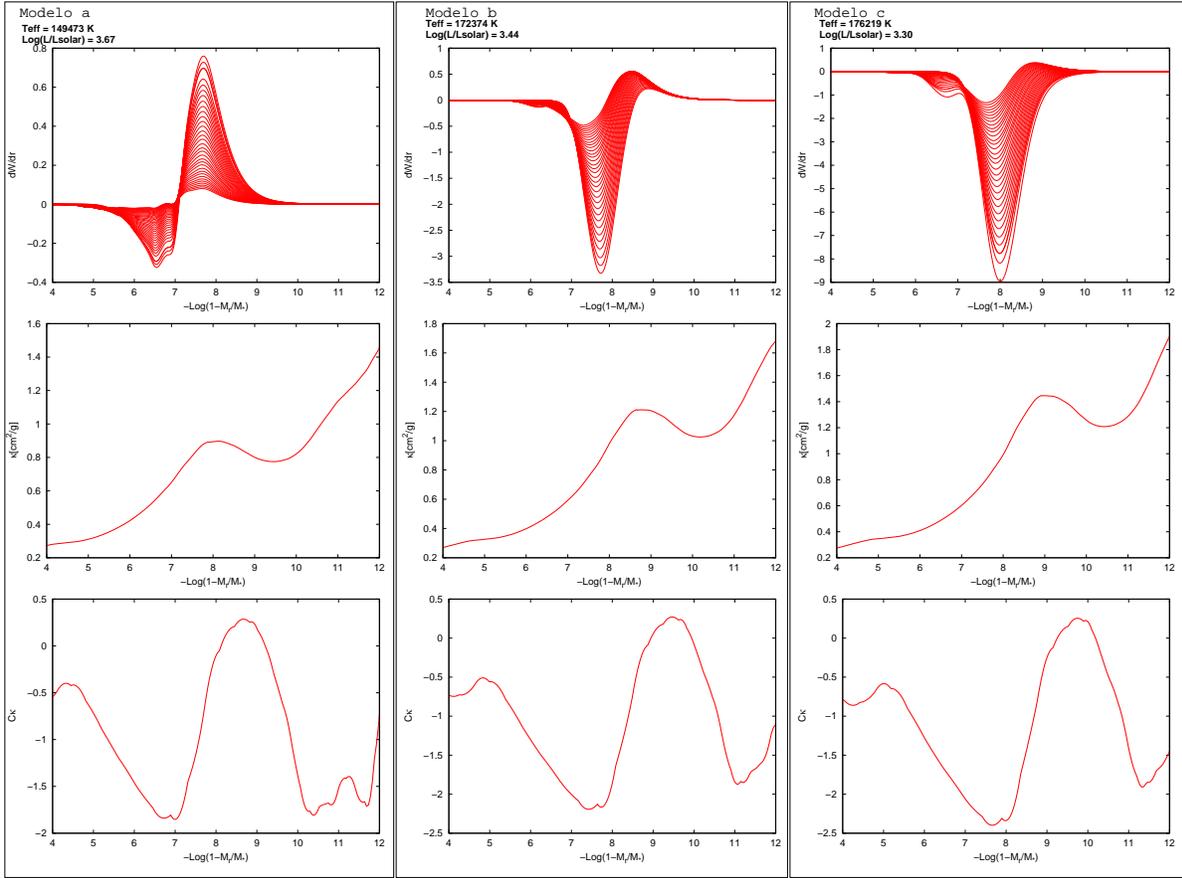


Figura 5.14: Gráficos de dW/dr (paneles superiores), κ (paneles centrales) y $C\kappa$ (paneles inferiores) para los Modelos a , b y c , indicados en la Figura 5.13. Aquí, observamos la variación de las funciones graficadas a medida que la estrella pasa de la región de inestabilidad a la región de estabilidad, para la zona de altas luminosidades. Como podemos notar, el cambio es bastante abrupto: ya el Modelo b , que se encuentra en el límite entre las regiones inestable-estable, muestra una clara tendencia hacia la estabilidad.

Es importante destacar aquí que el momento en que se activa la difusión es arbitrario. En el código evolutivo se impone la difusión abruptamente, a una dada temperatura efectiva, cuando en realidad la difusión es un proceso que se da en forma gradual en las estrellas reales. Por otra parte, efectos que actúan en contra de la difusión química, tales como los vientos estelares, no fueron tenidos en cuenta en nuestros cálculos. Dichos efectos retardan la acción de la difusión química.

Lo primero que observamos es que apenas se induce la difusión, la sedimentación de los elementos es muy efectiva, y rápidamente se observan gradientes de helio en la envoltura de la estrella. Esto puede observarse en los perfiles de abundancias graficados en la Figuras 5.16 y 5.17, donde vemos que el helio “flota” por sobre los elementos más pesados, y comienza a separarse de ellos, con lo cual se va convirtiendo en el elemento dominante en la envoltura estelar, mientras que los elementos más pesados como el O y el C disminu-

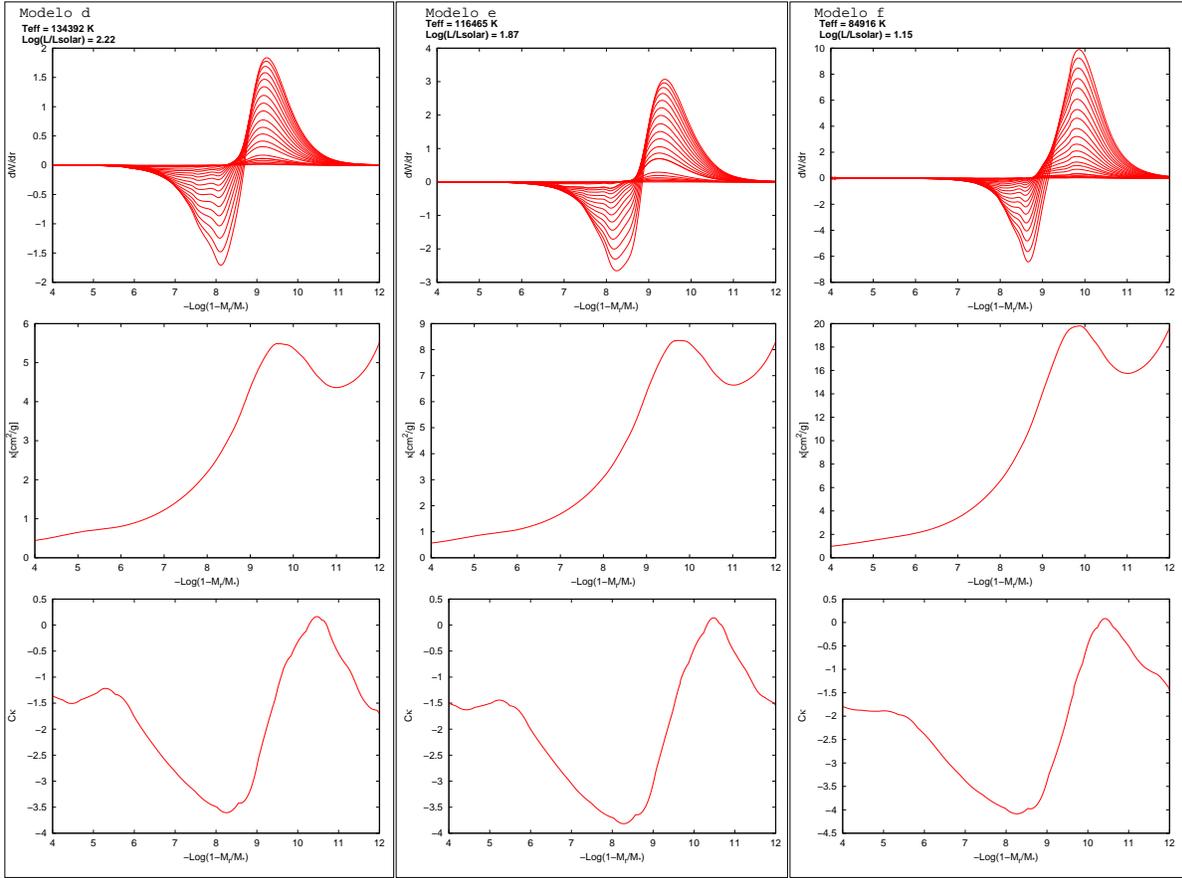


Figura 5.15: Ídem a la Figura 5.14, pero para los Modelos *d*, *e* y *f*, indicados en la Figura 5.13. Aquí la transición de la región estable a inestable se encuentra en forma más gradual. El Modelo *e*, que se encuentra en el límite de dichas regiones muestra una leve tendencia hacia la inestabilidad, hecho que claramente se verifica en el último de los modelos mostrados.

uyen su abundancia en la envoltura estelar. Los dos modelos representados en los perfiles de abundancia corresponden a $T_{\text{eff}} = 84750K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,14$, para el primero de ellos, y $T_{\text{eff}} = 76761K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 0,90$ para el segundo. (Comparar estos perfiles de abundancias con la Figura 5.1, que correspondía a los modelos sin difusión).

Lógicamente este cambio abrupto en la composición química de las envolturas provocará algún efecto en las pulsaciones, ya que dicho cambio afecta directamente a la opacidad, principal responsable del mecanismo de excitación. Veamos entonces qué ocurre con las pulsaciones, una vez inducida la difusión. Para ello, graficamos nuevamente el track evolutivo sobre el diagrama HR, indicando las zonas de inestabilidad (Figura 5.18) y luego graficamos el diagrama en el plano $\log(T_{\text{eff}}) - P$ (Figura 5.19).

Claramente, de la Figura 5.18 se observa que la difusión inhibe (“apaga”) la inestabilidad sobre la rama evolutiva de bajas luminosidades, destruyendo rápidamente las pulsaciones. De hecho, el segundo modelo calculado luego de inducir la difusión ya no presenta

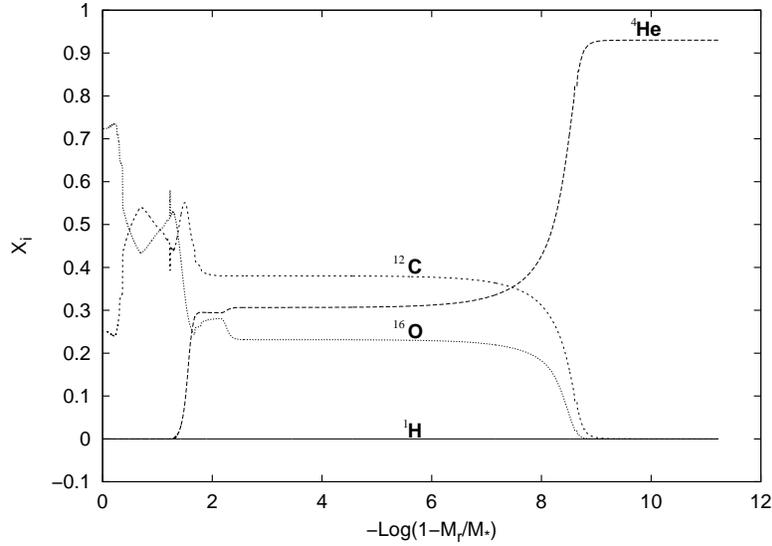


Figura 5.16: Perfil de abundancias químicas (X_i) para uno de nuestros modelos calculados, una vez inducida la difusión en $\log(T_{\text{eff}}) \sim 4,95$. Dicho modelo está caracterizado por $\log(T_{\text{eff}}) = 4,93$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,14$. Podemos observar cómo el helio “flota” por sobre los elementos más pesados, convirtiéndose en el elemento dominante en la envoltura y superficie estelar.

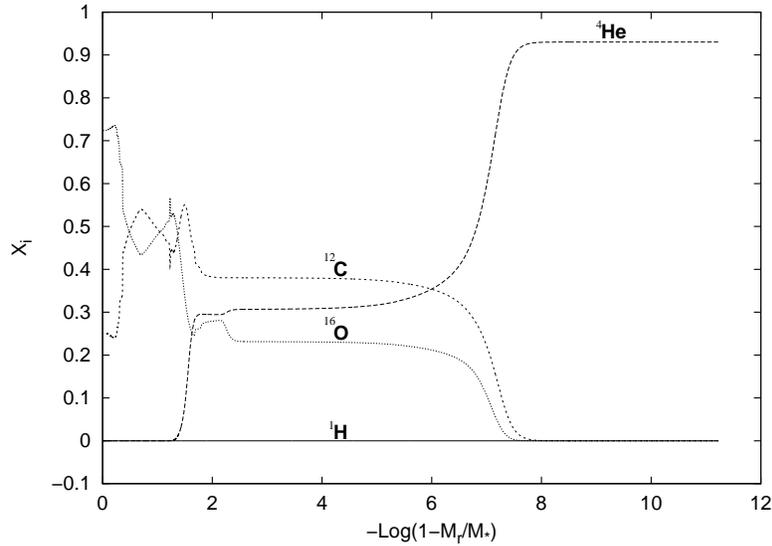


Figura 5.17: Ídem a la Figura 5.16, pero para un modelo caracterizado por $\log(T_{\text{eff}}) = 4,89$ y $\log(L/L_{\odot}) = 0,90$. Aquí, el dominio del helio por sobre el resto de los elementos alcanza regiones aún más profundas del modelo, en comparación al caso mostrado en la figura anterior.

modos inestables. Luego, podemos decir que las inestabilidades de modos g finalizan cuando la abundancia en He excede un cierto nivel crítico.

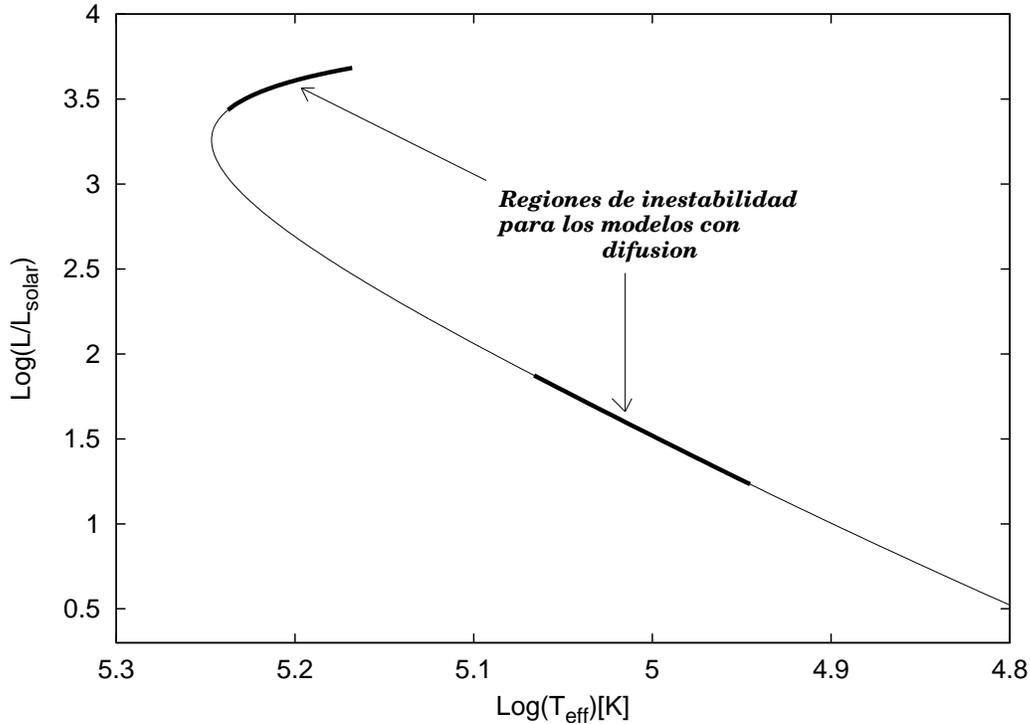


Figura 5.18: Track evolutivo sobre el diagrama HR. Con curvas gruesas se indican las zonas de inestabilidad una vez inducida la difusión. Podemos observar que la difusión inhibe la inestabilidad sobre la rama de bajas luminosidades, originando un límite rojo.

De la Figura 5.19 tenemos que se observa un borde rojo definido sobre el plano $\log(T_{\text{eff}}) - P$. Recordar que, por el contrario, la región de inestabilidad de la secuencia sin difusión continuaba creciendo hacia bajas T_{eff} . Con esto, vemos que para $\log(T_{\text{eff}}) > 4,95$ las regiones de inestabilidad de los modelos evolucionados con y sin difusión son indistinguibles, pero a partir de allí, pasan a ser completamente diferentes. Recordemos que la posición del borde rojo no es realista, ya que depende del momento en el cual imponemos la difusión química en los cálculos evolutivos. De todas maneras, lo importante aquí es que la difusión origina un borde rojo. Como ya dijimos existen otros factores que influyen en que la difusión sea más o menos efectiva y que varían de estrella a estrella, y por lo tanto no puede esperarse un único borde rojo en este tipo de estrellas.

Para ver cómo afecta la difusión a las regiones de inestabilidad dentro de la estrella, tomamos dos modelos con difusión (los cuales sin difusión resultaban ser inestables) y vemos cómo varían los gráficos de la derivada de la integral de trabajo, la opacidad y la función de la condición de excitación, cuando actúa la difusión. Los dos modelos elegidos corresponden a los mismos modelos considerados en las Figuras 5.16 y 5.17 y están caracterizados por las temperaturas $T_{\text{eff}} = 84750K$ y $T_{\text{eff}} = 76761K$, respectivamente. Para el primer modelo, en la Figura 5.20, ya se observan grandes cambios.

Podemos observar, de la derivada de la integral de trabajo, que sólo hay contribuciones

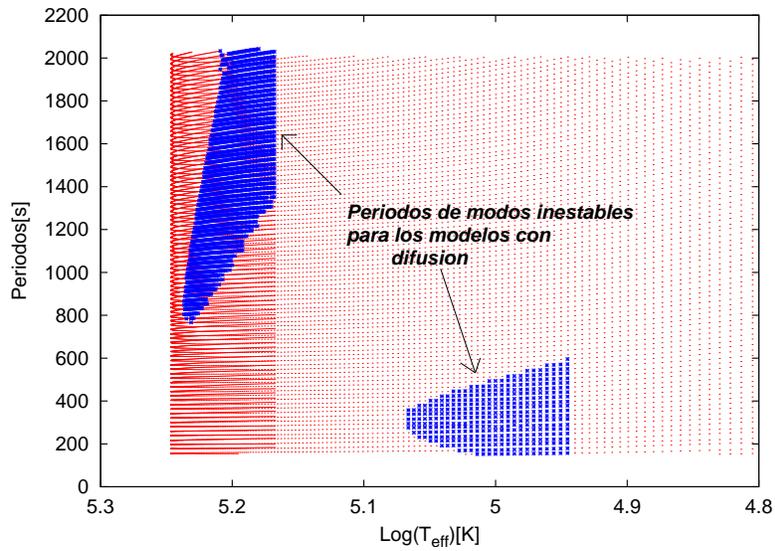


Figura 5.19: Períodos calculados para toda la secuencia evolutiva de modelos considerados, una vez inducida la difusión a $\log(T_{\text{eff}}) \sim 4,95$. Los períodos inestables ocupan las regiones oscuras en este diagrama sobre el plano $\log(T_{\text{eff}}) - P$. Se puede observar un definido borde rojo.

al amortiguamiento de los modos, con valores de dW/dr negativos. Hay un gran cambio también en la opacidad, para la cual el pico originado por la ionización parcial de C y O se ha amortiguado, debido al dominio del helio en la zona de excitación. La función $C\kappa$ no ha cambiado mucho su comportamiento, pero sí los valores adquiridos.

Este comportamiento se encuentra más pronunciado en el modelo siguiente (ver Figura 5.21), donde aquí vemos que la opacidad casi no presenta pico, y ésta está totalmente amortiguada en la zona de excitación. Los valores negativos de la derivada de la integral de trabajo contribuyen a que sólo exista amortiguamiento.

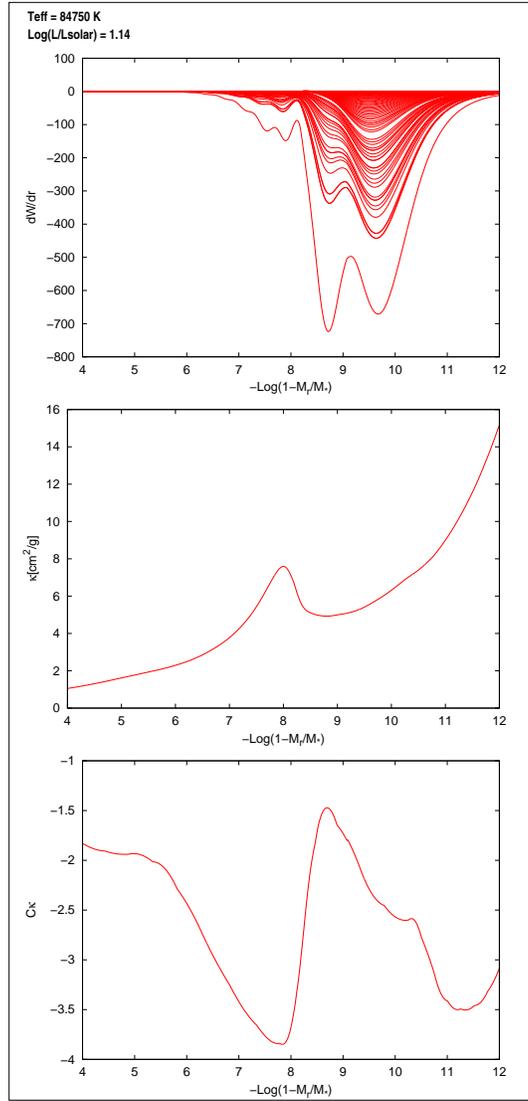


Figura 5.20: Gráficos de dW/dr (panel superior), κ (panel central) y $C\kappa$ (panel inferior) para un modelo calculado una vez inducida la difusión, caracterizado éste por $T_{\text{eff}} = 84750\text{K}$ y $\log(L/L_{\odot}) = 1,14$. Podemos observar, a partir de la derivada de la integral de trabajo, que sólo hay amortiguamiento, teniendo dW/dr valores negativos, y el pico en la opacidad debido a la ionización parcial de C y O se encuentra amortiguado.

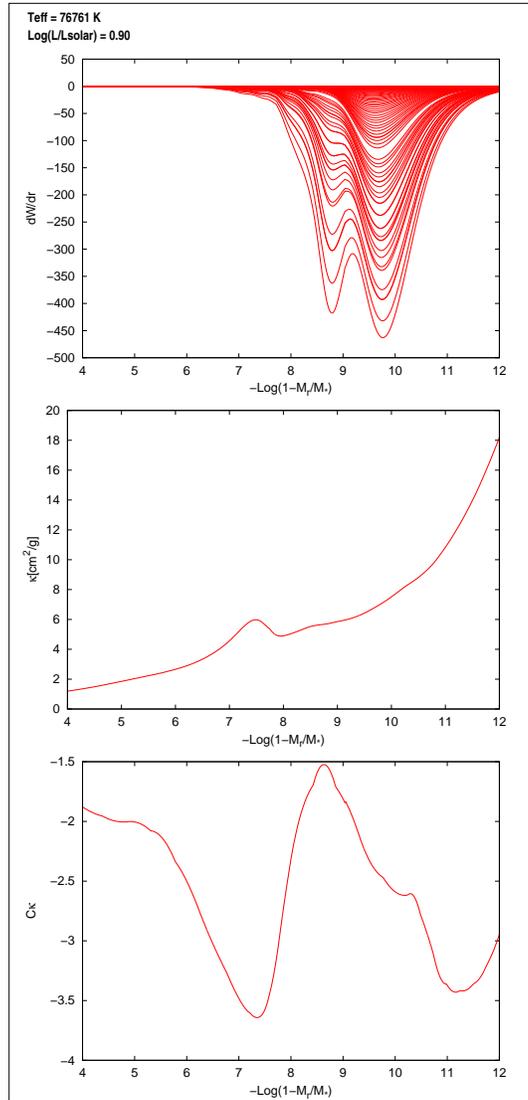


Figura 5.21: Ídem a la Figura 5.20 para un modelo caracterizado por $T_{\text{eff}} = 76761K$ y $\log(L/L_{\odot}) = 0,90$. Aquí, la opacidad casi no presenta pico y los valores negativos observados en la derivada de la integral de trabajo contribuyen a que sólo exista amortiguamiento.

Capítulo 6

Conclusiones y proyectos futuros

A lo largo de esta Tesis hemos realizado, en una primera etapa, la generalización del código adiabático de pulsaciones no-radiales, desarrollado por Córscico, A.H (1998), relajando la condición de adiabaticidad. En esta etapa se programó el mismo método iterativo para la resolución de las ecuaciones de pulsación que fue usado en el caso adiabático, pero esta vez utilizando un conjunto de seis ecuaciones en variables complejas (no reales), en lugar de las cuatro ecuaciones en variables reales que requería el código adiabático. También se incorporó el cálculo de cantidades asociadas al estudio de la estabilidad pulsacional y los mecanismos de excitación, tales como la integral de trabajo (W), el coeficiente de estabilidad normalizado, condición de excitación, etc.

En una segunda etapa, se testeó el funcionamiento del código no-adiabático, aplicándolo a modelos realistas de estrellas. Para ello, estudiamos la estabilidad de una clase de estrellas pulsantes en particular: las estrellas pre-enanas blancas PG1159 pulsantes (también llamadas GW Vir). Para la aplicación del mencionado código no-adiabático de pulsaciones fue necesaria la utilización de modelos muy detallados de las configuraciones en equilibrio. Afortunadamente, contamos con tales modelos evolutivos diseñados por el Grupo de Evolución Estelar y Pulsaciones de nuestro Observatorio, que calculan la evolución de estrellas enanas blancas teniendo en cuenta un completo y detallado tratamiento de los procesos físicos que conducen a la formación de tales estrellas. Luego, nuestro análisis de estabilidad se basó en modelos estelares que tienen en cuenta la completa evolución de la estrella progenitora. Dado que recientemente otros investigadores llevaron a cabo un estudio de estabilidad de estos mismos modelos evolutivos (Gautschy et al. 2005), fuimos capaces de hacer una comparación detallada entre nuestros resultados y los de dichos autores. Con respecto a las soluciones aproximadas requeridas por el método iterativo que resuelve las ecuaciones no-adiabáticas, hemos utilizado las soluciones adiabáticas calculadas con el código adiabático de pulsación (debido a que los efectos no-adiabáticos en las estrellas GW Vir no son demasiado grandes), imponiendo de esta manera que las soluciones iniciales de y_5 e y_6 sean cero.

Como resultado, obtuvimos que el nuevo código converge a la solución no-adiabática en sólo 7 u 8 iteraciones y en un tiempo bastante rápido (para cada modelo, del orden de 2-5 minutos, y para los ~ 300 modelos que hemos utilizado tardó entre 10 y 20 horas. En unos

pocos casos, los modos adiabáticos convergían a un modo con orden radial diferente al que le correspondía, y esto se debe principalmente a la cruda elección de la solución inicial.

El análisis de estabilidad realizado nos indica que las estrellas PG1159 pulsantes tienen su dominio de inestabilidad dividido en dos claras regiones: períodos largos - alta luminosidad, períodos cortos - baja luminosidad, los cuales coinciden con los resultados obtenidos observacionalmente (ver Tabla 5.1). En cuanto a las zonas de inestabilidad, hallamos que existe un borde azul, el cual puede aproximarse con una recta, pero no encontramos un borde rojo definido. También obtuvimos que el mecanismo de excitación que excita estos modos inestables es el mecanismo κ , que actúa en las zonas de ionización parcial de C y O. Luego, al agregar la difusión microscópica a nuestros modelos en equilibrio, hallamos que la estrella deja de pulsar a partir de una determinada T_{eff} en la zona de bajas luminosidades, cuando la abundancia del helio en la envoltura alcanza un valor alto, generando así un borde rojo. La difusión fue impuesta en nuestros modelos a una $T_{\text{eff}} \approx 88000K$, en forma arbitraria. Debido a esto, y a otros procesos que no hemos tenido en cuenta y contrarrestan el efecto de la difusión, el borde rojo hallado no es único, éste va a depender de cada estrella en particular, y del momento en que se imponga la difusión.

Los resultados obtenidos utilizando el nuevo código de pulsaciones no-adiabáticas están en un excelente acuerdo con los hallados por Gautschy et al. (2005). De esta manera, podemos concluir que el funcionamiento en general del código no-adiabático es muy bueno, y puede ser utilizado como una herramienta eficiente para estudiar la estabilidad de estrellas variables.

Los proyectos a realizar en un futuro serían, en una primera instancia, seguir mejorando el código no-adiabático. Para ello, incorporaremos la búsqueda de soluciones aproximadas para comenzar el método iterativo. Ésto nos permitirá obtener una mejor convergencia a las soluciones buscadas, y además permitirá aplicar el código a estrellas pulsantes que tengan una mayor no-adiabaticidad (esto es, a aquellas estrellas para las cuales los efectos no-adiabáticos sean de una importancia tal que las soluciones no-adiabáticas se apartan demasiado de las adiabáticas).

Por otro lado, una vez mejorado el código, lo acoplaremos al código evolutivo y explotaremos al máximo los modelos evolutivos elaborados por el Grupo de Evolución Estelar y Pulsaciones de nuestro Observatorio, para realizar análisis de estabilidad pulsacional, empleando nuestras propias herramientas numéricas, a estrellas tales como enanas blancas DA y DB, estrellas variables δ Scuti y γ Doradus, para las cuales estudiaremos los mecanismos de excitación y las bandas de inestabilidad.

Otro proyecto, a largo plazo, es el estudio de la interacción convección-pulsación. Un tratamiento adecuado de este tipo, que permite realizar un análisis pulsacional más realista en estrellas donde la convección juega un rol muy importante (como es el caso de las ZZ Ceti), no existe en la actualidad, debido a la complejidad que representa acoplar las ecuaciones de pulsaciones no-adiabáticas con un completo tratamiento convectivo dependiente del tiempo.

Bibliografía

- [1] Althaus, L. G., Serenelli, A. M., Panei, J. A., Córscico, A. H., García-Berro, E., Scóccola, C. G. 2005, A&A, 435, 631
- [2] Alexander, D.R., & Ferguson, J.W. 1994, ApJ, 437, 879
- [3] Beauchamp, A., Wesemael, F., Bergeron, P., Fontaine, G., Saffer, R.A., Liebert, J., & Brassard, P.1999, ApJ, 516, 887
- [4] Bergeron, P., Wesemael, F., Lamontagne, R., Fontaine, G., Saffer, R.A., & Allard, N.F. 1995, ApJ, 449, 258
- [5] Bradley, P.A.,& Winget, D.E. 1994, ApJ, 421, 236
- [6] Brickhill, A.J. 1991, MNRAS, 251, 673
- [7] Christensen-Dalsgaard, J. 1998, *The First Mons Workshop: Science with a Small Space Telescope*, Eds: H. Kjeldsen, T.R. Bedding, Aarhus Universitet, 17
- [8] Córscico, A.H. 1998, *Práctica de la especialidad*, FCAGLP
- [9] Córscico, A.H. 2003, *Tesis Doctoral*, FCAGLP
- [10] Córscico, A.H., & Althaus, L.G. 2006, A&A, en prensa
- [11] Cox, J. P., 1980, *Theory of Stellar Pulsations*, Princeton University Press, Princeton
- [12] DeGregoria, A.J. 1977. ApJ, 217, 175
- [13] Dolez, N. & Vauclair, G. 1981, A&A, 102, 375
- [14] Dreizler, S., Werner, K., & Heber, U. 1995, *White Dwarfs*, Lecture Notes in Physics, 443, 160
- [15] Dreizler, S.& Heber, U. 1998, A&A, 334, 618
- [16] Dziembowski, W., 1971, Acta Astron., 21, 289
- [17] Fontaine, G., Bergeron, P., Vauclair, G., Brassard, P., Wesemael, F., Kawaler, S.D., Grauer, A.D. & Winget, D.E. 1991, ApJ, 378, L49

- [18] Fujimoto, M. Y., 1977, PASJ, 29, 331
- [19] Gaustchy, A., & Saio, H., 1995, ARAA, 33, 75
- [20] Gaustchy, A., & Saio, H., 1996, ARAA, 34, 551
- [21] Gautschy, A., 1997, A&A, 320, 811
- [22] Gautschy, A., Althaus, L.G., & Saio, H. 2005, A&A, 438, 1013
- [23] Goldreich, P., & Wu, Y. 1999, ApJ, 511, 904
- [24] Hansen, C.J. 1980, *Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation*, Ed.: H.A. Hill & W.A. Dziembowski (Springer-Verlag, Berlin), P.445
- [25] Hansen, C.J., & Kawaler, S.D., 1989, *Stellar Interiors*, New York: Springer
- [26] Henyey, L. G., Forbes, J. E., & Gould, N. L., 1964, ApJ, 139, 306
- [27] Herwig, F., Blöcker, T., Langer, N., & Driebe, T. 1999, A&A, 349, L5
- [28] Hine, B. P., & Nather, R.E. 1987, in *The Second Conference on Faint Blue Stars, IAU Colloquium 95*, Eds. A.G.D Philip, D.S. Hayes, J. Liebert, 627
- [29] Iben, J, Jr., Kaler, J. B., Truran, J. W., Renzini, A., 1983, ApJ, 264, 605I
- [30] Iglesias, C. A., & Rogers, F. J. 1996, ApJ, 464, 943
- [31] Kanaan, A. N. 1996, PhD Thesis, University of Texas
- [32] Kawaler, S. D., Hansen, C.J., & Winget, D.E. 1985, ApJ, 295, 547
- [33] Kawaler, S. D., Winget, D. E., Hansen, C. J., & Iben, I. 1986, ApJ, 306, L41
- [34] Kawaler, S. D. 1988, ApJ, 334, 220
- [35] Kawaler, S.D., O'Brien, M., Clemens, J., et al. 1995, ApJ, 450, 350
- [36] Kippenhahn, R., Weigert, A., & Hofmeister, E., 1967, in *Methods in Computational Physics*, 6, 129
- [37] Ledoux, P. & Walraven, Th. 1958, in *Handbuch der Physik, Bd. 51*, Ed. S. Flügge, Springer-Verlag
- [38] Lee, U & Bradley, P. A., 1993, ApJ, 418, 855L
- [39] McGraw, J. T., Liebert, J., Starrfield, S.G, & Green, R.1979 in *White Dwarfs and Variable Degenerate Stars, IAU Colloquium 53* , Ed. H.M. van Horn, 377

- [40] Miksa, S., Deetjen, J.L., Dreizler, S., Kruk, J. W., Rauch, T., & Werner, K. 2002, A&A, 389, 953
- [41] O'Brien, M.S., et al 1998, ApJ, 495, 458
- [42] Quirion, P.O., Fontaine, G., & Brassard, P. 2004, ApJ, 610, 436
- [43] Saio, H., & Cox, J. P., 1980, ApJ, 236, 549
- [44] Saio, H., 1993, Ap&SS, 210, 61
- [45] Saio, H., 1996, in *Hydrogen-Deficient Stars*, ed. C. Jefferey & U. Heber (ASP Conference Series, Vol. 96), 361
- [46] Schönberner, D., 1979, A&A, 79, 108S
- [47] Sienkiewicz, R. 1980, A&A, 85, 295
- [48] Silvotti, R., Dreizler, S., Handler, G., & Jiang, X. J. 1999, A&A, 342, 745
- [49] Stanghellini, S.G., Cox, A. N., & Starrfield, S. 1991, ApJ, 383, 766
- [50] Starrfield, S. G., Cox, A. N., Hodson, S. W., & Pesnell, W. D., 1983, ApJ, 268, L27
- [51] Starrfield, S. G., Cox, A. N., Kidman, R. B. & Pesnell, W. D., 1984, ApJ, 281, 800
- [52] Starrfield, S. G., Cox, A. N., Kidman, R. B. & Pesnell, W. D., 1985, ApJ, 293, L23
- [53] Tassoul, M., Fontaine, G., & Winget, D. E. 1990, ApJS, 72, 335
- [54] Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi H., 1989, *Nonradial Oscillations of Stars*, University of Tokyo Press, 2nd. ed.
- [55] Vaclair, G., et al. 2002, A&a, 381, 122
- [56] Werner, K., 1992, *The Atmospheres of Early-Type Stars*, Lectures Notes in Physics, 401, 273
- [57] Werner, K., 1993, in *White Dwarfs: Advances in Observation and Theory*, NATO ASIC Proc. 403, 67
- [58] Werner, K., Rauch, T., Dreizler, S., & Heber, U., 1995, In CT95, pp. 96-97
- [59] Werner, K., Dreizler, S., Heber, U., Kaepelmann, N., Kruk, J., Rauch, T., & Wolff, D., 1997, Reviews of Modern Astronomy, 10, 219
- [60] Werner, K. 2001, Ap&SS, 275, 27
- [61] Winget, D.E. 1982, PhD Thesis, University of Rochester, New York

- [62] Winget, D. E., van Horn, H. M., Tassoul, M., Fontaine, G., Hansen, C. J., & Carroll. B. W., 1982a, ApJ, 252, L65
- [63] Winget, D. E., Robinson, E. L., Nather, R. D., & Fontaine, G., 1982b, ApJ, 262, L11
- [64] Winget, D. E., van Horn, H. M., Tassoul, M., Hansen, C. J., & Fontaine, G. 1983, ApJ, 268, L33
- [65] Winget, D. E., Hansen, C.J., & van Horn, H. M., 1983, Nature, 303, 781
- [66] Winget, D. E., 1988, in *Advances in Helio- and Asteroseismology*, IAU Symp. 123 ed. J. Christensen-Dalsgaard, S. Frandsen, Dordrecht: Reidel, 305
- [67] Winget, D. E., et al. 1991, ApJ, 378, 326